# Sentido matemático Escolar

## *School Mathematics Sense*

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P.
*Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*

Resumen

La noción de sentido matemático y sentidos matemáticos escolares se ha incorporado en la redacción de los nuevos documentos curriculares en España, pasando a tener un papel importante en la organización de los mismos. Por tanto, es necesario para un docente profundizar en la noción de sentido matemático, conociendo cuál es su fundamentación, reflexionando sobre la pertinencia de su inclusión en el currículo e informándose sobre las consecuencias que tendrá en futuros procesos de enseñanza y aprendizaje. En este capítulo, tratamos de orientar a los profesionales de la enseñanza a través de los elementos curriculares y cognitivos que soportan la noción de sentido matemático y presentamos una descripción general de cada uno de los sentidos matemáticos escolares en los que se divide: sentido algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico. Para cada uno de ellos describimos las principales componentes que lo organizan.

*Palabras clave*: Competencia matemática, Enfoque funcional del currículo, Matemática escolar.

Abstract

The notion of mathematical sense and school mathematical senses has been incorporated into the writing of the new Mathematics curricula in Spain, coming to play a fundamental role in their structure. Therefore, it is necessary for a teacher to delve into the notion of mathematical sense, knowing what its foundation is, reflecting on the relevance of its inclusion in the curriculum and orienting itself on the consequences it will have in future teaching and learning processes. In this chapter, we try to guide teaching professionals through the curricular and cognitive elements that support the notion of mathematical sense as well as a general description is presented of each school mathematical senses into which it is divided: algebraic, spatial, stochastic, measurement and numerical. For each of them we describe the main components that organize them.

*Keywords*: Curricular functional approach, Mathematics literacy, School mathematics.

## Introducción

La postura expresada por las sociedades de profesoras y profesores de matemáticas y por las sociedades científicas que componen el Comité español de Matemáticas (CEMAT, 2021) adopta la noción de sentido matemático y lo sitúa como elemento central que organiza la enseñanza del conocimiento matemático escolar longitudinalmente, desde la educación infantil hasta el bachillerato. Esta postura ha sido adoptada en el nuevo desarrollo curricular (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b), en el que la noción de sentido matemático permite estructurar los saberes básicos que se asocian al desarrollo de las competencias clave.

Los seres humanos buscamos sentido en el mundo esperando que las cosas no sean arbitrarias ni fruto del azar y las intentamos categorizar constantemente, como señala desde la psicología cognitiva Smith (2005). Bruner (2009) reconocía que la fuerza motriz de las actividades intelectuales es la cultura y la necesidad de buscar significados, que hay que integrar en la enseñanza de las matemáticas.

Ayudar a los estudiantes a dar sentido a los contenidos matemáticos orienta su enseñanza, buscando que ganen competencias relativas a dichos contenidos, a través de oportunidades de compartir experiencias y significados, de establecer conexiones entre conceptos e ideas relevantes, y ser capaces de aplicarlas de forma crítica y reflexiva a situaciones de su vida cotidiana (Montes et al., 2022, p. 48)

La visión del aprendizaje que se reflejó en la noción de competencia y de currículo funcional, amplió la expectativa de aprendizaje a la capacitación para utilizar esos contenidos aprendidos en situaciones del entorno. Pero la formulación de competencias matemáticas de manera transversal a los contenidos tal como hizo la OCDE en 2005 (Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar lenguaje simbólico, fórmulas y operaciones, Emplear soportes y herramientas tecnológicas), provoca que deba repensarse la organización del contenido matemático. Esta idea se expresa en el capítulo anterior (Montes et al., 2022) donde, específicamente, se indica que la organización curricular de las matemáticas escolares debe basarse en "función de las destrezas transversales que permiten construir y crear matemáticas, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices" (p. 42). La idea de sentido matemático proporciona esta reorganización y respeta los bloques de contenido, centrándose en los elementos que le atribuyen significado.

La palabra sentido forma parte del vocabulario habitual. Existen diversas expresiones relacionadas con sentido en el lenguaje cotidiano "tener sentido", "dotar de sentido", "doble sentido", "sin sentido", … En el diccionario de la Real Academia de la Lengua aparece con 12 acepciones inmediatas y otras pocas más relacionas. De ellas, algunas se refieren al sentimiento, otras a los sentidos perceptivos y otras a diversas capacidades cognitivas.

De todas ellas, algunas acepciones tienen usos convenidos en educación y en matemáticas:

1. "Significado de una palabra o grupo de palabras". En matemáticas, el sentido de un concepto matemático es parte inherente de su significado semántico y se centra en los modos de usos, las situaciones, los contextos y los fenómenos que forman parte del significado de dicho concepto.
2. "Habilidad o destreza para hacer algo o para juzgar bien en ello". Desde el punto de vista del aprendizaje, el sentido aparece como conjunto de habilidades asociadas a contenidos matemáticos concretos que el estudiante debe desarrollar.
3. "Modo de enfocar, de entender o juzgar algo". El docente debe enseñar con sentido, entendiendo por esto proporcionar oportunidades para que sus estudiantes aprendan matemáticas con sentido, esto es, implicar a los estudiantes en el desarrollo de instrumentos propios, no rutinizados en la resolución de problemas.

En este capítulo se realiza una aproximación didáctica que describe la noción de sentido atendiendo a los dos primeros usos convenidos anteriores. Por un lado, desde las matemáticas, como el *sentido de los contenidos matemáticos escolares,* que proporciona una organización fenomenológica del contenido matemático escolar. Por otra, desde el aprendizaje escolar, como los *sentidos matemáticos escolares*, que son los conjuntos de capacidades generales que enlazan los elementos del contenido matemático con aspectos cognitivos de su aprendizaje y con la noción de competencia matemática. A partir de la conexión de las componentes necesarias para poner en acción los respectivos bloques de contenido matemáticos surge el desglose del sentido matemático correspondiente a la enseñanza obligatoria en: sentido algebraico, sentido espacial, sentido estocástico, sentido de la medida y sentido numérico.

## Sentido y Sentido Matemático

### Significado y sentido de un contenido matemático escolar

Desde una aproximación semántica, consideramos el sentido como uno de los elementos constituyentes del significado de un concepto. Un concepto matemático escolar lo consideramos constituido por: (1) una estructura formal, que incluye conceptos, propiedades, relaciones, algoritmos, …; (2) unos signos y unas reglas que permiten expresarlo y que lo identifican y; (3) un sentido o sentidos que corresponden a un conjunto de situaciones, contextos, fenómenos y modos de uso que permiten usarlo y emplearlo (Rico, 2012, 2013, 2016b; Rico et al., 2015).

Esta visión de sentido de un contenido matemático escolar es muy cercana a la que Freudenthal (2002) defiende, en la que los conceptos matemáticos son los modos de organización de los fenómenos, que son los objetos de la experiencia matemática de las personas. La dualidad fenómenos-organización de fenómenos permite construir nuevos conceptos matemáticos que, a su vez, son fenómenos que se organizan para construir nuevos conceptos. Entendida la construcción de conceptos matemáticos de esta manera, las personas que aprenden parten de fenómenos (o de situaciones o contextos) que permiten experimentar (usar e interpretar) determinado concepto de manera que tenga sentido y produzca nuevos significados utilizables en nuevas situaciones en las que se necesite dicho concepto (Puig, 1997).

Estos sentidos de los contenidos matemáticos, basados en las formas en las que se pueden usar los contenidos matemáticos, se ajustan a la competencia matemática, tanto la defendida en los estudios PISA, como la que promueve la actual legislación educativa, ya que ambas subrayan la funcionalidad de la matemática escolar y, así, enfatizan el interés en los fenómenos del mundo real que requieren y desencadenan un tratamiento matemático. Los contenidos pasan a ser una herramienta con una función y su organización disciplinar basada en la estructura matemática de los mismos deja paso a una organización "fenomenológica" (Rico, 2016a). Esta nueva clasificación selecciona y organiza los contenidos en relación con los fenómenos que organizan y los tipos de problemas de los que surgieron, esto es, organiza los contenidos atendiendo al sentido de los mismos.

En resumen, atendemos a la necesidad de reorganizar el contenido matemático mediante la propuesta de que el sentido de los contenidos matemáticos escolares proporciona una organización "fenomenológica" del contenido matemático escolar que atiende la disposión en función de los clásicos bloques de contenido y que se realiza en términos de las capacidades que permiten comunicar, aplicar, usar en contexto y profundizar en los contenidos matemáticos, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices.

## Aprender matemáticas con sentido. Sentido matemático

Desde la perspectiva didáctica, el concepto de sentido numérico arranca en los años 80 del s. XX, concebido por Howden (1989) como una buena intuición sobre los números y sus relaciones, que se desarrolla gradualmente como resultado de exaltar los números, visualizarlos en una variedad de contextos y relacionarlos de maneras que van más allá de los algoritmos tradicionales. Con su introducción se pretende abrir la idea de número que debe adquirir el estudiante, implicándose en la resolución de problemas con instrumentos propios que no se limiten a los tradicionalmente empleados en la escuela (Mason, 1996).

Si bien podemos considerar que enseñar los contenidos matemáticos con sentido equivale a lo que Ausubel llamó enseñanza para un aprendizaje significativo, el concepto de sentido matemático corresponde al resultado final de ese aprendizaje, que lleve a desarrollar maneras flexibles de pensar sobre el contenido para usarlo en diversos contextos, proporcionando los elementos culturales que caracterizan ese contenido (Llinares, 2001).

Por tanto, la idea de sentido matemático reúne tres cualidades importantes: su carácter idiosincrático, es decir, dependiente del que aprende; comprende una diversidad de capacidades relacionadas, que permitan actuar con flexibilidad en situaciones en las que se aplica el contenido; y es posible estudiar las componentes que deben actuar de manera coordinada, para delimitar una cierta definición del aprendizaje final deseable, que será alcanzado en diverso nivel y profundidad por cada sujeto.

Como señala Smith (2005), es el aprendiz el que alcanzará cierto nivel de cada sentido matemático, impulsado por la curiosidad hacia el entorno, pero también por el grado en que maneje las componentes de cada sentido y las relacione entre sí. La cantidad y calidad de estos logros le dará mayor o menor flexibilidad para identificar situaciones en que se aplica el contenido, para llevar a cabo esta aplicación y resolver los problemas afrontados.

En la Didáctica de la Matemática se han empleado diversos procesos para llegar a caracterizar y definir los diferentes sentidos. Bien analizar las respuestas de los estudiantes a tareas que requieren poner en marcha los sentidos, como ha hecho Arcavi (1994) con el sentido de símbolo, o realizar delimitaciones estructurales, a partir de un estudio fenomenológico de las tareas que comportan las situaciones en que se usan los contenidos y las habilidades que se requieren para trabajarlas coordinadamente (p. e. NCTM, 2001; Sowder, 1992).

De manera simplificada, se desarrolla sentido matemático cuando se da sentido a los contenidos, elaborando significados, usando los contenidos en contexto, identificando las situaciones en que es importante emplear dicho contenido, y proponiendo soluciones a las cuestiones que los usos en contexto puedan generar. Este aprendizaje requiere interacción, negociación y comunicación con otras personas (Rico et al., 2015; Ruiz-Hidalgo, 2016).

El aprendizaje con sentido concreta las maneras de comprender y usar las matemáticas necesarias para el desarrollo de la competencia matemática y, a diferencia de la competencia, enfatiza habilidades concretas que se pueden desarrollar con elementos del contenido. De esta forma, el sentido se puede entender como una forma de pensar asociada a un contenido particular o, como se expresa en algunos documentos, como un conocimiento dentro de un dominio conceptual (Greeno, 1991).

## Síntesis sobre sentido

Hemos presentado, por un lado, el sentido de un contenido matemático como una dimensión de su conocimiento y parte integrante del significado de dicho contenido, que nos facilita una manera de organizar el contenido matemático escolar. Esta organización es compatible y se enriquece con la combinación del criterio cognitivo (Hiebert y Lefevre, 1986) que organiza por campos de conocimiento conceptual y procedimental y del criterio disciplinar que la organiza por bloques, números, medida, espacio, …

Por otro lado, el sentido matemático es el resultado de un aprendizaje coordinado de las componentes que lo integran, que identificamos a partir de una profundización como profesores sobre el significado de dicho contenido. Por tanto, para caracterizar cada sentido tenemos que arrancar de examinar cuál es la función social del aprendizaje del contenido correspondiente, y posteriormente qué significa dicho contenido (elementos matemáticos estructurales, signos y situaciones), con lo que podremos determinar las componentes del sentido que tenemos que abordar en su desarrollo.

Presentamos así cinco sentidos matemáticos escolares de la enseñanza obligatoria: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico, atendiendo a los contenidos matemáticos de esta fase educativa, que comienza enfocándose en la cantidad, para abrirse al espacio y sus posibilidades de medida, posteriormente a la diferenciación del empleo matemático en situaciones aleatorias, y finalmente la introducción al lenguaje matemático de niveles superiores, como es el álgebra. Cada uno de ellos organizado en componentes o dominios de habilidades que, a su vez, se describen mediante habilidades más específicas.

## Sentido Algebraico

El objetivo final del aprendizaje algebraico es ampliar el lenguaje matemático a la inclusión de términos no numéricos, promover su uso para expresar relaciones numéricas, generalizar resultados particulares y disponer de recursos para expresar relaciones entre magnitudes.

Uno de los grandes logros de la cultura humana es la introducción de letras y símbolos en los razonamientos matemáticos (Radford y Puig, 2007). El lenguaje simbólico está tan arraigado que muchas personas identifican el álgebra escolar con la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones. De hecho, en muchos países ha dominado un punto de vista del álgebra escolar como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de secundaria y bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2001).

Sin embargo, la consideración del sentido algebraico amplía esta visión del álgebra en la que no solo se tiene que tener en cuenta la parte estructural simbólica, sino que se incluyen aspectos de la utilidad del álgebra en la cultura, su papel en la historia, su influencia en otras áreas de conocimiento y su papel propedéutico dentro de la propia matemática. En otras palabras, el álgebra tiene dos identidades: por un lado, la manipulación sintácticamente guiada dentro de un sistema de organizado de símbolos. Por otro lado, el álgebra se presenta como la generalización y la expresión de generalizaciones que hace uso de un sistema convenido de símbolos, junto con el uso de la cantidad desconocida para expresar relaciones conocidas con las que obtener dicha cantidad (Kaput, 2008).

Para los aspectos simbólicos y su manipulación, algunas de las habilidades que manifiestan usarlos con su sentido son: identificar situaciones donde usar los símbolos, ejecutar cálculos simbólicos con fluidez y de diversas maneras, conectar el álgebra con la geometría, elegir símbolos con eficiencia, … (Arcavi, 1994; NCTM, 2009). Para los aspectos aplicados del álgebra, se pueden destacar habilidades como generalizar patrones, relacionar las propiedades de los números con la manipulación algebraica, relacionar las familias de funciones con determinadas expresiones algebraicas, analizar el efecto de los parámetros en las expresiones algebraicas, … (NCTM, 2009).

Existe cierto consenso en investigación en educación matemática en las clases de situaciones que conducen a que emerja y se desarrolle la comprensión algebraica y el sentido de los conceptos algebraicos y su uso (Berdnarz et al., 1996), que permite organizar el sentido algebraico en torno a cuatro componentes: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; Resolución de problemas; Situaciones funcionales; Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

### Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas

Desde muy pequeños, los escolares resuelven tareas de clasificación y ordenación en las que aparecen secuencias de objetos. Al principio solo son expresadas verbalmente (rojo, azul, rojo, azul, …) y posteriormente serán descritas con patrones regulares. Mediante expresiones numéricas, la descripción se puede hacer sobre la regularidad (2, 4, 6, 8, … van de dos en dos) o sobre la secuencia (los números pares). En secundaria se pueden utilizar las letras para buscar expresiones que describan las secuencias como términos generales o relaciones entre variables. El uso de elementos geométricos ayuda a la traducción entre diferentes sistemas de representación y permite realizar justificaciones y demostraciones visuales de relaciones numéricas.

### Resolución de problemas

La resolución de problemas ha tenido un papel fundamental en el desarrollo del álgebra y, además, es un elemento principal en su enseñanza. Los estudiantes que se enfrentan a problemas que requieren el razonamiento algebraico en secundaria poseen un bagaje de resolución de problemas aritméticos adquirido en la educación primaria. La transición entre aritmética y álgebra debe tener en cuenta la aparición del simbolismo algebraico, pero mucho más debe considerar las semejanzas y diferencias entre los razonamientos que se utilizan para plantear los problemas. Este análisis, además, permite descubrir las situaciones que ponen al límite la capacidad de los estudiantes para resolver problemas aritméticos y utilizarlas para motivar la evolución hacia el uso de las estrategias algebraicas o para evolucionar dentro de la propia álgebra (Bednarz et al., 1996).

## Situaciones funcionales

Esta componente agrupa las habilidades relacionadas con el proceso de generalización de situaciones que dan lugar a relaciones funcionales entre magnitudes, donde expresar la generalización se puede pensar como la descripción de variaciones sistemáticas de casos a lo largo de un dominio (Kaput, 2008).

### *Usar múltiples representaciones de funciones*

Incluyendo la simbólica, tabular y gráfica, hacer conversiones entre ellas y tomar decisiones de cuál utilizar en cada momento.

### *Identificar familias de funciones*

Conocer características y comportamientos de algunas familias para aplicarlas a situaciones contextualizadas.

### *Análisis del efecto de los parámetros*

Manipulación de parámetros en familias de funciones y el efecto que estos tienen en el comportamiento de las funciones de la familia.

### *Análisis del cambio*

Prestando atención a la descripción de cambios, cualitativos y cuantitativos, desde los primeros cursos.

## Modelización de fenómenos físicos y matemáticos

El proceso de modelado se basa en cierta verbalización que proporciona significado al simbolismo matemático que los estudiantes desarrollan gradualmente. El desarrollo de la habilidad de modelización favorece la introducción al álgebra a través de la noción de variable (Bednarz et al., 1996).

La modelización consiste en identificar las relaciones que existen en los datos de los problemas y situaciones, y de la expresión en diversos grados de simbolización de las cantidades que se relacionan. Se puede desarrollar en todos los niveles ofreciendo situaciones apropiadas: situaciones reales con objetos físicos (fichas, material manipulativo, …) o con representaciones orales o escritas (“cosa”, modelos cardinales, modelos lineales, …). Manejar estas representaciones permitirá expresar las relaciones para buscar las soluciones de las situaciones, interpretarlas o entenderlas mejor. Las situaciones irán aumentando su complejidad hasta que, en secundaria, utilicen las expresiones algebraicas para modelarlas. Más adelante, los símbolos se convertirán en funciones o en familias de funciones (NCTM, 2001).

### Síntesis del sentido algebraico

El álgebra es un importante aporte cultural y tiene gran importancia en la formación de todos los ciudadanos. Además de su faceta simbólica, curricularmente aceptada y restringida a la secundaria y bachillerato, tiene otra faceta de generalización que hace énfasis en su utilidad y que puede ser desarrollada desde los primeros cursos de la educación primaria. Los componentes que organizan las habilidades a desarrollar son:

1. Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
2. Resolución de problemas
3. Situaciones funcionales
4. Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Para lograr desarrollar este sentido, Kieran (2004) propone tres tipos de tareas: tareas de generación (en las que situaciones, propiedades, patrones y relaciones se representan o interpretan algebraicamente), tareas de transformación (manipulación algebraica) y tareas globales, que no son exclusivamente algebraicas, sino que se relacionan con el contexto en el que se están usando las herramientas algebraicas.

## Sentido Espacial

La geometría abstrae los objetos reales y construye modelos ideales que analiza en un espacio sin imperfecciones y obtiene resultados que proporcionan información de utilidad en el mundo real. En general, es considerada la disciplina de las formas del espacio y las formas y sus medidas. Con su estudio escolar, se pretende que los estudiantes ganen destrezas para ubicarse en el espacio, para captar las posiciones y formas que lo constituyen, y con ello resolver situaciones que se plantean con relación a posiciones y formas. Se vale de modelos geométricos, apoyados en el razonamiento, la visualización y la orientación. Con ello, la persona puede identificar su posición y orientarse para localizar objetos en el espacio.

La construcción del pensamiento espacial se ha descrito con precisión de manera jerárquica (Van Hiele, 1986). Parte de un nivel visual en el que los estudiantes identifican y operan con formas y objetos geométricos de acuerdo con su apariencia. En un segundo nivel, descriptivo/analítico, los estudiantes reconocen y caracterizan formas de acuerdo con sus propiedades. En el tercer nivel, abstracto/relacional, los estudiantes pueden elaborar definiciones abstractas y utilizarlas de manera lógica para caracterizar conjuntos de objetos. Finalmente, en el nivel de la deducción formal, los estudiantes están capacitados para establecer teoremas dentro de un sistema axiomático (Clements y Battista, 1992).

A lo largo de todos los niveles, la identificación de elementos y relaciones geométricas a partir de una adecuada visualización, son herramientas fundamentales para evolucionar, pues el desarrollo de las habilidades del sentido espacial requiere generar una red de imágenes mentales de los conceptos geométricos. Estas imágenes se construyen mediante el trabajo con elementos formales como las propiedades, pero también con la actividad de mirar y explorar cuerpos geométricos reales. Siguiendo los niveles descritos, reconocemos: el papel de la manipulación de objetos físicos, mediante materiales como papel o juegos de espejos; la construcción de figuras, con regla y compás y materiales de construcción; la realización de teselados o mosaicos; la representación de cuerpos mediante la transformación de cuerpos geométricos en su desarrollo plano; la realización de croquis, lectura de mapas, etc.

El sentido espacial se puede definir como "la competencia de un sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Por ello, el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas" (Flores et al., 2015, p. 129).

Las habilidades del sentido espacial se organizan en dos grandes componentes: el manejo de conceptos geométricos y de las representaciones del espacio y la visualización espacial.

## Manejo de conceptos geométricos y de las representaciones del espacio

El manejo de conceptos geométricos hace referencia a la identificación de elementos geométricos, conocimiento de sus propiedades, pero también las relaciones entre sus elementos que permitan realizar clasificaciones o descripciones, y la comprensión de los movimientos.

### *Analizar las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos*

Incluye la identificación, la construcción, la caracterización, ... de formas geométricas usando con rigor el vocabulario apropiado y las representaciones con precisión mediante el uso de diversos materiales. En los primeros cursos, se puede fomentar la descripción de objetos reales usando términos geométricos y la identificación de similitudes y diferencias entre los objetos que permitan clasificarlos. Las descripciones deben ir siendo cada vez más precisas y los atributos cada vez más abstractos hasta llegar a un uso del vocabulario preciso y riguroso, a entender las definiciones y hacer justificaciones convincentes ajenas a los casos particulares.

### *Reconocer y establecer relaciones geométricas y razonar matemáticamente sobre estas relaciones*

Un estudiante que termine la educación secundaria debe ser capaz de utilizar todo el vocabulario relativo a las relaciones geométricas en su vida cotidiana, bien para dar posiciones relativas de objetos reales como para razonar y justificar matemáticamente.

### *Aplicar transformaciones geométricas y usarlas para analizar situaciones*

Se trata de desarrollar habilidades de descripción, construcción y representación que permitan analizar situaciones en las que hay que comparar objetos por su forma y su tamaño, así como identificar qué transformaciones se han realizado en un objeto para generar uno nuevo. Además del trabajo matemático y las habilidades de descripción, el trabajo con transformaciones debe ir acompañado de la utilidad real, como el análisis de la influencia de la geometría en el arte.

### *Orientación espacial*

Comprende las destrezas de determinación de lugares, la descripción de relaciones espaciales y concluye con la utilización de referentes, como las coordenadas geométricas. Comienza, en los primeros cursos con la identificación de la posición relativa de objetos usando referentes, "estar cerca de ...", "dentro de..." y la familiarización con el vocabulario específico. Más adelante, el trabajo con mapas y escalas, permite relacionar la geometría con la medida. En los últimos cursos de primaria y en la educación secundaria, los sistemas de representación se van haciendo más variados y las tecnologías de la información y la comunicación favorecen experiencias reales de lectura, interpretación y toma de decisiones en las que se aprecia el sentido de estas habilidades.

## Visualización

La componente de visualización se refiere al conjunto de habilidades y destrezas que permiten identificar los elementos en el espacio. La visualización es "el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos" (Gutiérrez, 2006, p. 38).

Estas destrezas se desarrollan con la manipulación de objetos, moviéndolos, comparándolos, girándolos, ... y discutiendo semejanzas y diferencias en sus propiedades. Dada la naturaleza abstracta de los elementos geométricos, la visualización se requiere para identificarlos y manejarlos. En los primeros años de escolarización, la visualización se basa en la manipulación con objetos, y al avanzar en los cursos, se irán creando representaciones diferentes de los objetos, empleando materiales como geoplanos, cuadrículas o aplicaciones de geometría dinámica. La visualización se hace más necesaria para pasar de las tres a las dos dimensiones, valiéndose de diferentes representaciones, como las diferentes vistas de un objeto (planta, alzado y perfil), los desarrollos planos de los cuerpos, o el uso de materiales de construcción, que enlazan los elementos espaciales con los planos.

### Síntesis del sentido espacial

El sentido espacial se organiza alrededor de dos componentes y sus respectivas habilidades, que lejos de ser independientes, están íntimamente enlazadas:

1. Manejo de conceptos geométricos
2. Visualización

El desarrollo de las destrezas se consigue con la propuesta de tareas escolares que fomenten tres acciones básicas: construir, representar y describir. Estas acciones se han de realizar tanto con objetos formales como con variedad de objetos manipulables, donde la tecnología adquiere un papel fundamental en la enseñanza de la geometría. Las herramientas de geometría dinámica proporcionan una modelización de gran diversidad de figuras de dos y tres dimensiones y permiten una manipulación sencilla, facilitando entornos de trabajo e infinidad de ejemplos para enunciar y probar conjeturas, lo que favorece el aprendizaje de la generalización y demostración (NCTM, 2001).

## Sentido Estocástico

Las ideas de cultura estadística, alfabetización estadística, competencia estadística, y en este caso de sentido estadístico, pretenden delimitar que el aprendizaje estadístico debe ir más allá del dominio de los elementos que se emplean, para comprender su función como rama imprescindible del razonamiento científico experimental. Por tanto, el objetivo debe comenzar por identificar la naturaleza aleatoria de los fenómenos, para posteriormente examinar qué tipo de razonamientos y modelos matemáticos pueden ponerse en juego para afrontar este tipo de estudios.

En la sociedad del s. XXI, las herramientas que proporcionan la estadística y la probabilidad son necesarias para una ciudadanía competente (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Ser capaz de gestionar y evaluar datos de manera apropiada y tomar decisiones basadas en ellos es una destreza que todos los estudiantes que terminan la educación secundaria deberían poseer.

El sentido estocástico recoge el conjunto de capacidades “para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones” (CEMAT, 2021, p. 35).

En los últimos años, las investigaciones en educación matemática han logrado cierto acuerdo en la organización de los contenidos y en los elementos del razonamiento estadístico (Batanero et al., 2013). En este capítulo, escrito desde una base curricular, adoptamos una postura que distingue la estadística sin probabilidad o estadística descriptiva y la estadística con probabilidad o estadística inferencial (Burrill y Biehler, 2011). Así, consideramos que las componentes que organizan el sentido estocástico son: identificación de la aleatoriedad, estudio de datos, comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad, percepción de la variabilidad y razonamiento con modelo estadísticos y desarrollo, y evaluación de inferencias y predicciones.

## Identificación de la aleatoriedad

A diferencia del resto de sentidos, los contenidos del sentido estocástico tienen un punto de partida claro: la incertidumbre. Hay, por tanto, una componente transversal del sentido estocástico es la de reconocer la incertidumbre. La incertidumbre puede mostrarse de diferentes maneras y puede ser debida a múltiples causas, por lo que es importante que los estudiantes diferencien los fenómenos de naturaleza determinista de los de naturaleza aleatoria, para que el estudio de la estadística y la probabilidad se realice en situaciones en las que tenga sentido.

## Estudio de datos

El estudio de los datos incluye un grupo amplio de habilidades que permiten comprender cómo se distribuyen los mismos y favorecen su descripción con el fin de tomar decisiones basadas en los mismos.

### *Formular preguntas y reconocer la necesidad de los datos*

La curiosidad por el mundo que los rodea lleva a las personas a hacerse preguntas que, en muchos casos solo pueden ser respondidas mediante el análisis de datos, pues los casos particulares no son fiables. La orientación de las preguntas debe evolucionar con los intereses del alumnado a lo largo de la etapa escolar, teniendo siempre presente que solamente tendrá sentido abordar desde la estadística preguntas cuyas respuestas estén sujetas a variabilidad o incertidumbre.

### *Recoger, organizar y presentar los datos*

La recogida, organización de los datos y la presentación de su distribución está relacionada con la habilidad del razonamiento estocástico conocida como transnumeración.

Los instrumentos de recogida al inicio serán proporcionados por el docente hasta que, al final de la etapa secundaria, sean los estudiantes quienes tomen decisiones sobre los procesos de recogida datos a través de encuestas, registros, estudios de observación y de experimentos. Al mismo tiempo que el alumnado desarrolla estrategias de recogida de datos, debe crecer su conocimiento sobre el significado de la muestra.

El alumnado deberá ir construyendo la noción de variabilidad de los datos y su distribución a la par que desarrolla formas de representación con diferentes niveles de complejidad idóneas al tipo de variable y el conocimiento de las mismas y de las herramientas digitales o no usadas para su creación. El uso de medidas está asociado a ver el conjunto de datos como un todo y a la descripción del conjunto en su totalidad sin necesidad de enumerar todos los elementos.

### *Comparar, asociar y correlacionar variables*

Por último, y aunque se trata de una herramienta de los últimos cursos, es importante el uso de técnicas de correlación para tomar una decisión razonada sobre si dos variables estadísticas están asociadas.

## Comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad

Basándose en la cuantificación del grado de incertidumbre de las situaciones aleatorias, el alumnado debería ser capaz de interpretar, realizar predicciones y tomar decisiones acordes con los valores cualitativos y/o cuantitativos asignados a las probabilidades en las diferentes situaciones de aprendizaje.

Comenzando con una valoración cualitativa y una familiarización con el vocabulario, el inicio de la cuantificación puede partir del uso de la frecuencia en situaciones en las que se dispongan de datos. La noción frecuentista de probabilidad se consolida mediante el uso de herramientas tecnológicas que permiten realizar simulaciones.

## Percepción de la variabilidad y el razonamiento con modelos estadísticos

Cuando los datos no pueden ajustarse a un modelo hablamos de variabilidad aleatoria. Es necesario percibir la variabilidad e identificar fuentes que la producen. En los últimos cursos de primaria los estudiantes al interpretar los datos en contexto y tomar decisiones o hacer predicciones a partir de la información, deben ser conscientes de que la variabilidad influirá en sus inferencias. En bachillerato, la variación se concreta en el cálculo de intervalos de confianza y su uso para interpretar situaciones.

La comprensión de dichos modelos debe centrarse en la integración y transferencia de las ideas de distribución (de datos, de probabilidad, muestral).

### Desarrollo y evaluación de inferencias y predicciones

A lo largo de la educación escolar deben proponerse situaciones de aprendizaje que permitan construir y reconstruir de forma conjunta las ideas de inferencia informal, muestra y predicción. Desde los inicios donde el alumnado se plantee las primeras cuestiones en situaciones de incertidumbre y con pequeñas muestras realice predicciones, hasta bachillerato donde los cálculos asociados de las distribuciones probabilísticas permitan apoyar las hipótesis de predicción e iniciarse en la inferencia estadística.

### Síntesis del sentido estocástico

El desarrollo de habilidades de estadística y probabilidad es necesario para el ciudadano actual. A lo largo del período escolar, los contenidos se organizan según las siguientes componentes del sentido estocástico:

1. Identificación de la aleatoriedad
2. Manipulación de datos
3. Comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad
4. Percepción de la variabilidad y el razonamiento con modelo estadísticos
5. Desarrollo y evaluación de inferencias y predicciones

Para enfatizar estos usos, se debe trabajar con datos cercanos al estudiante, facilitar su interpretación, apoyarse en herramientas tecnológicas y fomentar el aprendizaje activo mediante: sesiones de exposición y discusión de resultados o elaboración de proyectos y puestas en común.

## Sentido de la Medida

Medir es un procedimiento que nos permite organizar nuestro entorno mediante la comparación y la cuantificación. Desde la aparición de la geometría como medida de la tierra a la actual cuantificación de datos para su procesamiento por inteligencias artificiales, la medida es una necesidad de nuestra sociedad y el desarrollo científico y tecnológico. También, en la vida cotidiana, desde muy pequeños, comparamos nuestros logros con los de los demás, "quién gana más". Escolarmente, en matemáticas, está íntimamente relacionada con la cantidad, las operaciones, los conceptos geométricos, la probabilidad, la estadística y con las funciones. Además, tiene vínculos cercanos con otras áreas de conocimiento: las ciencias sociales, el arte o la educación física y, por supuesto, con todas las ciencias, la tecnología y la ingeniería.

Su cotidianidad y su potencial de conexiones subrayan dos características del proceso de enseñanza de la medida. Por un lado, requiere comprender las cualidades que la ciencia ha establecido como magnitudes interesantes para resolver los problemas, y por otro, familiarizarse con los procedimientos de medida de las magnitudes más comunes, las unidades y los instrumentos.

Esto implica que su enseñanza se vincule a la detección de cualidades a partir de la manipulación de materiales y objetos específicos, y promueva la realización de medidas, antes de operar con medidas de una magnitud para obtener medidas de otras.

El sentido de la medida se evidencia cuando se posee una comprensión amplia de todo el proceso de medir en la que se manifiestan múltiples conexiones, con las que el estudiante dispone de estrategias variadas y de criterios de decisión sobre la manera más apropiada de realizar una medida y de usarla en situaciones concretas (Shaw y Cliatt, 1989; Moreno et al. 2015). El sentido de la medida relaciona el conocimiento de los conceptos que caracterizan a las magnitudes más usuales (longitud, superficie, etc.) con los de sus medidas (unidades, instrumentos, procedimientos directos s indirectos)

El proceso de medir parte de la identificación de las cualidades de los objetos que permiten cuantificarlos, se continua con procesos de comparación y ordenación de cantidades, antes de pasar a elegir unidades de medida no estándares para terminar en las reconocidas en el mundo científico. Sólo entonces se estará en disposición de estimar medidas de objetos, familiarizarse con los instrumentos apropiados para proporcionar un resultado sensato de la medida en el contexto en el que esté trabajando. Este proceso sugiere unos grupos de habilidades que organizan el sentido de la medida: reconocimiento de cualidades comparables y medibles, comprensión del proceso de medir, estimar en medida y medida del cambio.

## Reconocimiento de cualidades comparables y medibles

El primer paso para aprender a medir es identificar y diferenciar cualidades comparables o atributos observables de los objetos, como son la longitud, la capacidad, la masa, la temperatura, etc.

La elección de una cualidad y su comparación directa permite iniciarse en la medida a través del uso de expresiones como “más largo”, “más ligero” o “menos frío”. Algunas comparaciones son visuales o perceptivas, como la temperatura, y otras necesitan manipulación de objetos, como la comparación de longitudes por superposición. Gracias a la comparación se podrá llegar a la ordenación de cantidades de magnitud.

La evolución del reconocimiento de las cualidades debe ir orientada hacia la noción de magnitud y la identificación de diferentes aspectos de los objetos que representan una misma magnitud, como el perímetro de las figuras, el ancho y alto de los objetos, etc. En cursos posteriores aparecerán las magnitudes derivadas, como la velocidad o las magnitudes adimensionales como la amplitud angular.

## Comprensión del proceso de medir

El proceso de medir es básico en las matemáticas escolares, y en él intervienen las unidades, los instrumentos y las estrategias de medida.

### *Conocimiento de las unidades de medida*

Para determinar una medida de un atributo de un objeto se necesita un referente, la unidad de medida. La selección de unidades no estándar y su uso para obtener la medida da sentido al proceso de medir, pues lo vincula al uso de las cosas. La evolución escolar debe guiar a los estudiantes a familiarizarse con las unidades convencionales, como referentes para compartir las medidas realizadas. Con ello se llegará al conocimiento del sistema internacional de medida y del sistema métrico, que se irán ampliando progresivamente.

### *Aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para medir*

Las técnicas directas, como la comparación directa y la reiteración de la unidad, son las más apropiadas para comenzar a medir, pues proporcionan significado al proceso de medir. En los primeros cursos se usarán instrumentos de medida directa específicos y también unidades cuadradas, como cuadraditos, para la medida de áreas, o cubos para la del volumen.

Cuando se trabaje con objetos complejos, se verá la necesidad de emplear técnicas indirectas, primero mediante estrategias manipulativas, como descomponer objetos en formas más simples antes de comprender las relaciones que permiten obtener medidas de una magnitud en función de operaciones con medidas de otras (uso de fórmulas).

En secundaria se debe fomentar la toma de decisiones para seleccionar magnitudes, unidades e instrumentos más apropiados para resolver la situación a la que se enfrentan. Las asignaturas como física y química suministran contextos apropiados para trabajar las habilidades de medida.

### *Medida de una cantidad de magnitud*

La medida de una cantidad de magnitud consta de un número y una unidad. Es importante que los estudiantes aprecien la importancia de compartir los resultados de manera que sean comparables, precisos y reproducibles.

## Estimar en situaciones de medida

La estimación es una habilidad que se debe desarrollar en todas las etapas educativas. Para ello debería estimularse a los estudiantes a realizar predicciones sobre medidas, antes de llevar a cabo su medida directa. Se desarrolla mediante la comunicación y justificación durante puestas en común sobre las estimaciones realizadas. Progresivamente se orientará hacia el conocimiento de estrategias de estimación: internalización de unidades estándar (tener una imagen o idea de cuánto es un metro, cuánto pesa un kilo, …), familiarización con referentes o conocimiento de medidas de objetos cotidianos (como que un cartón de leche es 1 $dm^3$, cuál es tu altura, …), dominio de técnicas indirectas que permitan realizar cálculos aproximados, habilidad para comparar con objetos conocidos, y habilidad para aplicar estrategias de composición y descomposición para transformar las formas en otras más fáciles de medir.

## Medida del cambio

La noción de tasa de variación aparece asociada a las funciones. Su comprensión y su medida son aprendizajes propios de la secundaria y el bachillerato. La medida de la variación y su interpretación en situaciones científicas es un paso indispensable para avanzar hacia las nociones de límite y de derivada.

## Síntesis del sentido de la medida

El sentido de la medida organiza habilidades y destrezas de gran utilidad en la vida cotidiana, que son necesarias para el aprendizaje de otras áreas de conocimiento y que permiten establecer conexiones con otros dominios de la matemática, como los números o la probabilidad. Esta organización está dada por cuatro componentes:

1. Reconocimiento de las magnitudes como cualidades comparables y medibles
2. Comprensión del proceso de medir, que incluye el conocimiento de las unidades de medida, la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas y la medida de una cantidad de magnitud
3. Estimación en situaciones de medida
4. Medida del cambio

Su enseñanza con sentido debe fomentar la manipulación de objetos que permitan comparar cualidades y el de las unidades e instrumentos apropiados para las magnitudes habituales, antes de llevar al aprendizaje de técnicas de cálculo indirectas.

## Sentido Numérico

El número es, sin duda, el contenido con más influencia en el currículo de matemáticas. La mayoría de las tareas que podemos encontrar en los libros de texto y que se proponen en una clase de matemáticas están basadas en el número. El fin de su enseñanza es que los estudiantes se familiaricen con las situaciones que modeliza la aritmética y desarrollen destrezas que les permitan afrontar estas situaciones, tan comunes en nuestra sociedad.

Los contenidos curriculares referidos a los números son muy extensos a lo largo de la educación no universitaria, como lo son las situaciones que permiten comprender y resolver.

No hay una definición consensuada de sentido numérico, pero se aceptada generalmente la expresada por Howden (1989), para el que el “sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en variedad de contextos y relacionarlos de manera que no se limiten por los algoritmos tradicionales” (p. 11). Esta idea de sentido numérico subraya, por un lado, que se trata de una competencia cognitiva, como una forma de pensar y razonar; y, por otro, que está focalizado en el dominio de los números y las relaciones (Castro y Segovia, 2015; Llinares, 2001).

Algunas de las características del sentido numérico son (Sowder, 1992):

1. Teje una red conceptual que permite a las personas relacionar números con propiedades de las operaciones.
2. Permite emitir juicios cuantitativos y cualitativos sobre la razonabilidad de resultados de problemas numéricos.
3. Se manifiesta cuando se utilizan formas de resolución flexibles y creativas al resolver problemas que involucran números y cuando se generan o utilizan algoritmos no convencionales.

Siguiendo la caracterización de Sowder (1992), lo importante del sentido numérico es relacionar, emitir juicios, actuando con flexibilidad, frente a problemas que permiten emplear los números. Por tanto, aunque son muchas las habilidades deseables para ello, lo importante es el trabajo coordinado de sus componentes. Tres grandes componentes permiten organizar el sentido numérico: la comprensión de los números y las relaciones numéricas; la comprensión de las operaciones; la flexibilidad en el cálculo mental y estimado.

### Comprensión de los números, los sistemas numéricos y las relaciones numéricas

Se han elaborado muchas habilidades que tienen que ver con comprender qué es el número, que se manifiestan de manera diferente dependiendo del sistema numérico que se está considerando y del curso en el que se quieran desarrollar.

### *Reconocer cómo y cuándo usar los números y qué números usar*

Se trata de familiarizarse y diferenciar los usos que tienen los números. El número natural, se usa para contar, para medir, para ordenar, … e incluso para escribir códigos. Los estudiantes deben identificar que uso se está haciendo y qué propiedades tienen: no tiene sentido sumar números de teléfono, aunque sean números.

En los niveles superiores se manifiesta mediante la elección del conjunto numérico a usar en cada momento, a relacionar diferentes conjuntos numéricos y las propiedades que se conservan al pasar de un sistema a otro.

### *Percibir la magnitud de los números*

Si se refiere a la magnitud absoluta, abarca hacerse una idea de la dimensión de una cantidad numérica, lo que le permite apreciar si es razonable un dato (¿pueden asistir 10 millones de espectadores a un concierto?) o un resultado. Pero también la necesidad de precisión en el problema (¿qué cantidad de decimales es necesario considerar para este problema?).

Cuando se refiere a la magnitud relativa de los números, incluye las habilidades para comparar y ordenar números, por lo que es pertinente en casi todos los niveles educativos. Se considera dentro de esta habilidad la comprensión de la densidad de los racionales y de la noción de continuo para números reales, teniendo que ver también con la comprensión de los procesos infinitesimales.

### *Habilidad para usar referentes*

Se trata de desarrollar habilidades asociadas al uso de elementos de referencia o el conocimiento de hechos numéricos. Se usan elementos de referencia cuando se parte de que la suma de dos números menores que uno siempre será menor que 2. Ejemplos de hechos numéricos son que se conozca que un número natural de dos dígitos siempre es menor que uno de tres dígitos, que automatiza la división entre potencias de diez es lo mismo que desplazar la coma decimal, o que la suma de un real con un número complejo es un número complejo. Pero también lo es conocer resultados de operaciones numéricas, como que $2^{10}=1024$.

### *Conocer distintas representaciones de los números y usar la más adecuada*

Los estudiantes deben conocer que un número se puede expresar de diversas formas y decidir cuál es más apropiada en cada situación.

El uso de materiales manipulativos o de modelos numéricos es una forma de representación y manipulación de los números que permite asociar el empleo del material al uso del número en determinadas situaciones, especialmente en los primeros cursos de primaria. Así, por ejemplo, cuando se trabaje con una situación de orden de los números enteros, la representación de los números como recta o línea numérica permite la asociación del orden numérico con la posición izquierda-derecha.

## Comprensión de las operaciones

La comprensión de las operaciones se refiere a asociar las operaciones con las acciones que le corresponden para poder decidir qué operación realizar para resolverla.

### *Comprender el efecto de las operaciones sobre los números*

Cuando se trabaja con números naturales la suma aumenta, mientras que la resta disminuye la primera cantidad. Como esto no ocurre en los enteros, los estudiantes deben aprender comportamientos diferentes respecto a las operaciones.

### *Elegir el procedimiento más sencillo para operar y usar algoritmos diferentes al estándar*

Esta habilidad enfatiza el conocimiento de los significados de las operaciones y permite a los estudiantes tomar decisiones sobre qué manera es más eficiente para operar en cada situación.

En los primeros cursos, la suma y resta pueden centrarse en propiedades del sistema de numeración y la composición y descomposición de los números. En cursos intermedios, se fomenta el uso de algoritmos no estándar para obtener resultados rápidos y correctos. Más adelante, se anima al estudiante a que decida qué algoritmo es más eficiente para la situación. Una evolución adecuada de esta habilidad lleva al uso eficiente de la calculadora discutiendo sus resultados, y apreciándola como herramienta más efectiva, pero no necesariamente más útil en todas las situaciones.

### *Aceptar diferentes estrategias para resolver problemas que involucren números*

Fomentar el uso de procedimientos diferentes para la resolución de un problema y aceptarlo hace que el estudiante desarrolle diversidad de razonamientos y estrategias para resolver problemas. Esta habilidad favorece interpretaciones personales, así como la importancia de los significados de los conceptos más que los procedimientos.

## Flexibilidad en el cálculo mental y estimado

Frente a la rigidez del cálculo tradicional de lápiz y papel, la flexibilidad en el cálculo mental y estimado, recoge aquellas habilidades que amplían la conexión entre la comprensión de los números y las operaciones.

### *Habilidad para realizar cálculos mentales*

Enfatiza el uso de diversas destrezas para realizar cálculos mentales aprovechando las propiedades de los números y las operaciones. Por ejemplo, extender los hechos numéricos básicos a números de mayor cantidad de cifras, aplicar estrategias particulares a números determinados, descomposiciones y composiciones, etc.

### *Habilidad de usar números de forma flexible para estimar cálculos*

Comenzar por estimar el resultado de una operación, mediante métodos de aproximación, redondeo, traslación, compensación, etc., especialmente en situaciones contextualizadas, es de mucha importancia para poder apreciar la coherencia con los procesos de cálculo que se realicen.

### *Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado*

Un elemento clave de la flexibilidad de cálculo, y del sentido en general, es la toma de decisiones. En la vida real, salvo en situaciones profesionales o científicas, es muy limitado la necesidad de resultados precisos. Entre amigos no se utilizan cantidades exactas, sino que aproximamos casi siempre. El trabajo con problemas y situaciones contextualizadas permite discutir y adaptar las respuestas dependiendo del contexto.

## Síntesis del sentido numérico

Las componentes del sentido numérico resumen aspectos que deben contemplarse de manera coordinada. El desarrollo de cada una de ellas debe apoyarse en las habilidades de las otras. Desde un punto de vista cognitivo, resulta muy difícil que un estudiante avance en una de ellas sin hacerlo en otras. Por tanto, cuando se desarrolla el sentido numérico, se desarrolla:

1. La comprensión de los números, los sistemas numéricos y las relaciones numéricas
2. La comprensión de las operaciones
3. La flexibilidad en el cálculo mental y estimado

No se debe olvidar que se trata de conseguir enlazar la numeración, las operaciones y los símbolos de manera flexible que permita que los números tengan sentido para los estudiantes, mediante la interpretación de cantidades, operatoria variada y, sobre todo, toma de decisiones en situaciones contextualizadas, bien identificando las cantidades y las operaciones con las que resolver o interpretar un problema, o bien, en caso de que no dispongan de un modelo matemático de resolución, buscando estrategias de resolución variadas y siendo conscientes de la validez de las soluciones.

## Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 7-18.

Bednarz, N. Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Kluwer Academic.

Ben-Zvi, D. y Garfield. J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developinf Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3-15). Sringer-Science+Business Media, B. V.

Bruner, J. (2009). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza Editorial.

Burrill, G, y Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in de School Curriculum and in Trainign Teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C Reading (Eds.*), Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Springer Science+Business Media B.V.

Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 109-126). Ediciones Pirámide.

CEMAT (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria. Comité español de Matemáticas. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Macmillan.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Ediciones Pirámide.

Freudenthal, F. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer Academic Publishers.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). FESPM y SAEM THALES.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 128). Routledge.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 26*(6), 6-11.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early* Grades (pp. 5-17). Lawrence Erlbaun Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). The core of Algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal, (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33).Kluwer Academic.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación prim*aria (pp. 151-175). Síntesis.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de la generalidad. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 9*, 14-22.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. En *BOE n. 52,* de 2 de marzo de 2022 (p. 24386-24504). Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. En *BOE n. 76,* de 30 de marzo de 2022 (p. 41571-41789). Madrid: Autor.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 37-54). Editorial Universidad de Granada.

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 147-170). Ediciones Pirámide.

NCTM (2001). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. The National Council of Teachers of Mathematics y Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.

Radford, L. y Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 145-164.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63. doi: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 11-27.

Rico, L. (2016a). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Ediciones Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 153-174). Ediciones Pirámide.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 70*, 48-54.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Ediciones Pirámide.

Shaw, J. M. y Cliatt, M. J. P. (1989). Developing Measurement Sense. In P. R. Trafton (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics: 1989 Yearbook* (pp. 149-155). The National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, F. (2005). *El muro de cristal. Por qué las matemáticas parecen tan difíciles*. Movimiento Cooperativo de Escuela Popular.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Routledge.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.