Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Considerations about the teaching and learning of mathematics

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L.C.
Centro de Investigación COIDESO, Universidad de Huelva

Resumen

En este capítulo presentamos una perspectiva fundamentada desde la que entendemos que se debería interpretar una nueva propuesta curricular de las matemáticas de la enseñanza obligatoria. Muchas de las ideas que exponemos aquí no son nuevas; años de reformas curriculares y la propia investigación en educación matemática han puesto de relieve muchas de ellas, en muchos casos recogidas en las propuestas oficiales, pero la realidad de las aulas no permite verlas convertidas en acción. En el capítulo volvemos a ponerlas sobre la mesa, justificamos su necesidad, e intentamos reflexionar sobre los elementos que dificultan su puesta en marcha focalizando el papel de sus mediadores principales. Las peguntas clave que guían nuestra reflexión son qué deberían ser las matemáticas escolares y por qué hemos de enseñar matemáticas.

Palabras Clave: Currículo, Orientación de matemáticas escolares, Práctica matemática, Cambios en el paradigma dominante.

Abstract

In this chapter we present an informed perspective from which we understand that a new curricular proposal for mathematics in compulsory education should be interpreted. Many of the ideas we present here are not new; Years of curricular reforms and research in mathematics education itself have highlighted many of them, in many cases included in official proposals, but the reality of the classroom does not allow them to be turned into action. In the chapter we put them back on the table, we justify their need, and we try to reflect on the elements that hinder their implementation, focusing on the role of their main mediators. The key questions that guide our reflection are what school mathematics should be and why we should teach mathematics.

Keywords: Syllabus, Orientation of school mathematics, Mathematical practice, Change in the dominant paradigm.

Introducción

En un libro en el que se aborda de forma extensa el currículo y sus concreciones en cada uno de los niveles educativos de la enseñanza no universitaria, parece adecuado mostrar al lector la perspectiva general de lo que entendemos por enseñar y aprender matemáticas, sin entrar en detalle en los contenidos específicos que formarán parte de esa enseñanza y aprendizaje. Este es el lugar para abordar los elementos atemporales de los estándares curriculares, aquellos que se mantienen permanentes frente a los profundos cambios que la sociedad va teniendo a lo largo del tiempo. Nos situamos ante un momento en el que el acceso a la información por parte de los estudiantes es más fácil que nunca, en el que es más importante discriminar que almacenar, más útil disponer de estrategias de pensamiento flexible que estrategias mecánicas y rutinarias (Levy y Murnane, 2012); una era en la que los medios tecnológicos están al alcance de todos y se hace necesario utilizarlos en la formación. Siempre ha sido más necesario formar para adaptarse a situaciones nuevas, que focalizar la formación en lo contingente y coyuntural, y ese será el enfoque de este capítulo.

Trataremos de reflexionar acerca de lo que se ha denominado la agenda de la educación matemática a lo largo de la vida, en la que el pensamiento crítico[1], la capacidad de plantear y resolver problemas, las estrategias de trabajo colaborativo y la capacidad de comunicación ocupan un lugar prominente (Gravemeijer et al., 2017). Naturalmente, esta reflexión pasa por tener en cuenta no solo el *qué* es necesario aprender, sino también y principalmente *cómo* debe abordarse ese aprendizaje (Wagner, 2014). La propia naturaleza que tienen las matemáticas escolares depende de las opciones que toma el profesorado acerca de qué y cómo deben enseñarse, de cómo secuenciar los contenidos y de cómo evaluarlos (Ernest, 2000). Por ello, el papel del profesorado, como uno de los mediadores esenciales en el aprendizaje, debe formar parte de nuestra reflexión. En este sentido, parece razonable pensar en aulas como espacios de trabajo de diferentes características a lo que hoy es usual, otorgando importancia a las estrategias personales de cálculo, contextualizando el contenido en problemas realistas relacionados con la biología, la física o la ingeniería (Mills, 2012).

Por ello, este capítulo abordará aspectos generales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva del momento que nos ocupa. No entraremos en detalle en los contenidos específicos del currículo, pero sí en los elementos que, desde nuestra perspectiva, caracterizan lo que significa construir matemáticas. Y lo haremos comenzando con una reflexión retrospectiva de otros momentos en los que la educación matemática se ha planteado estas mismas cuestiones. Ello nos llevará a plantear qué son o qué deberían ser las matemáticas escolares y, unido a ello, argumentaremos después razones para la presencia de las matemáticas en la enseñanza

1. Hoyles et al. (2013) muestran cómo las enfermeras son más eficientes cuando usan estrategias personales, que lo aprendido en razonamiento proporcional, cuando ajustan una dosis de medicamento.

obligatoria. Trataremos después el papel de los mediadores en el aprendizaje, los vehículos entre lo pretendido y lo que se hará en las aulas, y cerraremos con unas reflexiones finales que recogen nuestras inquietudes ante este reto.

Por qué nos volvemos a preguntar sobre esto cada cierto tiempo

No es la primera vez que nos encontramos con un escenario internacional en el que se reflexiona acerca de lo que debe constituir el contenido matemático a desarrollar en las aulas de la educación obligatoria. Desde hace décadas, y de forma cíclica, este planteamiento ocupa el trabajo de docentes, investigadores y responsables políticos de distintos países, casi siempre provocado por lo que se ha venido en llamar "fracaso escolar" en matemáticas. Es bastante improbable que esto ocurriera si la mayoría de los estudiantes, de la mayoría de los países, mostrara un alto rendimiento académico en nuestra materia. Afortunadamente, cada período de catarsis ha venido acompañado de sustanciosos progresos que han emergido desde el ámbito académico. Por citar uno, particularmente relevante, recordemos las aportaciones de la investigación en resolución de problemas desde mediados del siglo pasado.

Casi siempre, los estándares curriculares han recogido esas aportaciones académicas, sin embargo, los argumentos que sustentan el comienzo de cada uno de estos ciclos parecen ser los mismos. Así, siguiendo con el ejemplo de la resolución de problemas, de forma periódica volvemos a encontrar argumentos que ponen de relieve que las recomendaciones de su uso no se han convertido en una realidad en las aulas. Podríamos indagar si las razones de que eso haya sido así se deben a la forma piramidal que sustenta la aplicación de cada reforma curricular, a la ausencia o insuficiencia de la implicación de las reformas en la formación y desarrollo profesional de los y las docentes o a otros motivos. Sin embargo, la reflexión que guiará este capítulo no pondrá el énfasis en esos aspectos y sí lo hará, empero, sobre la propia filosofía, estructura y organización de lo que supone el contenido matemático escolar.

Por ejemplo, nos quejamos de que la matemática escolar se presenta como algo terminado, desde una perspectiva fundamentada en el contexto de justificación, en el más puro estilo platónico, difícilmente compatible con el contexto de descubrimiento (que defendiera Reichenbach, 1938), de corte más aristotélico, y que podría decirse que sustenta la resolución de problemas o el aprendizaje por investigación. Y es en realidad su bella estructura la que domina una organización curricular sustentada en temas o tópicos, en bloques de contenido, que proporcionan una visión de compartimentos estancos a cualquiera que no posea una visión integrada de lo que supone, de hecho, la rica red de relaciones que da consistencia a las matemáticas como ciencia. Y esa visión parcelada, algunas propuestas curriculares han pretendido superarla con llamadas a que los bloques de contenido no son un temario, sino más bien algo que admite transversalidad, pretensiones claramente insuficientes.

¿Y si el problema radicara justamente en esto? ¿Son las matemáticas esos bloques de contenido? ¿Dónde quedan el planteamiento y resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la validación, la generalización, la modelización, entre otras capacidades netamente matemáticas? ¿Tienen los contenidos un fin en sí mismos o pueden servir de vehículo para lo anterior? ¿Se soluciona el dilema considerando declarativamente esos aspectos como transversales o caracterizadores de la metodología, o deben ser realmente los organizadores del currículo?

Un cambio en la visión de la matemática escolar

Las matemáticas, más allá de un conjunto estructurado de elementos, reglas, propiedades y procedimientos, son (o al menos deberían ser consideradas como) un derecho de nacimiento para todos los seres humanos, con independencia de su género, etnia, grupo social, o estatus socioeconómico, de la misma forma que lo es el lenguaje. Esta visión es compartida con el informe del CEMat (2021), que plantea que las matemáticas son una actividad humana, indispensable para la sociedad, lo que implica que toda la ciudadanía tiene el derecho de acceder a ella. Actualmente, las matemáticas tienen una función de filtro social, dado que discriminan, en muchos casos, a los niños a los que se hace sentir que tienen menos capacidad, abocándolos a evitarlas. Una implicación inmediata de esta segregación es que los estudiantes pierden el acceso a estudios que desembocan en profesiones bien remuneradas (e.g. ingenierías). Además, las matemáticas permiten mirar el mundo con sentido, y negar esta mirada a ciertos colectivos de estudiantes supone imponer una limitación a su desarrollo como ciudadanos: ¿quién no ha oído alguna vez a una persona ya adulta decir algo similar a "yo estos números no los entiendo, soy de letras"?

Esto sucede, en muchos casos, debido a que se da al alumnado el papel de sujeto pasivo en la construcción de conocimiento matemático, debiendo replicar aquello que sus docentes hacen, y no permitiéndoles empoderarse como sujetos matemáticamente activos. De esta forma, y dado el énfasis profundamente procedimental que suele darse a las matemáticas, se les limita la capacidad de crítica, discusión y ulterior reconstrucción del propio conocimiento matemático. En este sentido, aunque el propio currículo español (al igual que la mayoría de los estándares curriculares) establece que la enseñanza de las matemáticas debe realizarse *a través* de la resolución de problemas, es habitual que esto se interprete como que en las asignaturas de matemáticas debe enseñarse *a* resolver problemas. Asimismo, dado el amplio uso que se hace de los libros de texto (en muchos casos como único material curricular), cabe plantearse qué problemas proponen estos que resuelvan los y las aprendices. Diversas investigaciones (e.g. Jäder et al., 2020) muestran que existe una escasa variabilidad en los problemas que proponen los libros, por lo que, en cierto modo, el objetivo de la escolarización, respecto de los problemas, acaba convirtiéndose en saber resolver determinados tipos de problemas, con una estructura determinada (los comúnmente llamados "problemas tipo").

Así, emergen de forma recurrente cuestiones como qué contenidos deben priorizarse, o la habitual dicotomía entre poner el énfasis en lo procedimental, o en lo conceptual. Estas discusiones redundan, como hemos señalado, en una visión de las matemáticas centrada en contenidos matemáticos tratados como compartimentos estancos, frente a visiones que la tratan como una red estructurada de conceptos. Sin embargo, consideramos que este tipo de visión sobre la matemática escolar debe trascender, de forma que pasemos de una visión centrada en los temas o su organización, a fijarnos en la actividad matemática como centro de atención en la organización del currículo, asumiendo la existencia de elementos profundamente interrelacionados dentro de esa actividad, incluyendo aspectos locales, estructurales, y sintácticos, así como otros con una naturaleza transversal a la actividad matemática escolar. En este sentido, Kilpatrick et al. (2001) proponen una visión de la matemática escolar, centrada en primaria, pero extensible a cualquier nivel de educación obligatoria, que trasciende la polarización sobre un elemento concreto propio de la actividad matemática. Desde esta perspectiva, el desarrollo de habilidades matemáticas implica cinco componentes interrelacionadas e interdependientes: Entendimiento conceptual, asociada a la comprensión de conceptos matemáticos, operaciones, y relaciones entre los anteriores; Fluidez Procedimental, centrada en la habilidad para desarrollar procedimientos de forma precisa, eficiente, apropiada y flexible; Competencia Estratégica, entendida como la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos; Razonamiento adaptativo, esto es, la capacidad de pensamiento lógico, reflexión, explicación, y justificación, y; Disposición Productiva, que consiste en la inclinación hacia percibir las matemáticas como sensible, útil y valiosa, que lleva aparejada la autopercepción sobre las propias capacidades, así como la gestión de emociones. Estas cinco componentes deben ser atendidas y desarrolladas sin privilegiar una sobre otra, dado que un menor desarrollo de cualquiera de ellas generaría un alumnado matemáticamente disfuncional. Sin embargo, la habitual dicotomía en el discurso sobre la matemática escolar se centra en los dos primeros, dado que suelen ser los elementos más explícitos en el quehacer matemático que se invita a desarrollar a los estudiantes.

Desde nuestra perspectiva, y coincidiendo con Noss (1989), lo que tiene mayor impacto en el aprendizaje es la forma en la que se pretende que aprendan, y no lo que se pretenden que aprendan. Esta “forma” incluye tanto aspectos vinculados a cómo el profesorado gestiona el discurrir de la sesión, que son los que vienen dados por las orientaciones curriculares, como elementos matemáticos que estructuran la orientación de la actividad matemática del aula, que son los que habitualmente se relacionan con el contenido curricular. Así, proponemos un enfoque del currículo no reproductivo, sino centrado en la creación de matemáticas (Ernest, 1991), que múltiples resultados de la investigación demuestran que promueve un pensamiento no sólo más complejo (Schoenfeld, 1985; Silver, 1994; Lehrer y Schauble, 2000; Bills et al., 2006; Mariotti et al., 2018; Hanna, 2020), sino también más adaptado a las características del aprendiz (e.g. en dinámicas de formulación de problemas matemáticos). Este tipo de enfoque no sólo permite que el profesorado promueva una participación activa de los estudiantes en las sesiones, sino que, además, la participación de los estudiantes se torna en matemáticamente activa, permitiéndoles por tanto empoderarse matemáticamente, es decir, ganar poder en el dominio del lenguaje matemático, de los conceptos y estructuras conceptuales disciplinares, así como de las habilidades y prácticas propias de las matemáticas (Ernest, 2002).

Por tanto, proponemos organizar el currículo no en función de los clásicos bloques de contenido, que acaban tratándose como estancos en la práctica escolar, sino en función de las destrezas transversales que permiten construir y crear matemáticas, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices. Esta propuesta refleja una concepción dual de las matemáticas, siendo tanto como conjunto estructurado de elementos, reglas, propiedades y procedimientos, como una serie de prácticas matemáticas a desarrollar por parte de los estudiantes. Estas prácticas abarcan, entre otras, la *resolución de problemas*, la *formulación de problemas*, la *ejemplificación*, la validación y la refutación como forma de *demostración* y *argumentación*, la *modelización*, la *generalización*, o la *comunicación matemática*. Todas ellas son transversales a los bloques de contenido, e implican destrezas a ser desarrolladas por parte del estudiantado, así como orientaciones metodológicas a ser seguidas por el profesorado.

El ser humano se desarrolla, tanto a nivel individual como a nivel colectivo, formulando y resolviendo problemas adaptados a su interacción con la sociedad y el entorno. En particular, la resolución de problemas matemáticos es, desde hace más de treinta años, un eje vertebrador de los documentos curriculares tanto españoles como internacionales, como ya hemos señalado. Cualquier problema, independientemente de si es escolar o no, y si lo fuera, de forma independiente del contenido o contenidos a los que pueda estar vinculado, requiere de transitar, y no de forma necesariamente lineal, por las fases propuestas por Polya (1945): comprender el problema, desarrollar planes para dar respuesta al requerimiento que este plantee, ejecutar dichos planes, y revisar la resolución, tanto para buscar soluciones por otros caminos, como para buscar extensiones del problema. Asimismo, en los últimos años se ha dado valor a una quinta fase de revisión metacognitiva, centrada en que el resolutor se autoevalúe en su gestión de la resolución a nivel emocional (Caballero, 2013). Así, aprender resolviendo problemas contribuye al desarrollo, por parte de los estudiantes, tanto de habilidades matemáticas, como de una actitud ante el desafío que propone un problema. Asimismo, resolver problemas implica movilizar el conocimiento que se posee y (re)organizarlo para enfrentarse a una situación nueva, lo cual implica desarrollar las propias capacidades matemáticas. Por otra parte, formular problemas supone una actividad genuinamente matemática, que exige al formulador articular la información que se proporciona, un contexto que tenga sentido y una demanda o requerimiento, habitualmente en forma de pregunta, todo ello en el seno de un determinado entorno matemático que dará sentido a la resolución. Esta actividad, si bien es cognitivamente compleja (Silver, 1994), promueve el aprendizaje de las matemáticas de forma integral, abarcando aspectos conceptuales, procedimentales, y dotando al aprendiz de un papel matemáticamente activo.

La *ejemplificación*, por su parte, es una actividad humana esencial. Nos comunicamos esencialmente usando ejemplos. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esta actividad ha de ocupar un papel relevante. Los conceptos y procesos matemáticos adquieren poder en la medida que son dotados de significados ricos y esa riqueza puede vincularse a los espacios de ejemplos que se construyan en torno a esos conceptos y procedimientos. Hay dos aspectos básicos a considerar en el ámbito de la ejemplificación: la transparencia y la variación. Los espacios de ejemplos que han de construir los estudiantes han de contemplar todas las dimensiones de variación de un concepto o procedimiento y, para ello, es preciso que cada una de las dimensiones se muestre, frente a las demás, de forma transparente. Imaginemos que queremos que un estudiante de Primaria construya el concepto de cuadrilátero para que sepa reconocer cualquier representante de este concepto a través de sus características o propiedades. Es necesario identificar ese elenco de características (longitud de los lados, valores de sus ángulos, paralelismo o posición relativa de sus diagonales) de forma que los ejemplos que vaya construyendo generen imágenes mentales potentes vinculadas a cada una de esas características, centrando la atención en cada momento en una de ellas para relacionarlas después.

La capacidad de ejemplificar está también vinculada a la capacidad de demostrar y de definir. Un estudiante ha de conocer el poder limitado de un ejemplo a la vez que reconocer el poder de un buen contraejemplo para refutar una conjetura. La práctica matemática, esencia del proceso de construcción del conocimiento matemático, suele tener un papel retórico en las diversas propuestas curriculares. Saber definir, comprendiendo las características críticas de una definición para permitir una clara diferenciación del ente matemático que se define, saber elegir una forma de validar o refutar lo que se conjetura, saber elaborar argumentos para estos procesos y saber utilizar los elementos básicos del lenguaje matemático para comunicarlo, son herramientas fundamentales a desarrollar en las aulas si realmente apostamos por una construcción efectiva del conocimiento por nuestros estudiantes, y estas herramientas requieren entrenamiento. Bass (2007) nos muestra cómo niños de Primaria abordan cuestiones matemáticas elementales con prácticas matemáticas que trascienden los tradicionales bloques de contenido y cómo una básica discusión acerca de conjeturas sobre paridad de suma de números de igual o diferente paridad puede alcanzar altas cotas conceptuales, pasando de la aritmética módulo 2 a la aritmética módulo 4, por ejemplo.

Estos dos ejemplos, la resolución y formulación de problemas y la ejemplificación, evidencian el enorme poder que tiene una aproximación basada en prácticas matemáticas para el aprendizaje. Así, tiene sentido, desde esta perspectiva, asumir una organización del currículo transversal a los tradicionales bloques de contenido, de forma que las diferentes prácticas matemáticas vehiculen el aprendizaje de los conceptos para dar lugar a estudiantes que no sólo posean conocimiento matemático, sino que, además, sepan qué hacer con él. Aquí se han desarrollado dos de estas prácticas matemáticas, y se han mencionado otras cuatro, que podrían constituir una primera aproximación a estos organizadores del currículo.

¿Para qué enseñamos matemáticas?

Ernest (2000) dice que una respuesta a esta pregunta está condicionada a tres principios. El primero de ellos se refiere al hecho de que las matemáticas escolares están estrechamente vinculadas a valores sociales y culturales, por tanto, es preciso reconocer la multiplicidad de matemáticas que ello implica. El segundo principio está determinado por el sesgo que el valor utilitarista ha concedido a las matemáticas, aportando una sobrevaloración implícita de su papel en los currículos y una visión opuesta al sentido para el que surgieron, como constructo humano, hace miles de años. El tercer principio, de alguna forma vinculado al primero, establece que los objetivos de la enseñanza de las matemáticas no pueden enunciarse fuera del contexto social en el que se realizan. El primero de estos principios nos invita a pensar en un currículo adaptativo, lo que no está en la línea de estándares universales; el segundo sugiere buscar respuestas en los orígenes del conocimiento matemático, en los que la sistematización de los métodos y problemas matemáticos llevó a la creación de la matemática como disciplina académica (Høyrup, 1987); el tercero nos conduce a la necesaria revisión de lo tradicionalmente admitido como objeto de enseñanza y su reorientación hacia elementos curriculares atemporales.

Desde estos principios, las matemáticas escolares tienen que considerarse como un instrumento al servicio de la ciudadanía, como un conjunto de herramientas para explorar la realidad, para representar e interpretar datos empíricos y para efectuar predicciones, de ahí que actividades que fomentan la resolución de problemas, la búsqueda de analogías, la formulación de conjeturas y la generación de estrategias o técnicas deben ser sus elementos vertebradores, contribuyendo a que aspectos coadyuvantes del desarrollo del pensamiento humano, como son el razonamiento deductivo y la curiosidad por plantear y resolver problemas, sean sus generadores. Unido a ello, sigue teniendo vigencia la respuesta dada desde el informe Cockcroft (1985), que justificaba su presencia curricular sobre la base de su consideración como poderoso medio de comunicación, universal (CEMat, 2021), conciso y libre de ambigüedades, que nos permite representar, explicar y predecir.

Compartimos una “concepción global del currículo, más allá de los contenidos, [que] nos permite también mirar las matemáticas desde un punto de vista superior … [señalando] la existencia de las denominadas grandes ideas matemáticas … que vertebran estos contenidos en niveles superiores y permiten apreciar la continuidad y las conexiones intra matemáticas” (CEMat, 2021, p. 5).

Esta forma de caracterizar el currículo matemático no es nueva, aunque ha ido ganando fuerza en las reformas de los últimos años. Nos parece que, antes de proseguir, merece la pena hacer una revisión de los elementos transversales de los últimos estándares curriculares.

Las matemáticas en el currículo

En los últimos treinta años hemos vivido en España seis cambios en las leyes de educación. No todos han tenido un impacto directo en los currículos, pero al menos tres de ellos, sin contar con el último que aún está en proceso de implantación, han supuesto modificaciones que no han mutado la esencia de cómo se entiende la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas e igualmente, no han provocado cambios significativos en el modo de desarrollar el currículo en las aulas, como veremos a continuación.

La Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), aprobada en el 1990, es la que introdujo la estructura actual de tres niveles educativos: Infantil, Primaria y Secundaria, incluyendo este último la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), el Bachillerato y los ciclos formativos. Después de ella han sucedido la Ley Orgánica de Participación, Evaluación y Gobierno de los centros docentes, o LOPEG, de 1995, la Ley Orgánica de Calidad de la Enseñanza, o LOCE, de 2002, Ley Orgánica de la Educación, o LOE, del 2006, Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, o LOMCE, del 2013 y la actual Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación, o LOMLOE, del 2020. Amén de la impronta que en estas leyes han supuesto las diferentes tendencias políticas que han ostentado el poder, en este punto queremos destacar los elementos que han permanecido invariantes, total o parcialmente, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aquello que está asociado a la estructura de las matemáticas y a un modo de entender su enseñanza y aprendizaje.

Los distintos currículos se han organizado en torno a bloques de contenido que, en general, rigen la estructura de los libros de texto en las etapas educativas de Primaria y Secundaria, con la consiguiente influencia en el aprendizaje cuando el libro de texto es el principal recurso que emplea el profesorado en el aula. Sin embargo, se reitera la idea, que más tarde se concretaría en las competencias, de que las matemáticas se deben aprender de forma integrada, no solo formando parte del aprendizaje de otras áreas de conocimiento, sino de las propias áreas dentro de la matemática, que son las que se inducen los bloques de contenido de los currículos.

La resolución de problemas es el eje que guía, curricularmente, cómo se debe enseñar y cómo se debe aprender la matemática en Educación Primaria y Secundaria, pero su papel en el currículo ha variado ligeramente según las diferentes leyes. Si nos remontamos a finales del siglo pasado, en el currículo de la LOGSE de la etapa de Primaria la resolución de problemas ya se presenta como el contexto en el que deben enseñarse los contenidos matemáticos, haciendo mención explícita a la necesidad de vincular estos contenidos con el entorno del alumnado y al papel utilitario de la matemática por su "posibilidad de abstracción, simbolización y formalización" (Real decreto 1344/1991, p. 31). En este currículo organizado por contenidos, procedimientos y actitudes, se indica que las matemáticas deben atender a tres objetivos sin prevalencia por parte de ninguno de ellos: formativo, funcional e instrumental. En las subsiguientes leyes, esos objetivos se mantienen, aunque el modo de organizar el currículo no se haya mantenido constante en cada uno de ellos: objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación en la LOE; competencias, contenidos, resultados de aprendizaje, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la LOMCE; y de nuevo objetivos, competencias, contenidos y criterios de evaluación (en el caso de la formación profesional se incluyen los resultados de aprendizaje) en la reciente LOMLOE.

Los currículos aprobados en los más recientes reales decretos han compartido una visión del aprendizaje a partir del desarrollo de competencias. En el caso de las matemáticas, coinciden también en la razón por la que su aprendizaje es necesario para todos los individuos y en el papel de la resolución de problemas como motor de ese aprendizaje, con lo que ello implica. A pesar de ello, tradicionalmente el currículo se ha desarrollado en las aulas centrado en el listado de contenidos, sin apenas integración de las diferentes áreas de la matemática, cuanto menos de otras áreas de conocimiento, y de forma secuencial, contrario al carácter holístico que promueven los currículos.

De manera explícita, en los diferentes currículos se alude a la necesidad de listar contenidos, junto con estándares de aprendizaje o criterios de evaluación, según el caso, como forma de mostrar los contenidos que se deben trabajar en cada ciclo en un contexto de resolución de problemas. Hablar de enseñar a través de la resolución de problemas, no de enseñar a resolver problemas, conlleva asumir el desarrollo de múltiples destrezas matemáticas, la integración de distintos elementos de las matemáticas y el trabajo interdisciplinar con otras materias del currículo. Estos elementos comunes en las diferentes normativas se asocian con una visión de las matemáticas como instrumento esencial en el progreso de otras áreas de conocimiento, no solo las habituales ciencias experimentales, sino también las ciencias sociales e incluso áreas humanísticas y artísticas. Además, se destaca también, de manera más o menos explícita según el caso, su carácter formativo y funcional.

Una lectura del currículo evitando las tablas y listas de contenidos, deja entrever unas matemáticas que se aprenden y se enseñan a partir de la acción, el cuestionamiento, el diálogo argumentado, de la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, entre otros, y todo ello con una actitud positiva hacia la disciplina. Es cierto que no en todos los niveles educativos ni en todos los currículos desde el de la LOGSE de 1990 se percibe ese modo de entender la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, sí se percibe una evolución hacia esta visión que se hace explícita en los cambios introducidos en la última ley del 2020.

El nuevo currículo, que aún está en proceso de implantación, supone un cambio significativo, respecto de los anteriores, y un avance en la visión de las matemáticas como actividad humana, ligada al desarrollo integral de la sociedad y comprometida con los retos del siglo XXI reconocidos por diferentes asociaciones mundiales. El desarrollo y adquisición de competencias sigue siendo el reto del sistema educativo, con la distinción entre competencias clave y específicas. Por ejemplo, en el borrador del currículo de la etapa de Educación Primaria, a través de la organización de estas competencias específicas en cinco ejes, se reconoce el cambio sustantivo introducido en este currículo con el eje de las destrezas socioemocionales. La resolución de problemas, el razonamiento y prueba, las conexiones, y la comunicación y representación, configuran los otros cinco ejes. También la estructuración de los saberes básicos en seis sentidos presentes en el sentido matemático recoge la nueva visión humanística de las matemáticas: sentido socioemocional, numérico, de la medida, espacial, algebraico y pensamiento computacional y sentido estocástico. De manera análoga, con las variaciones pertinentes propias de la etapa, se observa esta nueva visión en el borrador del currículo de Secundaria.

Celebramos estos cambios en la orientación del currículo, en particular en lo relativo a las matemáticas, a pesar de que reconocemos insuficiente la permuta de los listados de contenidos de los currículos anteriores por los de saberes básicos del nuevo currículo.

Mediadores en el aprendizaje de las matemáticas

En los apartados anteriores hemos mostrado nuestra posición acerca de los elementos organizadores del currículo. Cabe ahora reflexionar acerca de los mediadores del mismo, de los vehículos que comunican el currículo pretendido y el desarrollado. Hay, a nuestro entender, dos mediaciones esenciales, el docente y los materiales curriculares, entre ellos el libro de texto y los recursos tecnológicos.

Como propone Chevallard (2017), la supervivencia de la enseñanza de las matemáticas depende de un cambio radical en nuestra concepción de qué y cómo enseñarlas; de poco sirve un cambio curricular si este no es compatible con el paradigma dominante. Por eso, el debate no debe centrarse solo en establecer qué y cómo enseñar, se debe considerar también cómo contribuir a un cambio de paradigma y conseguir que una mayoría del profesorado se implique en él.

Los modelos de educación matemática que sustentan muchas de las reformas curriculares se encuentran dentro de lo que Ellis y Berry (2005) denominan paradigma procedimental-formalista, que sostiene que las matemáticas son un conjunto objetivo de hechos, habilidades y procedimientos organizados lógicamente y optimizados a lo largo del tiempo. Esta perspectiva de existencia independiente de la experiencia humana convierte la matemática escolar en algo intrínsecamente difícil de aprender.

En este paradigma dominante, la utilidad formativa de las matemáticas se ha entendido desde la perspectiva intrínseca o inmanente, sobre todo fundamentado en la utilidad del conocimiento matemático para la formación científica. Pero, curiosamente, los científicos para los que supuestamente trabajamos solo suponen un reducido porcentaje de la población. Una consecuencia no esperada de esto es que la aversión que ese tipo de matemáticas produce en nuestro estudiantado es en parte responsable de un analfabetismo funcional en el ámbito matemático. Del profesorado depende el paso de lo que Chevallard denomina “paradigma de las visitas a las obras” (que supone avanzar secuencialmente por un itinerario ya marcado) al "paradigma de cuestionamiento del mundo" para que la forma en que el estudiantado tropiece con las matemáticas esté "motivado intrínsecamente por las necesidades del estudio: se trata de un estudio funcional, justificado por el problema por resolver. El trabajo de indagación sobre la cuestión estudiada lleva a las y los estudiantes a encontrar varios contenidos en un recorrido principalmente determinado por la dirección de dicha indagación" (p. 168).

Como señalan Ellis y Berry (2005) "es la integración de un nuevo pensamiento sobre la cognición y el mayor reconocimiento de la cultura lo que ha permitido a los educadores matemáticos enmarcar preguntas y conceptualizar soluciones de maneras que era poco probable que se desarrollaran desde el paradigma procedimental-formalista" (p.12). Esta nueva perspectiva, surgida de la síntesis de la investigación cognitiva, se enmarca en un nuevo paradigma cognitivo-cultural, que entiende el conocimiento matemático como una red de conceptos lógicamente organizados e interconectados que surgen de la experiencia, el pensamiento y la interacción humana.

Los fundamentos de este paradigma son radicalmente diferentes a los del formalista procedimental. Al enfatizar el conocimiento matemático como parte de la experiencia y la interacción humanas, orienta su enseñanza de forma que los y las estudiantes realmente comprendan las matemáticas a través de oportunidades de compartir experiencias y significados, de establecer conexiones entre conceptos e ideas relevantes, y ser capaces de aplicarlas de forma crítica y reflexiva a situaciones de su vida cotidiana. Como afirma Philipp (2001), el reto ya no es hacer llegar las matemáticas a los estudiantes, es llevar a los estudiantes hacia las matemáticas.

En esta nueva forma de mediación, el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la colaboración a través de redes, la agilidad y adaptabilidad, la iniciativa y el espíritu empresarial, la comunicación eficaz, el acceso y el análisis de información, la curiosidad e imaginación (Wagner, 2014) deben ser las estrategias esenciales y, para ello, el profesorado deberá ser capaz de orquestar discusiones de toda la clase, hacer preguntas profundas y plantear tareas que ayuden al estudiantado a reflexionar y desarrollar su pensamiento actual, dando oportunidad para que la educación matemática prepare a los estudiantes para aplicar las matemáticas en todo tipo de situaciones laborales y de la vida cotidiana.

Como señalan Gravemeijer et al. (2017), dado que las matemáticas que usamos en el ámbito laboral difieren significativamente de las matemáticas que trabajamos en la escuela, los profesores y profesoras han de intentar extraer las características esenciales de las primeras, a fin de obtener una imagen de la actividad matemática para la que los estudiantes deben estar preparados. Si queremos anticiparnos a las demandas del siglo XXI, debemos contemplar que se trabajará en un entorno informatizado, por lo que debemos intentar identificar las competencias matemáticas que complementan ese tipo de trabajo; de la misma forma que será preciso analizar cómo los temas matemáticos adquieren relevancia bajo la influencia del uso de la tecnología de la información para identificar qué contenido matemático habrá que perseguir.

Es preciso pasar de tratar las matemáticas escolares influenciadas por prácticas profesionales formales de los matemáticos y de docentes que aprendieron desde este enfoque, a unas matemáticas inspiradas por problemas prácticos utilizando herramientas, prácticas y discursos culturalmente específicos (Wake y Williams, 2001).

La mediación se torna esencial en la forma de abordar un contenido. El cambio de paradigma implica, por ejemplo, enfatizar la comprensión conceptual de los elementos de un procedimiento frente al exclusivo uso del procedimiento en sí, entendiendo ambos aspectos como no dicotómicos. Como afirma Kieran (2013), ambos aspectos han de convivir e interactuar de forma que la comprensión conceptual acompañe a la elaboración y uso de técnicas, a la vez que el propio proceso de generación de esas técnicas se torne en un proceso de enriquecimiento conceptual.

Las matemáticas, como señalan Kilpatrick et al. (2001), implican comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva. Esto significa que los procedimientos deben verse como oportunidades de generar nueva comprensión conceptual en la medida que pueden ser adaptados, refinados y extendidos, desde una perspectiva que supone avanzar hacia flexibilidad y conocimiento procedimental profundo (Star, 2005), entendido como un conocimiento de procedimientos asociado con comprensión, flexibilidad y juicio crítico, diferente, aunque relacionado con el conocimiento de conceptos (que el autor re-denomina como conceptos y principios).

En ese mismo sentido se manifiestan Li y Shoenfeld (2019), para quienes no se puede seguir presentando las matemáticas como un cuerpo de contenidos para ser aprendido y un listado de procedimientos para ser aplicados. Es preciso situar el conocimiento en un contexto con sentido a través de prácticas que incluyan planteamiento y resolución de problemas, razonamiento, comunicación y *modelling* en un marco de experiencias para los estudiantes. Así, aunque la elección del qué enseñar es relevante, lo es más el cómo enseñarlo; es desde esa perspectiva desde la que introducen el TRU (*Teaching for Robust Understanding*) basado en 5 principios: un contenido rico (conceptualizado como algo conectado y vinculado a experiencias significativas), la demanda cognitiva (que consiste en dar oportunidades de dar sentido a lo que se hace), que permita un acceso igualitario (en sentido de oportunidades para todos), agencia, propiedad e identidad (ayudar a los estudiantes a implicarse disciplinadamente en la búsqueda de sentido) y evaluación formativa, coherente con el modelo de aprendizaje que valore el saber hacer por encima del saber en sí. Propugnan así una matemática con un sentido más aristotélico (enfatizando el razonamiento lógico y la actividad empírica sobre los objetos matemáticos accesibles a los sentidos) que platónico (poca o nula experiencia se puede adquirir si se considera como algo preexistente, que solo unos pocos pueden comprender). Ha de verse como algo que el humano puede producir, como una actividad humana. Para ello, el rol del docente es generar un clima de indagación, donde las matemáticas contemple exploración y comprensión, con tareas que permitan a los estudiantes desarrollar, compartir y refinar sus ideas, articuladas sobre las grandes ideas matemáticas (que los contenidos no impidan una perspectiva más amplia) y donde el pensamiento de los estudiantes sea central para el discurso en el aula (Li y Shoenfeld, 2019).

Uno de los problemas que cualquier reforma tiene es cómo conseguir que los profesores y profesoras se adapten al nuevo paradigma que las ampara (Lampert, 2001). Lejos de formulaciones prescriptivas de la práctica, este cambio pasa por que los y las docentes aprendan a estructurar ambientes de aprendizaje que permitan el discurso matemático y la conexión de ideas matemáticas. Desde nuestra perspectiva, la clave está en que el conocimiento matemático que han de tener ha de ser más extenso y profundo, potenciando las ideas matemáticas relevantes y las interconexiones entre ellas (Ma, 1999; Sfard, 2003). Ello supone que los cambios curriculares efectivos no es esperable que se produzcan como efecto de cambios legislativos y que requerirán la comprensión de sus fundamentos y la implicación por parte de los y las docentes que han de ejecutarlos.

El otro gran mediador del aprendizaje es el libro de texto. Elegimos este, entre el resto de los materiales curriculares pues, sin duda, es el de uso más extendido entre el profesorado. La selección y uso del libro de texto en el aula de matemáticas requiere hoy la atención de parte importante de los investigadores en educación matemática (Fan et al., 2013; Rezat et al., 2021). No entraremos en profundidad en ello, sólo queremos centrar la atención sobre su influencia como mediador curricular, dado que su papel esencial es convertir las abstracciones de la política curricular en un recurso operativo para profesores y estudiantes (Valverde et al., 2002).

Lepik et al. (2015) distinguen cuatro usos diferentes que el profesorado atribuye al libro de texto: hay quienes lo usan de forma sistemática a lo largo de todo el curso, quienes no lo consideran como su herramienta principal y lo combinan con otros recursos, aquellos que solo los utilizan para la realización de ejercicios y tareas que contienen, y aquellos que los consideran como un material complementario de ampliación de lo trabajado en clase y como recurso del trabajo personal del alumnado. La primera opción, que parece ser la más extendida, es también la más acrítica; las otras implican toma de decisiones acerca de las posibilidades que el libro puede ofrecer en función de los objetivos de aprendizaje que el profesorado tenga.

Es preciso tener en cuenta que, independientemente de la calidad educativa e idoneidad de un libro de texto, su propia organización suele conducir a una visión estática y acabada del contenido y a una secuencia compartimentada de temas y tareas. Si las propuestas curriculares advierten que los bloques de contenido no suponen un temario, el libro de texto se encarga de hacer ver justo lo contrario; si el currículo apuesta por contemplar elementos trasversales como la resolución de problemas, los recursos tecnológicos y la dimensión histórica y cultural de las matemáticas, los libros de texto tienden a convertir la transversalidad en pura anécdota.

Por otro lado, la matemática escolar debe organizarse desde un doble continuo que va de la simplicidad a la complejidad y de la singularidad a la multiplicidad de relaciones. La matemática escolar puede entenderse como una malla de conceptos interrelacionados en una estructura helicoidal, y los libros de texto, en el mejor de los casos, solo ofrecen secciones planas de dicha estructura, impidiendo la necesaria visión holística (vertical y horizontal) que el docente ha de tener del currículo, y promoviendo por tanto una construcción reduccionista y parcelada del conocimiento matemático.

Los recursos tecnológicos conforman el otro grupo importante de mediadores curriculares. Puede parecer ocioso que, avanzado el siglo XXI, sigamos recordando el papel esencial del software educativo en la función de movilizar conocimiento. Sin embargo, conviene destacar los avances que software de acceso libre, como Geogebra, ha permitido experimentar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los recursos tecnológicos, no obstante, no cumplen solo su función potenciadora del aprendizaje, son también y, quizás hoy principalmente, un medio para el acceso democrático y universal a la información. Por ello, la educación matemática ha de contemplar su uso como elemento transversal del conocimiento y como medio de acceso al mismo.

Reflexiones finales

Este capítulo propone una visión fundamentada de la matemática escolar con un marcado carácter social, y que huye de las estériles dicotomías y discusiones que durante varias décadas han llevado a un profundo inmovilismo de las matemáticas que se enseñan, en general, en las aulas de los centros escolares. Esto supone un cambio de calado en la forma de concebir las matemáticas tanto a nivel curricular, donde este cambio de perspectiva ha sido ampliamente considerado, como a nivel escolar, donde estas propuestas de cambio no han terminado de calar. Por eso mismo, asumiendo que este tipo de cambios no es inmediato ni sencillo de realizar, hemos profundizado en sus claves y hemos puesto de relieve que requieren de un profundo compromiso que abarca tanto a los y las docentes y centros, como a agentes sociopolíticos. Así, si se pretende un cambio real, profundo y no de forma, en la realidad educativa española, y pretendiendo que impacte en la sociedad de forma significativa, entendemos que sólo puede suceder a través de un compromiso estable en el tiempo y en el contenido de dicho cambio, compromiso que nuestra sociedad de investigación puede y debe liderar. Asimismo, un cambio profundo (aunque insistimos que no nuevo) en la forma de concebir la actividad matemática escolar no sólo pasa por cambiar las leyes educativas del currículo en la escolarización obligatoria, sino que debe afectar profundamente a todos los agentes que actúan como mediadores y, fundamentalmente a la formación de profesorado, de todos los niveles educativos, y tanto de formación inicial como continua. Esta última nos proporciona un contexto privilegiado para fomentar el cambio en la forma de concebir la matemática escolar con cierta rapidez, dado que el profesorado en activo es, en gran medida, el responsable de dar forma al éxito o fracaso de las reformas educativas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *La Gaceta de la RSME, 10*(3), 689–706.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.126-154, Vol 1). PME.

Caballero (2013). *Diseño, aplicación y evaluación de un programa de intervención en control emocional y resolución de problemas matemáticos para maestros en formación inicial*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME, 20*(1), 159-169.

Cockcroft, W. (1985). *Informe Cockcroft. Las matemáticas, sí cuentan*. MEC.

Comité Español de Matemáticas, CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Recuperado de: https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Ellis, M.W., y Berry, R.Q. (2005). The Paradigm Shift in Mathematics Education: Explanations and Implications of Reforming Conceptions of Teaching and Learning. *The Mathematics Educator, 15*(1), 7-17.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Rouletdge Farmer.

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? The aims, outcomes and opportunities afforded by its teaching and learning. En J. White and S. Bramall (Eds.), *Why learn maths?* University of London.

Ernest, P. (2002). Empowerment in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal 15,* 1-16.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbokk research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematic Education, 45*, 633-646.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. y Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(S1), 105-123.

Hanna G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. En S. Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. y Bakker, A. (2013). Mathematics in the workplace: Issues and challenges. En A. Damlamian, J. F. Rodrigues, and R. Strässer (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry: Report on an ICMI-ICIAM study* (Vol 16). (pp. 43–50). Springer Science y Business Media.

Høyrup, J. (1987). Influences of institutionalized mathematics teaching on the development and organization of mathematical thought in the pre-modern period. En J. Fauvel y J. Gray (Eds), *The History of Mathematics: A Reader* (pp. 43-45). Macmillan.

Jäder, J., Lithner, J. y Sidenvall, J (2020) Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(7), 1120-1136.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skillls: an exemple form algebra. En K.R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education reserach*. Springer.

Kilpatrictk, J., Swaford, J. y Findel, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Lehrer, R., y Schauble, L. (2000). Developing Model-Based Reasoning in Mathematics and Science. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*(1), 39-48.

Lepik, M., Grevholm, B. y Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom: the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 129-156.

Levy, F. y Murnane, R. J. (2012). *The new division of labor: How computers are creating the next job market*. Princeton University Press.

Li, Y. y Shoenfeld, A.H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM education*. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M.A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education*, (pp. 75-89).

Mills, K. (2012). Some correspondences and disjunctions between school mathematics and the mathematical needs of apprentice toolmakers: A New Zealand Perspective. En A. Hector-Mason y D. Coben (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference of Adult Learning Mathematics-A Research Forum* (pp. 69-83), Auckland, New Zealand.

Noss, R. (1989). The computer as a cultural influence in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 251-268.

Philipp, R. (2001). *Speech presented for the National Council of Teachers of Mathematics Research Pre-session*. Orlando, FL.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Real decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. Anexo. Boletín Oficial del Estado, 220, de 13 de septiembre de 1991. https://www.boe.es/boe/dias/1991/09/13/pdfs/C00003-00038.pdf

Reichenbach, H. (1938). *Experience and prediction: an analysis for the foundations and the structure of knowledge*. University of Chicago.

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1189-1206.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalancable: The NCTM standards in light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 353-392). National Council of Teachers of Mathematics.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer.

Wagner, T. (2014). *The global achievement gap: Updated edition*. Perseus Books Group

Wake, G. D. y Williams, J. S. (2001). *Using College mathematics in understanding workplace practice. Summative report of research project funded by the Leverhulme Trust*. Manchester University.