Reflexiones curriculares desde la historia de la educación matemática, en la segunda mitad del siglo XX

Curricular reflections from the history of mathematics education, in the second half of the 20th century

Blanco Nieto, L. J.
Universidad de Extremadura

Resumen

Mejorar los resultados en la enseñanza de las Matemáticas ha sido una de las procupaciones de la comunidad educativa desde hace muchos años. Una breve mirada al pasado reciente nos muestra reflexiones y aportaciones interesantes que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática, a comprender mejor dónde estamos y qué es lo que debería considerarse en el futuro.

Palabras Clave: Currículo, Historia de la educaciónmatemática.

Abstract

Improving the results in the teaching of Mathematics has been one of the concerns of the educational community for many years. A brief look at the recent past shows us interesting reflections and contributions that help us delve into the problems of mathematics education, to better understand where we are and what should be considered in the future.

Keywords: Curriculum, History of mathematics education.

Introducción

> A comienzos de los años cincuenta, e incluso antes, todo el mundo estaba de acuerdo en que la enseñanza de las matemáticas era insastifactoria. El nivel de los estudiantes en matemáticas era más bajo que en las otras asignaturas. La aversión e incluso el terror estudiantil a las matemáticas estaba muy extendido. Los adultos no recordaban casi nada de las matemáticas que habían aprendido y no sabían efectuar operaciones sencillas con fracciones. De hecho, no vacilaban en decir que no habían sacado nada limpio de sus cursos de matemáticas.
>
> (Kline, 1978, p. 21)

La cita inicial muestra que los problemas de la enseñanza y aprendizaje (E/A) de las Matemáticas no son nuevos, ni consecuencia de leyes modernas de educación. De manera similar, en la década de los 80', el prólogo a la edición española del Informe Cockroft indicaba: "El alto número de suspensos en Matemáticas y la conciencia de que los alumnos no aprenden en la medida esperada, está extendiendo entre los profesores, los alumnos y los padres la idea de que "algo va mal", manifestada unas veces como sensación de fracaso, otras como desconcierto, a menudo como frustración" (Cockroft, 1985, p. XII).

Estudios recientes inciden en los pobres resultados escolares y en el desarraigo de la población estudiantil y adulta respecto de los contenidos matemáticos. Son múltiples los aspectos a estudiar en relación con su E/A, muchos de ellos contenidos en diferentes capítulos de este libro, que pueden abordarse desde diferentes perspectivas que, lejos de contraponerse, se complementan, estableciéndose una panorámica más precisa que nos ayuda a comprender mejor el complejo mundo de la educación matemática.

Revisar la historia de la educación matemática nos permite profundizar sobre algunos de sus problemas. Estas referencias no son reliquias históricas sino fuentes depositarias de ideas y debates interesantes, que nos ayudan a reflexionar sobre la actividad docente, dando sentido a la educación matemática en el siglo XXI y al trabajo profesional del profesor de matemáticas. El periodo considerado fue testigo de cambios profundos en la enseñanza de las matemáticas para encontrar modelos adecuados para su aprendizaje.

La educación matemática a partir de los cincuenta

En los 50 se desarrollaron, en EE.UU., diferentes proyectos con objeto de elaborar un nuevo plan de matemáticas, en un movimiento que llamaron "*revolution in mathematics*" (National Council of Teacher of Mathematics, 1980). Algunos autores (Kline, 1978; Putnam et al., 1990; Castelnuovo, 1999) señalaron el lanzamiento por los rusos del Sputnik, en 1957, como el acontecimiento decisivo que generalizó reacciones de cambio en aspectos importantes en la investigación y desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas.

> Este acontecimiento convenció al gobierno y al país de que los EE.UU. estaban detrás de los rusos desde el punto de vista de las matemáticas y la ciencia, y tuvo el efecto de aflojar la bolsa de los organismos gubernamentales y de las fundaciones. Puede que fuese una coincidencia, pero en ese momento otros muchos grupos decidieron participar en la consideración de un nuevo plan.
>
> (Kline, 1978, p. 23)

Al margen del contexto concreto y anecdótico, las décadas de los 50 y 60, fueron un período de reflexión y cambio importante en las concepciones y métodos desarrollados en la educación matemática. Se consideraba que la enseñanza de las matemáticas tenía que ir más allá de la enseñanza del cálculo aritmético y la aplicación de fórmulas y desarrollo de procedimientos algorítmicos. Se justificaba el fracaso de las matemáticas porque el plan de enseñanza era anticuado y no acorde a las necesidades del momento.

Muchas de estas ideas se plasmaron en publicaciones específicas y en las recomendaciones de la Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada en Ginebra, en 1956. por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura y por la Oficina Internacional de Educación, y de las que se hacen eco Puig Adam (1960) y Hernández (1978) en su recopilación de 24 artículos y documentos de la época.

La preocupación por la educación matemática se consideraba desde una doble dimensión. En primer lugar, en relación con los contenidos de la propia matemática en los diferentes niveles educativos: *¿qué matemáticas enseñar*? En segundo lugar, se consideraban las aportaciones de psicólogos, pedagogos y docentes: *¿cómo enseñarlas?* Las aportaciones de Jean Piaget (Piaget, 1965) y otros, recogidos en Hernández (1978), eran adecuadas e importantes, y debieran haber provocado la colaboración entre especialistas en educación matemática y especialistas en educación, lo que no se produjo en la intensidad adecuada (Malaty, 1988). Aún hoy, algunos sectores influyentes en la educación matemática, recelan de las aportaciones de la psicología, pedagogía y otras áreas, incluso de las más específicas consideradas en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, presente en todas las universidades españolas.

Cambios en los contenidos matemáticos y en las matemáticas escolares

> “Si todo el programa que propongo se tuviera que condensar en un sólo eslogan yo diría: ¡abajo euclides! ¡abajo el triángulo!”.

Con estas palabras J. Dieudonné terminó su intervención en el seminario de matemáticas celebrado en Royaumont (Francia), en 1959. Formaba parte del grupo de matemáticos franceses agrupados con el nombre de Nicolas Bourbaki

(Bourbaki, 1972), que influyeron notablemente en el desarrollo de la matemática desde la primera mitad del siglo XX hasta los años 70. Su objetivo era revisar los fundamentos y resultados básicos de la matemática, sistematizar y ordenar los contenidos matemáticos que se habían desarrollado enormemente en décadas anteriores, y "suministrar a los lectores herramientas matemáticas tan robustas y tan universales como sea posible" (Bombal, 2011, p. 80). Su influencia en la enseñanza de las matemáticas en los niveles universitarios fue clara e inmediata, influyendo en la introducción de nociones de la teoría de las estructuras y de los conjuntos en la enseñanza escolar (Castelnuovo, 1999).

Aparecieron importantes publicaciones mostrando la diversidad y utilidad de las matemáticas, a partir del estudios sobre su naturaleza, uso, historia, fundamentos y filosofía, en relación con el arte, música y aplicaciones a los problemas sociales y económicos, y otros muchos campos del conocimiento. Parte de estas contribuciones fueron recogidas en la antología de 132 textos realizada por Newman (1963). Incluso Poincaré (1963) invoca la sensibilidad con motivo de demostraciones matemáticas haciendo alusión "al sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números, de las formas, de la elegancia geométrica. Un sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen" (p. 48).

Importante fue el trabajo *La matemática: su contenido, método y significado* (Aleksandrov et al., 1973) que fue considerada una obra maestra para la enseñanza de la matemática, en el nivel elemental y en el nivel avanzado. Los autores examinaban el desarrollo histórico de la disciplina desde sus orígenes, logrando una muy buena organización de la matemática y marcando algunas ideas sobre el probable desarrollo futuro. Asumían una matemática "en continuo desarrollo; los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre, sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas" (Aleksandrov et al., 1973, p. 20). Era evidente que se considera la actividad matemática y su enseñanza como una actividad compleja, dinámica y cambiante.

R. Thom (1978) realiza un "balance sucinto de las transformaciones hechas en los programas" (p. 116), señalando dos objetivos fundamentales: la renovación pedagógica y la modernización de los programas. En 1961, Stone (1978) había señalado la necesidad de modificar el núcleo de contenido matemático a enseñar y aspectos de su enseñanza, como consecuencia de la importancia que la matemática iba tomando en la sociedad. Ello debería provocar una nueva organización de la enseñanza en un programa bien concebido, que tuviera en cuenta las aportaciones de la psicología moderna al estudio del desarrollo intelectual, la formación de conceptos y la teoría del aprendizaje. Hoy día asumiríamos esta idea para señalar la importancia de las aportaciones de la didáctica de la matemática que consideran, además de los contenidos específicos, aspectos emocionales y socioculturales, la neurociencia en relación al desarrollo del pensamiento matemático, la aparición de las tecnologías y la consideración del pensamiento computacional, y otras aportaciones que marcan el desarrollo personal e intelectual en este siglo.

El problema, como en la actualidad, era delimitar un marco curricular que considerara las necesidades de la nueva sociedad, y el aprovechamiento e integración en la enseñanza de las Matemáticas de las aportaciones de otras ciencias. Para ello, habría que resolver "el problema principal que domina todos los demás sobre el contenido de los estudios: saber cuáles son las Matemáticas que deben enseñarse hoy día" (Markusievitch, 1978, p. 196).

En España, Puig Adam (1960) realizaba cuatro preguntas: i. sobre los objetivos, ¿qué nos proponemos con la enseñanza de la Matemática?; ii. sobre el método, ¿por dónde vamos?; iii. sobre el modo, ¿cómo vamos? y iv. sobre el contenido ¿qué cogeremos en el camino? Señalaba que la manera de jerarquizar y contestar estas preguntas marcaría la propuesta sobre la enseñanza de las matemáticas. Estas referencias funcionaron como organizadores del currículo, trasladables a cualquier época ya que la sociedad está en constante evolución con nuevas necesidades e incorporando constantemente herramientas intelectuales y materiales.

El cambio fundamental en el currículum fue la introducción de las llamadas matemáticas modernas o los conjuntos, en palabras de la época. Se pensaba que servirían de conexión entre las diferentes partes de las matemáticas, al asumir que el uso de los conjuntos, del lenguaje matemático y los conceptos del álgebra abstracta podían dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.

En palabras de Guzmán (1992) el movimiento hacia la 'matemática moderna' provocó una honda transformación de la enseñanza. Recuerda que se subrayaron las estructuras abstractas, lo que condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y al cultivo del álgebra, profundizándose en el rigor lógico, en la comprensión y contraponiendo ésta a aspectos operativos y manipulativos. Según Bombal (2011) esta nueva estructura del conocimiento matemático fue introduciéndose en los programas educativos de diferentes países, desde mediados de los 50. En España aparece la Colección de Textos Piloto de Bachillerato, editado por la Comisión Nacional para el Mejoramiento de Enseñanza de la Matemática en 1964, que inicia la introducción a las operaciones básicas con subconjuntos y la geometría intuitiva a partir de las transformaciones geométricas. Se produjo un cambio acerca de lo que se debía enseñar en matemáticas desde los primeros niveles educativos, que no produjo el resultado esperado. Se quiso imponer un nuevo currículo sin contar con el profesorado.

Los cambios constituyeron una revolución en la enseñanza de las Matemáticas provocando una gran polémica sobre la oportunidad de su consideración en la enseñanza primaria y secundaria, y un enorme fracaso asumido por los implicados en el sistema educativo. Su implantación en el nivel de primaria provocó una corriente contraria (*back to basics movement*) en el que se trató de definir lo fundamental de las Matemáticas con objeto de recuperar aspectos más tradicionales como los referentes, por ejemplo, al cálculo aritmético. De cualquier manera, no fue la opinión de los especialistas lo que potenció el movimiento de volver a lo básico y tradicional, más bien fueron la opinión pública y los medios de comunicación. Los padres no aceptaron que el nuevo currículo no les fuera familiar puesto que ponía el énfasis en otra matemática desconocida, lo que les imposibilitaba ayudar a sus hijos puesto que era un currículo diferente del que habían estudiado y que, obviamente, desconocían (Thom, 1978, Malaty, 1988).

El sugerente título del libro de Kline (1978) *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* expresaba el sentimiento de fracaso de la enseñanza de las matemáticas modernas. En su crítica señalaba el "uso de un vocabulario pedantesco e innecesariamente abundante, empleo injustificado y más frecuente de lo necesario de ciertos símbolos, pobreza de ejercicios …" (p. 38). El error fue admitido por todos y las llamadas matemáticas modernas fueron desapareciendo de los primeros niveles de escolaridad, volviéndose a un currículo más tradicional.

Pasado un tiempo, Malaty (1988) analizó lo que significó este movimiento señalando algunas cuestiones, que recojo por su interés. Señalaba que los especialistas trabajaron con entusiasmo y muy deprisa, se evidenció poca cooperación entre expertos en educación matemáticas y en educación y se dedicó poco tiempo e intensidad a la evaluación de los programas. El uso de los libros de textos se extendió antes de haber sido adecuadamente examinados, y las conexiones entre los diferentes capítulos mostraba que el currículo no había sido suficientemente estructurado. También, hacía referencia a la importancia de la formación permanente del profesorado, en todos los niveles.

Crítica a la enseñanza tradicional de las matemáticas

> No llegaban a comprender la significación real de los conceptos matemáticos
>
> (Dienes, 1970, p. 5).

En general, "se tenía la impresión que los alumnos aprendían en clase a manejar las operaciones aritméticas básicas y los algoritmos más frecuentes y poco más" (Schoenfeld, 1985, p. 26), lo que provocaba que profesores e investigadores consideran la necesidad de un cambio en los programas de las matemáticas escolares. Entendían, además, que algunos de los contenidos, principalmente algorítmicos, habían perdido importancia en el desarrollo matemático. Esta reflexión sigue siendo muy pertinente actualmente ya que las necesidades de la sociedad del siglo XXI y el desarrollo de tecnologías educativas, entre otras variables, tienen que llevar aparejado una renovación en los programas, provocando la pérdida de importancia o desaparición de algunos de contenidos y la revalorización de otros.

Cambiar aspectos metodológicos en las aulas se consideraba esencial para poder llevar a cabo una renovación en la enseñanza. Es decir, la renovación de contenidos, aunque necesaria, no es suficiente si no va acompañada de una nueva práctica pedagógica. "Demasiados ensayos educativos incurren en la triste paradoja de pretender enseñar las matemáticas modernas con métodos arcaicos, es decir, esencialmente verbales y basados sólamente en la transmisión más que en la reinvención o redescubrimiento" (Piaget, 1978, p. 185). Esta paradoja fue recordada 25 años después por Romberg (1991) al señalar que el movimiento de las matemáticas modernas realizó algunos cambios en los contenidos pero muy pocos en las tradicionales prácticas metodológicas en las aulas. Algo similar sucede con la consideración de la resolución de problemas como contexto para el aprendizaje matemático, que aparecía en los currículos de los 90', y que no se refleja en la práctica docente. Creo que, en la actualidad, esta consideración es especialmente importante. De alguna manera, la paradoja señalada por Piaget se observa en algunas prácticas actuales, incluso con el uso de las nuevas tecnologías, donde el estudiante observa y repite lo que el profesor muestra en la pantalla.

Los autores se manifestaban contundentes en su crítica al plan de enseñanza tradicional y a la práctica en el aula con argumentos que podrían ser motivo de investigaciones educativas actuales y que nos sirven para reconsiderar aspectos importantes en cualquier propuesta curricular. Recojo algunas aportaciones al respecto.

En primer lugar, recordaremos el interesante debate sobre el uso de *métodos inductivos y deductivos en el aula, donde había un predominio de las llamadas clases magistrales.* Se criticaba el excesivo énfasis en la demostración deductiva de los teoremas que provocaba que los estudiantes se aprendieran de memoria las demostraciones. Se desarrolla una interesante polémica, aún vigente, sobre la conveniencia de utilizar métodos expositivos y deductivos en la enseñanza de las Matemáticas en los niveles escolares y la ventaja de introducir una enseñanza más motivadora que permita la construcción del conocimiento, dándole significado a aprender y a aprehender. Decidir cuándo y cómo ir introduciendo métodos deductivos en la enseñanza sigue siendo un aspecto de reflexión importante, relacionado con el proceso de abstracción y los niveles de maduración de los aprendices. Recordemos la frase típica de los estudiantes "profe, con números que con letras no me entero". Actualmente, son muchos los profesores que en la práctica se acercan más al conductismo que al constructivismo o al aprendizaje significativo, probablemente, porque el proceso de construcción del conocimiento matemático es algo poco comprendido por el profesorado novel. Son más los que asumen, consciente o inconscientemente, los métodos que experimentaron como aprendices eludiendo otros métodos que consideran, en teoría, más adecuados pero que su implementación en el aula les causa dudas e inseguridad. Este aspecto muestra la importancia de la formación, inicial y permanente, del profesorado.

Eran frecuentes las referencias para modificar la enseñanza a base de lecciones magistrales, donde el papel del estudiante era fundamentalmente escuchar y copiar, para luego estudiar, en muchas ocasiones de memoria. La manera tradicional de impartir clases de matemáticas inducía a una actitud pasiva de los estudiantes y daba pleno sentido la expresión: 'dar matemáticas'. La dinámica del profesor impartiendo su docencia y el alumno estático en su asiento, se ha mantenido, aunque haya cambiado el aspecto formal de la comunicación, que ha evolucionado del discurso hablado, al uso de la tiza y la pizarra, las transparencias, el PowerPoint o la pizarra digital. En todos los casos, se evidencia un tipo de educación conductista cuya superación por otros modelos se pide desde hace muchos años.

Al mismo tiempo, criticaban la *enseñanza mecanicista y memorística con procedimientos desconectados entre sí*: "se les pide que imiten lo que el maestro y el libro hacen. Los alumnos se enfrentan a una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria. Casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico" (Kline, 1978, pp. 9-10). A este respecto, se señalaba el "contraste injustificado entre el aprendizaje mecánico y calculista del álgebra y el axiomático de la geometría" (Hernández, 1978, p. 38). También, en España se criticaba el aprendizaje memorístico, señalando que "interesa enseñar a discurrir, mejor que a adquirir gran maestría y rapidez en el desarrollo de un proceso, que puede memorizarse. Debemos evitar que el aprendizaje de "recetas de cocinas" para hacer problemas o aprender de memoria teoremas más o menos importantes" (Roanes, 1969, p. 14). R. Godement fue más radical en sus comentarios al señalar que

> el primer deber de los matemáticos sería proporcionar cosas que no les piden: hombres capaces de reflexionar por sí mismos, de despreciar argumentos falsos y frases ambiguas, a los ojos de los cuales la difusión de la verdad importe muchísimo más que, por ejemplo, la televisión planetaria en colores y en relieve: hombres libres y no tecnócratas-robot
>
> (Godement, 1974, p.21).

Puig Adam (1960) expresaba magníficamente su idea sobre los procesos deductivos y el uso de la memoria al señalar que

> las exposiciones lógicas impecables no satisfacen las apetencias analizadoras del niño, ni siquiera sirven para cultivar en él hábitos de síntesis, ya que tampoco se desarrolla precisamente esta capacidad dando la síntesis hecha. ¡Qué engañosa complacencia la de nuestros viejos profesores al oirnos repetir demostraciones estereotipadas! ¡Qué cándido espejismo al imaginar que así aprendíamos a discurrir! El resultado conseguido es la mayor parte de los casos eran tan sólo el cultivo obsesionante de la memoria para lograr una pura y simple imitación, bajo la falsa apariencia de un raciocinio de prestado (p. 103).

Conviene recordar que investigaciones de este siglo, señalan el uso de la memoria en el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos. Así, por ejemplo, Barrantes y Blanco (2006) señalan que los estudiantes consideran difícil la enseñanza de la geometría porque tienen que aprender fórmulas y demostraciones de memoria. Hidalgo et al., (2013) señalan que hasta los problemas típicos de los libros de texto se los aprenden de memoria. Es decir, sigue vigente el recurso de los estudiantes a memorizar las definiciones, demostraciones y las formas de resolver los problemas tipos, como la mejor manera para aprobar los exámenes y pasar de nivel.

Una de las consecuencias de este modelo y que se indicaba como defecto muy grave era la *falta de motivación*. Los aprendices estudiaban porque se les obligaba a ello y argumentaban que defender los contenidos matemáticos "diciendo que se utilizarán después en la vida. … Esta motivación es como ofrecer la luna" (Kline, 1978, p. 13). Ya reconocían que gran parte del fracaso en la enseñanza de las matemáticas se debía a la falta de motivación, junto a factores afectivos, por ello la motivación del estudiante debe buscarse desde un punto de vista más amplio, más allá del posible interés intrínseco de la matemática y sus aplicaciones (Guzmán, 1992). Es evidente que la motivación es un elemento que promueve o inhibe la conducta de los aprendices y que en su consideración se reflejan aspectos individuales y sociales.

L*os enunciados de los problemas* "son desesperadamente artificiales y no convencerán a nadie de que el álgebra es útil" (Kline, 1978, P. 16), destacando la repetición más que la variación (Romberg, 1991). Los enunciados de los problemas (vocabulario, contexto, formato, etc.) es importante porque "la forma en que se presenta el enunicado es uno de los factores del éxito o del fracaso del resolutor" (Mialaret, 1986, p. 67). Los enunciados, contextos y tipos de problemas siguen siendo en los materiales actuales muy tradicionales y alejados de las inquietudes y necesidades de la población escolar, la mayoría inciden en la repetición de situaciones explicadas para memorizar algoritmos y pocos donde se les planteen situaciones nuevas que tengan que investigar (Álvarez y Blanco, 2015).

La *falta de adaptación de los textos y materiales escolares a las reformas curriculares*, fue puesta de manifiesto en Dorfler y Mclone (1986), incidiendo en su importancia por cuanto determinan las matemáticas escolares por el uso y la dependencia que los profesores tienen de ellos para su actividad docente, y la falta de adaptación. Los libros de texto son mediadores entre el currículo y el aula y, en muchos casos, son el único nexo de unión entre estos (Álvarez y Blano, 2015). Anteriormente, Kline (1978) reprochó su la falta de calidad y de originalidad y la repetición de los mismos y la influencia del mercado y su distribución comercial en su contenido, estructura y difusión. Consecuentemente, la elaboración y revisión de los materiales escolares (en papel o digitales) y su adaptación a la nueva propuesta curricular debiera considerarse con rigor por las administraciones educativas. Sin esta revisión será difícil que el nuevo currículo se lleve a cabo con éxito.

Objetivos de la educación matemática

> No queremos ser solo matemáticos, queremos ser hombres
> (Markusievitch, 1978, p. 206).

En el periodo que nos ocupa hubo numerosos argumentos para justificar las Matemáticas como asignatura fundamental en el currículum escolar y "el convencimiento general de que todos los niños deben estudiar Matemáticas" (Cockroft, 1985, p. 1).

Se revisaron y establecieron los objetivos de su enseñanza asumiendo unas "Matemáticas para todos", entendiendo que aporta una herramienta conceptual necesaria para la participación activa e inteligente en la sociedad contemporánea (Krygowska, 1979). Se asumía que las matemáticas se construyen sobre conocimientos intuitivos y convenciones consensuadas, que no están fijadas para siempre, ya que son una actividad humana desarrollada a partir de experimentos, descubrimientos, conjeturas, y de múltiples problemas no resueltos.

Se consideraban las matemáticas "como un cuerpo utilitario de técnicas y habilidades, pensado y diseñado para satisfacer las necesidades sociales" (D'Ambrosio, 1979, p. 220), permitiendo profundizar en la interacción entre matemáticas y realidad en el doble sentido de resolver situaciones cotidianas con herramientas específicas y modelizar fenómenos sociales. Al mismo tiempo, se incidió en el desarrollo individual significando que la orientación "formativa debe tener prioridad frente a la utilitaria, ya que la mayoría de los alumnos elegirán profesiones desconectadas de la Matemática, pero todos, sin excepción, necesitarán muchas veces de su inteligencia" (Roanes, 1969, p. 14) pudiendo ser útiles para cualquier persona sinceramente interesada (Romberg, 1991).

Se consideraban tres ejes para definir los objetivos de la educación matemática: los aprendices y los procesos mentales que intervienen en el pensamiento matemático, el desarrollo de la propia matemática y, finalmente, suministrar un instrumento para aplicar en la realidad (Gattegno, 1965; Mialaret, 1986). Los objetivos se centraban en el desarrollo de la personalidad del individuo, en su relación con la sociedad y en la propia ciencia Matemática, y se expresaron en términos de conseguir conocimientos y habilidades, intra y extramatemáticas, y subrayando comportamientos sociales como la actitud crítica, la importancia de la comunicación y la participación en una obra colectiva. "Incluso al enseñar matemáticas se puede, por lo menos, tratar de dar a las personas el gusto de la libertad y de la crítica, y habituarlas a verse tratadas como seres humanos dotados de la facultad de comprender" (Godement, 1974, p. 21). Se sugirió un nuevo enfoque hacia la importancia del desarrollo del estudiante y de la actitud de este como eje del sistema educativo, ya que los objetivos señalaban directamente al proceder de los estudiantes.

Se quería superar una enseñanza generada de manera unidireccional del profesor al estudiante, en la idea de lograr un docente que ayude al estudiante a ser responsable de su aprendizaje, lo que implica que la educación matemática tiene que ir más allá de los aprendizajes de los contenidos. Asumiendo la individualidad del estudiante y la diversidad de las aulas, el aprendiz no puede considerarse un saco para llenar de conocimientos, sino que debe responsabilizarse y construir su propio aprendizaje, siendo ayudado por el profesor, en su papel del guía. Esto nos cuestiona, directamente, la cantidad y calidad de los conocimientos a considerar en el currículo.

Su formulación como habilidades básicas (de manipulación, de descubrimiento, de crítica y comunicación y coperación) estarían directamente relacionados con las competencias que se definen en el nuevo currículo. A modo de recordatorio, hacemos una síntesis de los objetivos, propuestos como habilidades, realizadas por la *Association des Professeurs de l'Enseignement Public,* (UNESCO, 1979) y por Mclone (1979), comentados en ambos casos en Dorfler y Mclone (1986) y reflejados en Romberg (1991).

Asumían la importancia de la formulación y resolución de problemas como el proceso básico en la E/A de las matemáticas y la construcción de modelos ante diferentes contextos, familiares y no familiares. A este respecto, señalaban, a modo de objetivos operativos, la importancia de usar herramientas matemáticas y de elegir estrategias adecuadas para analizar y resolver la situación a abordar, predecir resultados y generalizarlos, reconocer situaciones análogas y abstraer lo que tienen en común. Daban importancia a la reflexión durante todo este proceso, en el que la comunicación de ideas y resultados, de forma oral y escrita, era fundamental. Así, consideraban esencial hacerse entender por otros al traducir e interpretar resultados en formas no matemáticas, al utilizar y valorar diferentes sistemas de representación para organizar y comprender la información utilizada y al construir y exponer sus deducciones, simples o complejas. Se pretendía generar nuevo e integrado conocimiento matemático, entendiendo que las matemáticas son un poderoso medio de comunicación. Finalmente, incidían en la importancia de la educación matemática en el desarrollo personal y social al sugerir participar reflexivamente en el desarrollo de la sociedad como una obra colectiva, la cooperación en grupo o tener una actitud crítica, tanto para cuestionar los argumentos matemáticos, propios y ajenos, y los resultados y repercusiones del hacer matemático. Se asumía, en definitiva, que el saber hacer es más importante que el saber.

Paralelamente, se empieza a considerar que el profesor debe entrar en un proceso de actualización permanente que le permita reconsiderar los avances de la ciencia y de la matemática, y los avances sociales que repercuten directamente en las necesidades, cognitivas y afectivas, y los comportamientos de los estudiantes. Por ello, no es casual que en la década de los 80 tuvieran mucha difusión los trabajos de L. S. Shulman, R. Marks, entre otros, sobre el Pedagogical Content Knowledge para caracterizar el conocimiento y desarrollo profesional de los profesores, que han sido objeto de numerosas investigaciones en los grupos de investigación integrados en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Construir el conocimiento matemático y esquemas de acción en el aula

> Somos conscientes de la existencia de profesores que desearían que les señalásemos el método más idóneo para enseñar matemáticas, pero esto no es posible ni deseable. … Debido a la diferencia de personalidad y circunstancias, métodos que pueden resultar eficientes con un profesor o grupo de alumnos, acaso no lo sean tanto en otros casos. Con todo, consideramos que hay ciertos elementos que deben estar presentes en la enseñanza acertada de las matemáticas.
>
> (Cockroft, 1985, p. 87)

En esa época se realizaron propuestas interesantes que, salvando el tiempo, siguen teniendo validez y debieran ser estudiadas en los centros de formación de los profesores. Eran esquemas de acción en las aulas en los que, básicamente, se asumía la epistemología genética y se criticaba el divorcio en la enseñanza tradicional del "proceso de génesis de los conocimientos y el proceso de transmisión de los mismos" (Puig Adam, 1960, p. 104), sugiriendo que el educando debe pasar "un proceso de formación de conceptos análogos al experimentado por la humanidad" (Puig Adam, 1960, p. 105). Se consideraba las Matemáticas como una ciencia que evoluciona constantemente, lo que no se reflejaba en los currículos de los primeros niveles de enseñanza (Mialaret, 1986). Empezaba a considerarse la didáctica de la matemática como arte, como ciencia y como técnica, que va más allá de la simple transmisión de conocimiento, para procurar una huella formativa en el educando, primando el acto de aprender sobre el acto de enseñar y poniendo al aprendiz en el centro de la enseñanza (Puig Adam, 1960).

El proceso de construcción del conocimiento se basaría en dos pilares importantes: la maduración del pensamiento en los estudiantes y la evolución de la propia matemática. P. Puig Adam lo explica muy acertadamente, señalando implícitamente diferentes tareas para la E/A.

> El hombre, en un principio impotente ante la inmensidad de las fuerzas naturales, y atónito ante la complejidad de los fenómenos que a su alrededor se desarrollaban, se limitó a observar y a retener, a comparar y a asociar. En cuanto pudo, experimentó por su cuenta, es decir, promovió fenómenos nuevos en condiciones favorables para su estudio. Coleccionó observaciones y experiencias, y, luego de ordenarlas por afinidades, indujo leyes comunes para fenómenos semejantes. Para descubrir tales semejanzas hubo de abstraer, es decir, hubo de prescindir de caracteres accesorios y atender a los esenciales en cada estudio, con lo cual esquematizó, reduciendo la complejidad de las cosas y fenómenos reales a la sencillez de unos entes de razón que los representaran y sobre los cuales pudieran discurrir cómodamente el razonamiento puro. De este razonamiento, ya en esencia matemática, sacó consecuencias que, proyectadas de nuevo en el campo de la realidad, le permitieron obtener nuevas leyes, esta vez no ya inducidas, sino deducidas de las anteriores; con ellas empezó a predecir resultados de experiencias no realizadas, pudo prevenir, precaverse, defenderse de las fuerzas naturales y conducirlas más tarde, para su provecho. Al hacer tales deducciones y predicciones, el hombre llegaba a la plenitud de su categoría racional; su razón, al convertirse de potencia en acción, le brindaba su primera conquista del mundo natural: el conocimiento científico.
>
> (Puig Adam, 1960, p. 31-32)

Más adelante, señalará que el origen de la matemática no escapa a este proceso genético que es tan experimental como pueda serlo cualquier ciencia.

Asumiendo esta aportación, tiene sentido la afirmación de Romberg (1991) que señala que "las matemáticas son un producto social" (p. 328), al considerar que han sido creadas por humanos a lo largo de la historia, como respuesta a los problemas sociales y contribuyendo al desarrollo de la sociedad. Al asumir que el aprendizaje va más allá de la simple recepción pasiva del conocimiento, la actividad docente priorizará el acto de aprender sobre el de enseñar, poniendo en centro de la enseñanza al alumno.

Ligado a las ideas anteriores algnos autores (Tabla 1) diseñaron acciones para las aulas que irían desde lo concreto a lo abstracto, asumiendo la importancia de la experimentación, observación y análisis y síntesis, así como del lenguaje (oral y gráfico, natural y simbólico) para las acciones físicas y las lógico-matemáticas, en un proceso inductivo/deductivo, donde lo primero predominará en la escuela.

Tabla 1. Algunas etapas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Zoltan Paul Dienes. Dienes (1970a; 1970b).	Describe seis etapas (Adaptación; Estructuración; Abstracción-Juegos de Isomorfismo; Representación gráfica o esquemática y Formalización) y cuatro principios (Dinámico, Constructividad, Variabilidad matemática y Concretización múltiple) que ayudarían a los alumnos en la comprensión de los conceptos matemáticos.
Gaston Mialaret. Mialaret (1986).	Señala seis etapas (Acción real con recuperación; Acción acompañada de lenguaje; Conducta del relato; Acción con objetos simples; Traducción gráfica y Traduccción simbólica).
Dina y Pierre Van Hiele. (Crowley, 1987).	Centrados en la geometría describieron cinco niveles de conocimiento (Reconocimiento o visualización; Análisis; Clasificación o Deducción informal u orden; Deducción y Rigor) y cinco fases de aprendizaje a considerar en cualquiera de los niveles: Discernimiento o información; Orientación Dirigida; Explicitación; Orientación libre e integración.
Guy Brousseau. Brousseau (1997).	Se centra en el contrato didáctico, la noción de obstáculo epistemológico y la teoría de las situaciones didácticas (Situación de acción, de formulación y de validación).

El punto de partida para el aprendizaje será el juego, la acción y el reconocimiento, dando mucha importancia a la relación entre la acción y el lenguaje, ya que la formulación y representación son importantes en la construcción progresiva del conocimiento. "El niño no inventa el edificio matemático, pero lo descubre progresivamente y las diferentes partes elaboradas se estructuran, se reestructuran, en función de los conocimientos ya adquiridos" (Mialaret, 1986, p. 20). Los símbolos y representaciones suministran una materialización sencilla del concepto y, junto con la experiencia en las tareas, le lleva a hacerse una imagen mental que ayudará al aprendizaje y, en algunos casos, la dificultará, y por ello será necesario su consideración en el proceso de E/A. Los trabajos de D. Tall y S. Vinner (Tall y Vinner, 1981) profundizaron sobre la importancia de la imagen del concepto (representaciones internas y externas) e influenciaron numerosas investigaciones, pero no tanto los trabajos en el aula y los libros de texto.

Partir de la experiencia y acción tendrá como consecuencia inmediata la generación de recursos didácticos, muchos de los cuales son valorados por profesores actuales cuando acceden a ellos (Figura 1). A través de los materiales, el aprendiz inspecciona, descubre, construye, genera imágenes y establece semejanzas y variaciones de las situaciones, etc. lo que sugiere un proceso de aprendizaje que su mente debe controlar.

Tabla 2. Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas

Bloques lógicos.	Khote, 1978.
Bloques multibases.	Dienes, 1971a.
Geoplano de C. Gattegno	
Regletas de G. Cuisenaire o números en color de G. Cuisenaire y C. Gattegno.	Gategno, 1962; 1965.
Plaquetas de Herbinière Leber.	Mialaret, 1967.
Varillas engarzadas y articuladas y Algoritmo manipulativo para la raíz cuadrada.	Puig Adam, 1960.
Mecanos.	Biguenet, 1967.
Plegado de papel.	Johnson y Wenninger, 1975.
Recta y Franja numérica; Tarjetas plegables para combinaciones básicas; Cartel numérico del 100	Escalona y Noriega, 1974.

Se asumía que la manipulación era un primer paso motivador para estimular la acción mental de los aprendices sobre los objetos y con los objetos. Después de estas actividades y experiencias manipulativas deberán introducirse de manera progresiva, otros recursos que faciliten la entrada en la abstracción matemática. A este respecto, es interesante observar la validez de estas propuestas en la enseñanza actual (Alsina, 2004).

Aunque, actualmente, lo virtual predomina sobre lo material, reivindicamos los dos caminos (manipulativo y virtual) en la E/A de las matemáticas, pero advirtiendo que la secuencia de aprendizaje es diferente en cada caso. También, la experimentación y análisis de estos materiales debería formar parte de los cursos de formación, inicial y permanente, de profesores de matemáticas.

La resolución de problemas en el currículo

> Hay quien se pregunta si la parte principal del estudio matemático no debe ser la solución del problema en lugar del estudio del libro de texto. Hacer de los problemas un suplemento indica un fallo en la verdadera función del trabajo matemático. Si concedemos que el 'poder' y no el 'saber', el 'pensar' y no el 'memorizar' son los aspectos beneficiosos de la matemática, la importancia de los problemas es indudable.
> (Royo, 1953, 253)

En las propuestas anteriores subyacía la idea de que las matemáticas se han construido a partir de la resolución de problemas concretos que surgían de necesidades de la sociedad y se abordaban con las herramientas matemáticas que se iban conociendo. Así, es fácil entender que algunos autores trasladaran esta idea al ámbito curricular para facilitar la construcción del conocimiento en los estudiantes, asumiendo que la resolución de problemas debía ser el contexto para la E/A de las matemáticas, lo que se plasmará en algunas directrices a partir de los 80 (NCTM, 1980) y cuyo desarrollo ha sido objeto de múltiples aportaciones y reflexiones.

Asumir la resolución de problemas como actividad esencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas implica relacionar los aspectos esenciales de la naturaleza de la disciplina y de sus aplicaciones. Debería, para ello, favorecerse la realización de experiencias de trabajo escolar para que los estudiantes llegaran a dominar conceptos y procesos que se reflejan en distintas situaciones matematizables, para que pudieran ser capaces de pensar matemáticamente, aplicando sus conocimientos matemáticos a otras disciplinas y realidades, sociales y personales. Al mismo tiempo, se señalaban tres perspectivas necesarias y complementarias para la resolución de problemas: como vía para la E/A, como un contenido específico y como aplicación a la realidad. Eran muchas las dificultades para trasladar esta propuesta a la práctica docente y, además, la falta de documentos concretos para facilitar la propuesta sobre la resolución de problemas dificultaba su implementación en el aula (Putnam et al., 1990). Así, por ejemplo, se señalaba la diversidad de significado del vocablo ‘problema’ y la expresión ‘resolución de problemas’, tanto en los diferentes textos escolares como en las concepciones y creencias de los profesores. Era evidente que traducir esta propuesta de acción en el aula a las clases prácticas no iba a ser fácil, y a menudo causa de ansiedad tanto a los estudiantes como a los profesores (NCTM, 1980). Las investigaciones actuales muestran que aún persisten numerosas dudas, preocupaciones y resistencia para desarrollar esta recomendación curricular.

En el XII Simposio de la SEIEM (2008) se analizó el desarrollo de la resolución de problemas en los últimos 30 años, mostrando que su presencia e importancia, como contenido y como metodología, se había mantenido y acrecentado en las propuestas curriculares, tanto nacionales como internacionales, pero ello no acababa de reflejarse de manera clara en la práctica docente. Informes recientes de evaluaciones periódicas desarrollados por diferentes instituciones internacionales muestran, reiteradamente, los pobres resultados obtenidos en Matemáticas e inciden en poner de manifiesto la importancia de la resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza obligatoria. A pesar del camino recorrido y de la importancia que se le da a la RP en el nuevo currículo debiéramos insistir en la formación y desarrollo profesional del profesorado considerando diferentes variables que influyen en su implementación (Blanco et al., 2015).

Sobre los currículos de matemáticas en este periodo

Obviamente, en los 60 y 70 se modificaron los currículos. Romberg (1991) realizó una crítica oportuna al currículo anglosajón, válida en nuestro entorno, señalando que la limitación del contenido de las matemáticas escolares originó que la administración educativa hiciera una clasificación jerárquica del conocimiento matemático, fragmentando y secuenciando las ideas matemáticas, con el objetivo de que los estudiantes dominaran secuencialmente uno tras otros diferentes conceptos o procedimientos. Señaló que las matemáticas

> Se segmentaron en materias y temas y finalmente en sus componentes mínimos (objetivos procedimentales). Se estableció una jerarquía para demostrar cómo se relacionaban estos objetivos para crear finalmente un producto acabado. Se mecanizaron los pasos que se daban en este proceso mediante libros de texto, hojas de ejercicios y pruebas. Además, se deshumanizó la enseñanza hasta el punto de que el profesor poco tenía que hacer excepto dirigir la cadena de producción.
>
> (Romberg, 1991, 361)

Ello provocó una división de las matemáticas en múltiples compartimentos estancos que se enseñan independientemente de los demás, lo que llevó a un orden parcial de la disciplina, perdiendo el carácter global de la materia.

El currículo presentaba las matemáticas escolares como un sistema unificado y cerrado que contiene un producto ya desarrollado y elaborado. En este marco, tenía plenamente sentido una concepción conductista de la enseñanza, en la que el papel del profesor es el de transmisor del conocimiento (‘yo doy matemáticas’), que el estudiante recibirá y mostrará cuando se lo piden en los exámenes, (aunque digamos evaluación). El papel de los estudiantes será a menudo rutinario y pasivo, permitiéndole continuar su progresión, y a la administración mantener el sistema. Esta perspectiva obvia la recomentación de que “conocer matemáticas es hacer matemáticas” (Putnam et al., 1990, p. 62).

Gaulin et al. (1992) analizaron los currículos iberoamericanos del último tercio del siglo XX de los que decían que no recogían los aspectos socioculturales, psicopedagógicos y epistemológicos que deben condicionar y fundamentar la enseñanza/aprendizaje, por lo que recomendaron su revisión. Percibían una visión excesivamente cerrada y fija de la matemática, basada en la estructuración y en la organización lógico-deductiva que hizo de esta ciencia la llamada matemática moderna, y no como un proceso en el que los sujetos van construyendo el sentido y el significado de sus propios aprendizajes, a la vez que adquieren estrategias de pensamiento cuyo alcance va más allá de los conceptos o de los procedimientos asimilados. Los autores, consideraban simplista la concepción de la E/A basada en la transmisión de conocimientos descontextualizados, deductivamente ordenados y desconectados de su evolución histórica, y que el estudiante aprende mediante una práctica rutinaria y memorística.

Es interesante recordar, por la relación que pudiera tener con el uso de los sentidos matemáticos en el currículo actual, la aportación de Guzmán (1992) en relación con la complejidad de la actividad matemática proveniente del uso numérico y del espacio, así como la necesidad de enfrentar la complejidad del símbolo (álgebra), la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo), la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad y estadística) y la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

A modo de epílogo

A finales del siglo XX muchas de las ideas renovadoras se plasmaron en currículos en numerosos países. También en España la Ley General del Sistema Educativo (LOGSE) supuso un cambio en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y sus ideas básicas siguen teniendo significado actualmente, pero ello no es objeto de este capítulo.

La revisión anterior nos sugiere, en primer lugar, que la acción docente debe contemplar, simultáneamente, el desarrollo de los términos ‘educación’ y ‘matemáticas’, que al igual que los vocablos enseñanza y aprendizaje son diferentes, pero complementarios e interaccionan entre sí. Dado el significado de educar como preparación para la vidad, el resultado de la unión de ambos vocablos vendrá condicionado por el tipo de ciudadano que queremos preparar, por la sociedad que deseamos construir y, también, por la concepción que tengamos sobre la naturaleza y el uso de las matemáticas. Las matemáticas son una herramienta creada por hombres y mujeres que debe ser utilizada para comprender y mejorar el mundo, como nos muestra el sentido de evolución y de interacción con la sociedad que el conocimiento matemático ha tenido desde su origen. La educación - matemática no puede ser neutral a los valores que deben prevalecer en nuestra sociedad como son la participación en la vida social, cultural, política o económica, la capacidad de decisión de crítica, la creatividad, la coeducación y la solidaridad. En definitiva, al desarrollo integral de todos los ciudadanos independientemente de su nivel social, raza, religión sexo o cualquier otra circunstancia personal o social.

No debemos olvidar que como educadores nuestra misión es preparar a los escolares para adaptarse e intervenir en la sociedad del siglo XXI, para desenvolverse con comodidad y eficacia en el entorno con el que se van a encontrar al terminar el período escolar. A este respecto, es necesario entender que los actuales estudiantes de educación obligatoria alcanzarán la madurez más allá del 2040, y a partir de esa fecha será cuando tengan que utilizar sus conocimientos, habilidades y competencias adquiridas en el periodo escolar, como ciudadanos activos en la segunda mitad del siglo XXI. Siguen siendo válida las palabras de L. A. Santaló en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática en 1984.

> La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo que tendrán que vivir. Impartir las enseñanzas necesarias para que adquieran las destrezas y habilidades que van a necesitar para desenvolverse con comodidad y eficiencia en el seno de la sociedad con que se van a encontrar al terminar el periodo escolar.

Referencias

Aleksandrov, A.D. (1973). Visión general de la Matemática. En A. D. Aleksandrov; A. N. Kolmogorv; M. A. Laurentie, *La Matemática: su contenido, método y significado*. Alianza.

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años.* Narcea.

Álvarez, R. y Blanco, L.J. (2015). Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º ESO. *Revista Unión 42,* 133-149.

Barrantes, M. y Blanco, L, J. (2006) A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education 9, (5).* 411-436

Biguenet, A. (1967). Modelos animados para la enseñanza de la geometría. En Gattegno, C. et al. *El material para la enseñanza de las Matemáticas.* Aguilar. 147-165.

Blanco, L.J.; Cárdenas, J.A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria.* Serv. Publ. UEx.

Bombal, F. (2011). Nicolás Bourbaki: El matemático que nunca existió. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Vol. 105, nº 1,* p. 77 – 98.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Castelnuovo, E. (1999). La matemática escolar en este siglo. Marín, F. y Ramellini, G. (2004). *Ideas de emmatemática Castelnuovo*. Monografía 01 SUMA. FESPM. 51-60.

Cockroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft.* M.E.C.

Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thoght. En M. M. Lindquist. y A. P. Shulte, (eds.). *Learning and Teaching Geometry, K-12. Yearbook-1987.* NCTM. 1-16.

D'Ambrosio, U. (1979). Metas y objetivos generales de la educación matemática *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. UNESCO. 205-226.

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Ed. Teide.

Dienes, Z.P. (1971a). *Cómo utilizar los bloques multibase.* Teide.

Dienes, Z.P. (1971b). *Las seis etapas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Ed. Teide.

Dorfler, W. y Mclone, R. R. (1986). Mathematics as a school subject. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte, *Perspectives on Mathematics education* Reidel Pub. Co. 49-97.

Escalona, F. y Noriega, M. (1974). *Didáctica de las Matemáticas en la escuela primaria 1*. Kapelusz.

Gattegno, C. (1962). *Elementos de matemática moderna con los números en color. Manual para el Maestro.* Cuisenaire de España.

Gattegno, C. (1965). La pedagogía de las matemáticas. En J. Piaget. *La enseñanza de las Matemáticas.* Aguilar. 133-181.

Gaulin, C; Guzmán, M.; Lluis, E. y Oteiza, F. (1992). *Análisis comparado del currículo: Matemáticas en Iberoamérica.* Mare Nostrun Ediciones.

Godement, R. (1974). Curso de Álgebra. Tecnos.

Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpiada Matemática Argentina, Buenos Aires.

Hernández, J. (1978). *La enseñanza de las Matemáticas modernas.* Alianza Universidad.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T y Palacios, A. (2013). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas Mellado, V; Blanco, L.J.; Borrachero, A.B. y Cárdenas, J.A. (Eds.): *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas*. DEPROFE. Vol.1. 217-242.

Johnson, D. A. y Wenninger, M. J, (1975). *Matemáticas más fáciles con manualidades de Papel.* Ediciones Distein.

Khote, S. (1978). *Cómo tulilizar los bloques lógicos de Dienes.* Teide.

Kline, M. (1978). *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI.

Krygowska, A.(1979). Educación matemática en el primer ciclo de la enseñanza post-elemental y secundaria. En ICMI. *Nuevas tendencias en la enseñanza de las Matemáticas.* UNESCO. 29-49.

Malaty, G. (1988). What is wrong with the 'back to basics' movements, and what is wrong with the 'new math' movement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol.19, (1)*. 57-65.

Markusievitch, A. (1978). Algunos problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela. En J. Hernandez, *La enseñanza de las Matemáticas modernas.* Alianza. 196-207.

Mclone, R.R. (1979). Teaching mathematical modeling. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its applications 15*. 244-246.

Mialaret, G. (1967). *Pedagogía de la iniciación al cálculo*. Kapelusz.

Mialaret, G. (1986). *Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Visor. 2da. Ed.

National Council of Teacher of Mathematics (1980). *Problem solving in school mathematics. 1980 Yearbook*. The Council.

Newman, J. (1963). *Sigma. El mundo de las Matemáticas.* Grijalbo.

Piaget, J. (1965). *La enseñanza de las Matemáticas*. Aguilar,

Piaget, J. (1978). La iniciación matemática. Las Matemáticas modernas y la psicología del niño. En J. Hernandez, *La enseñanza de las matermáticas modernas*. Alianza Universidad. 182-187.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y Método.* Madrid. Espasa Calpe (Austral).

Puig Adam, P, (1960). *La matemática y su enseñanza actual.* Ministerio de Educación Nacional. Madrid.

Putnam, R.T., Lampert, M. y Peterson, P. L. (1990). Alternative perspectives on knowing Mathematics in elementary schools. En C. B. Cazden, *Review of research in education, 16. AERA.* 57-150.

Roanes, E. (1969). *Didáctica de las Matemáticas I.* Anaya.
Romberg, T.A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas. *Revista de Educación, nº 294.* MEC. 323-406
Royo, J. (1953). Los problemas de Matemáticas en la escuela. *Bordón 35,* 247-255.
Schoenfeld, A.H. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas". MEC. *La enseñanza de la Matemática a debate*. MEC. 25-30.
SEIEM, (2008). *Actas del XII Simposio de la SEIEM, XISIEM y XVIII EIEM.* 93-111. SEIEM.
Stone, M. (1978). La revolución en las matemáticas. En J. Hernández. *La enseñanza de las Matemáticas modernas.* Alianza Universidad. 73-98.
Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Thom, R. (1978). ¿Son las Matemáticas modernas un error pedagógico? En J. Hernández, *La enseñanza de las Matemáticas modernas*. Alianza Universidad. 115-130.
UNESCO (1979). *Nuevas tendencias en la enseñanza de las Matemáticas* ICMI. UNESCO.https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000136589/PDF/136589spao.pdf.multi