Las Matemáticas en la educación de personas adultas

Teaching mathematics in the Adults Mathematics Education field

Díez-Palomar, J.
Universidad de Barcelona

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas se ha ido transformando desde una aproximación basada en los conceptos básicos de la aritmética hasta estar basada en un concepto de la alfabetización numérica como práctica social. Las matemáticas forman parte de nuestras vidas. Las personas adultas también somos muy diversas. El currículo de matemáticas en las enseñanzas iniciales y en la secundaria, así como en la educación de personas adultas, parte de todas estas especificidades para desarrollar la competencia matemática y tecnológica. Existen dos modelos de educación de personas adultas: el escolar y el social. La investigación en el ámbito sugiere que el segundo produce mejores resultados de aprendizaje. A nivel internacional, la tendencia es hacia incluir las voces de las personas adultas, contextualizar las situaciones de aprendizaje, y presentar la matemática integrada en la vida cotidiana de las personas.

Palabras clave: Alfabetización numérica, Aprendizaje dialógico, Cognición situada, pensamiento crítico, Práctica social, Diálogo igualitario.

Abstract

Teaching of mathematics in adult education has changed from basic arithmetic a concept of numeracy as a social practice. Mathematics is part of our lives. Adults are also very diverse. The curriculum in mathematics for beginners and middle school, as in adult education, draws on these specificities in order to develop the mathematical and technological competence. There are two models of adult education: the "schooling" model and the social model. Research in the field suggests that the latter produces better learning outcomes. At the international level, the trend is towards including the voices of adults, contextualizing the learning situations, and presenting mathematics as integrated into people's daily lives.

Keywords: Numeracy, Dialogic learning, Situated cognition, Critical thinking, Social practice, Egalitarian dialogue.

¿A QUÉ NOS REFERIMOS CUANDO HABLAMOS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN DE PERSONAS ADULTAS?

Actualmente existe un esfuerzo a nivel internacional por mejorar la enseñanza de las matemáticas que ofrecemos a las personas adultas. La educación de personas adultas (EpA) es un ámbito en sí mismo, diferenciado de otros "niveles" del sistema educativo, que tiene que ver con la propia especificidad de las personas adultas, como tales. La EpA tiene una estructura similar al sistema educativo estándar, que comienza con los niños y las niñas en educación infantil, y llega hasta la formación superior (estudios universitarios de grado y de postgrado). Cuando hablamos de EpA, nos estamos refiriendo a las enseñanzas que corresponden a la educación primaria y la educación secundaria obligatoria (que conducen a la obtención del Graduado de Educación Secundaria, o GES). A partir de aquí se abren las opciones para obtener el grado de bachillerato (de personas adultas), o bien para realizar las pruebas de acceso a la universidad (o ambas opciones), o los ciclos de formación.

La investigación previa aporta evidencias que justifican que las metodologías de trabajo con las personas adultas sean diferentes de las que se emplean en el caso de los niños/as o de los/as jóvenes. Mientras que la investigación educativa y en ciencias del aprendizaje sugiere que existe una "evolución" en el desarrollo de los niños/as, desde que son bebés hasta que alcanzan la madurez, cuando hablamos de las personas adultas estamos trabajando ya con personas con plena capacidad de acción, de pensamiento, de habla, de argumentación, etc.

Como afirma Freire, las personas adultas somos, ante todo, seres de transformación. Toda experiencia nos sirve para cambiar nuestras estructuras cognitivas. La "plasticidad", que Kandel define como la capacidad de las neuronas para generar nuevas sinapsis (nuevas conexiones) y nuevas redes neuronales (Kandel et al., 2000), es siempre vigente a lo largo de toda la vida de las personas. Siempre estamos creando nuestras sinapsis; por tanto, siempre estamos aprendiendo. Todas nuestras experiencias, sean las que sean, producen cambios físicos en nuestro cerebro (nuevas sinapsis), que son permanentes en el tiempo, y forman parte de nuestra identidad (de nuestro yo en términos de Mead -2015-).

Los procesos psicológicos superiores (el habla, el conteo, el cálculo, el razonamiento, la planificación, la anticipación, entre otros) ya se han desarrollado, como resultado de múltiples interacciones que se han ido encadenando a lo largo de la vida, en diferentes contextos. Todas estas interacciones previas nos dotan de un cúmulo de conocimientos que hemos ido aprendiendo a lo largo de nuestras vidas, cada vez que resolvemos un problema, cada vez que vemos a otra persona resolver un problema, cada vez que hablamos, preguntamos, discutimos, compartimos, nuestros pensamientos, nuestros saberes, nuestros conocimientos, nuestras conjeturas, nuestras hipótesis, con otras personas (presentes o a través de algún medio de comunicación, como los libros, las páginas web, los medios audiovisuales, etc.).

La alfabetización numérica

En el ámbito del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a las personas adultas (*adults learning mathematics*) el concepto clave es el de *numeracy*. Durante las últimas cuatro décadas la investigación sobre alfabetización numérica ha avanzado mucho.[1] Hemos pasado de entenderla como un conjunto de habilidades aritméticas, a una práctica social integrada en nuestra vida cotidiana (Hoogland, Auer, Díez-Palomar, O'Meara, y van Groenestijn, 2019).

Figura 1. Desarrollo conceptual del concepto de numeracy elaborado en el marco del proyecto CENF (Common European Numeracy Framework) (ERASMUS +, 2018-21)

Actualmente el consenso en torno a la encuesta internacional PIAAC define *numeracy* como:

> La alfabetización numérica consiste en acceder, utilizar y razonar críticamente con contenido matemático, información e ideas representadas de múltiples maneras para participar y gestionar las demandas matemáticas de una variedad de situaciones en la vida adulta. (Tout et al., 2021, p. 93)

La alfabetización numérica de las personas adultas presenta cuatro dimensiones clave:

– Procesos cognitivos
– Contenidos

1. Para más información sobre la evolución del concepto de *numeracy* se puede consultar van Groenestijn (2002), Hoogland, Díez-Palomar (2021), o Tout (2020). Se han realizado varias encuestas internacionales que han establecido el marco conceptual de este término, entre las que destacan YALS (1986), NALS (1992), IALS (1992), ALL (1999), PIAAC (2011-2012, 2014-2015, 2017, 2019-2023).

– Representaciones
– Contextos

El concepto de *comportamiento numérico* (*numerate behaviour*) creado por el *ALL Numeracy Group* en 1999 fue redefinido recientemente por el *Numeracy Expert Group* encargado de desarrollar el marco actual para la alfabetización numérica de las personas adultas (Tout et al., 2021), en base a esas cuatro dimensiones.

Tabla 1. Prácticas y comportamientos de alfabetización numérica. Factores clave y sus componentes. PIAAC. (OECD, 2021, p. 94-95)

1. Acceder, usar y razonar críticamente
   - Acceder y evaluar situaciones matemáticamente (evaluar, identificar, acceder y representar)
   - Actuar sobre y usar las matemáticas (ordenar, contar, estimar, computar, medir, graficar, y dibujar)
   - Evaluar, reflexionar de manera crítica, emitir juicios (evaluar, reflexionar, justificar, y explicar)
2. Con contenido matemático
   - Cantidades y números
   - Espacio y forma
   - Relaciones y cambio
   - Datos y azar
3. Representar en múltiples formas
   - Texto o símbolos
   - Imágenes de objetos físicos
   - Información estructurada
   - Aplicaciones dinámicas
4. Para involucrar en y gestionar las demandas matemáticas de diversas situaciones de la vida cotidiana en la vida adulta:
   - Personales
   - Laborales
   - Societales / comunitarias

La capacidad de alfabetización numérica de una persona adulta se basa en la activación de algunos factores y procesos habilitadores:

- Conocimiento contextual/del mundo y familiaridad
- Habilidades de alfabetización (*literacy*)
- Disposiciones, creencias y actitudes
- Prácticas relacionadas con la alfabetización numérica y experiencia

Cualquier currículum de matemáticas en EpA tendría que servir para lograr promover ese comportamiento numérico de las personas adultas, de manera crítica.

Retos de la enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas

Cuando un docente (o futuro docente) tiene que planificar sus clases para enseñar matemáticas en un centro de educación de personas adultas, se enfrenta a varios retos, de naturalezas diferentes. Como hemos visto antes, las personas adultas cuando llegan al centro educativo no lo hacen como *tabula rasa*; al contrario, todas las personas tenemos múltiples experiencias en un mundo que está repleto de números, cantidades, formas, en el que nos tenemos que ubicar en el tiempo y en el espacio, tomar decisiones, realizar previsiones, y otros muchos procesos que fácilmente podemos relacionar con las matemáticas y el pensamiento matemático. Además, en el caso del Estado Español, las personas que se dedican (o se van a dedicar) a la docencia en la educación de personas adultas se enfrentan a una gran disparidad de contextos, públicos, etc., puesto que la enseñanza de adultos en nuestro país se encuentra muy fragmentada y existen grandes diferencias entre regiones, e incluso entre centros ubicados en un mismo municipio, en todos los sentidos.

Actualmente, algunos de los principales retos que nos podemos encontrar son:

- El contenido
- La evaluación
- El uso de las tecnologías

¿Qué contenido tenemos que enseñar?

Como hemos visto más arriba, existe un consenso general en torno a lo que se considera “alfabetización numérica.” Desde finales de los años noventa en todos los marcos de alfabetización numérica de los programas internacionales que se han sucedido hasta la fecha siempre aparecen los siguientes contenidos (Tout, 2000):

- Cantidades y numeración (p.e., sentido numérico, conteo, cantidades, sistemas de numeración como el romano, el árabe-hindú, propiedades de los números, agrupación, concepto de base numérica, relaciones numéricas, operaciones aritméticas, la divisibilidad, reparto, tipos de números, números en contexto, redondear cantidades, proporcionalidad, etc.)
- Dimensión, forma y medida (p.e., identificación de polígonos, de cuerpos geométricos, la medida como geometría, medición, unidades de superficie, de volumen, medidas en contexto, conversión de unidades, órdenes de magnitud, relaciones, representaciones espaciales, escalas, visualización, movimiento sobre el plano y en el espacio, etc.)

– Patrones y relaciones (p.e., series, sucesiones, regularidades, generalizaciones, etc.)
– Datos y azar (p.e., uso de tablas, gráficos, estadística descriptiva, sucesos aleatorios, predicciones, distribuciones de probabilidad, pensamiento estocástico, inferencia, etc.)
– Cambio (p.e., variables, igualdades y desigualdades, relaciones y funciones, etc.)

En cada programa estos ámbitos generales han sido revisados (algunos se han presentado conjuntamente) y quizás la nomenclatura se ha actualizado, pero los ámbitos matemáticos son, esencialmente, los mismos.

A la hora de pensar en cómo planificar las unidades didácticas para cubrir todos esos contenidos, la investigación en el ámbito de la alfabetización matemática de las personas adultas sugiere poner el énfasis en la utilidad y la conexión de los contenidos matemáticos con la vida cotidiana de las personas. En ese sentido, se acostumbran a destacar la enseñanza de las matemáticas para cuatro usos principales (a partir de los que crear las situaciones de aula, por ejemplo):

– Para propósitos prácticos (p.e., para diseñar, para medir, para construir, etc.) (Boistrup y Keogh, 2017; Galligan, 2013; Hoyles et al., 2001; Keogh et al., 2019; Saló, 2020).
– Para interpretar la sociedad (p.e., interpretar y reflexionar sobre información numérica o gráfica en documentos públicos, en textos, en anuncios, en la prensa, etc.) (Geiger et al., 2018).
– Para motivaciones de organización personal (p.e., gestión de la economía doméstica, organización de un viaje, horarios, etc.) (de Agüero, 2008; Harris, 2000).
– Para aprender (p.e., para realizar un programa de estudios concreto, para hacer cursillos, etc.) (Jarvis, 2004; Safford-Ramus et al., 2016).

A continuación, se adjuntan dos ejemplos para trabajar todos o alguno de los contenidos mencionados más arriba, vinculados a la utilidad que puedan tener.

Ejemplo (con datos procedentes de un diario)

Muchas personas usamos la prensa para informarnos de las noticias del mundo en el que vivimos. A menudo, las informaciones que se publican contienen información numérica y/o matemática, de manera que es preciso usar nuestros conocimientos de matemáticas para comprender el mensaje que se nos quiere transmitir. Existen varios trabajos sobre la lectura de la prensa con un enfoque matemático[2]. La mayor parte

2. Paulos, J. A. (1996). *Un matemático lee el periódico*. Tusquets.

ellos se centran en el pensamiento crítico para interpretar la información que contienen los artículos publicados por la prensa (Evans et al., 2014; Evans et al., 2009).

En un conocido diario podemos ver la siguiente ilustración:

Figura 2. Subida de precios de algunos productos de consumo habitual. Fuente: El País

Con esta ilustración se evidencia la subida de precios de productos cotidianos que está causando la inflación en el segundo trimestre de 2022. La lectura crítica de estos datos implica: reconocimiento de las cantidades, sentido numérico, comparación de dos cantidades (antigua y actual), para apreciar la subida del precio, cálculo de proporciones para tener una idea aproximada de lo que ha supuesto en cada caso la subida de los precios.

Cuando se examinan con más detalle, se aprecia que el porcentaje de incremento del precio del aceite es incorrecto.

Tabla 2. Comparación de los precios antiguos y actuales

	Precio anterior	Precio actual	Diferencia	Porcentaje de incremento
Madalenas	1	2,6	+1,6	$\frac{1,6}{1} \times 100 = 160\%$
Aceite	1,59	3,85	+2,26	$\frac{2,26}{1,59} \times 100 = 142\%$
Guisantes	1,35	2,05	+0,7	$\frac{0,7}{1,35} \times 100 = 52\%$

Ejemplo

Las personas responsables de organizar las salidas de una grupa ciclista están valorando dos opciones para ir desde Barcelona hasta Montserrat. En la opción 1 el itinerario lleva por Sant Feliu de Llobregat, Sant Andreu de la Barca, Martorell, y Olesa de Montserrat (Fig. 3). El segundo itinerario va por Sant Cugat, Rubí, Viladecavalls y Vacarisses ¿Cuál es el mejor?

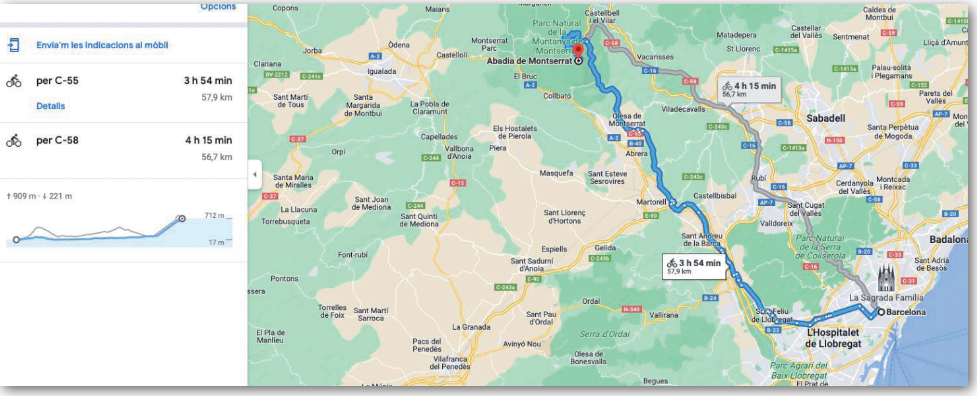


Figura 3. Detalle de la consulta de dos rutas ciclistas en GoogleMaps

Uno de los criterios clave para decidirse es el número total de kilómetros. Otro, el tiempo estimado, que por supuesto va en función del número de kilómetros. En la imagen de la Figura 3 esta información se puede apreciar a simple vista, leyendo la información que sale en el resultado de la búsqueda en Google Maps. Aparecen informaciones numéricas, de distancias en longitud (km) y en tiempo (sobre cada uno de los dos itinerarios). En ambos casos, es preciso considerar unidades de medida (de longitud, tiempo).

Otro criterio, no menos importante, es el perfil de la etapa. Aquí aparece el concepto de desnivel, el cálculo de la pendiente de la carretera, el del desnivel acumulado, etc. En este caso, la información aparece en una representación visual (perfil de la etapa). Cuando seleccionamos cualquiera de los dos itinerarios, aparece información más precisa.

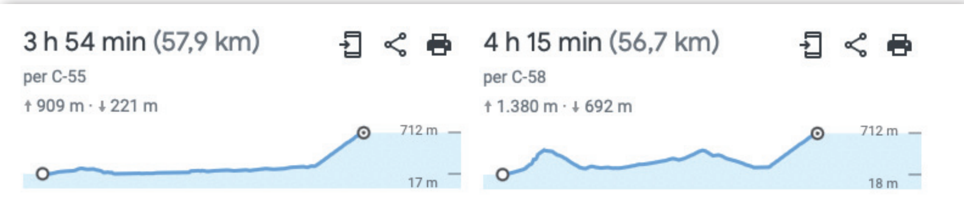


Figura 4. Detalle de la consulta de dos rutas ciclistas en GoogleMaps

¿En cuál de ellos hay más nivel acumulado? ¿Cómo lo podemos calcular?

Por otro lado, el perfil no significa que a lo largo del trayecto no haya rampas, cuyo "efecto" queda diluido en el cómputo global de lo que se asciende, y de lo que se desciende. Hasta Monistrol las rutas son diferentes. A partir de Monistrol el camino ya es el mismo. Dos miembros históricos de la grupa, que conocen ambas rutas, saben que la peor rampa del itinerario 1 (antes de llegar a Monistrol) es un punto donde la pendiente es del 26% durante 115 metros. En cambio, en la segunda ruta la peor rampa es del 27%, durante 92 metros.

Aquí tenemos otra oportunidad para usar las matemáticas, y hablar con cálculo de la pendiente como relación entre el desnivel y la distancia horizontal que hemos recorrido.

$$\frac{Distancia\ en\ vertical}{Distancia\ en\ horizontal} \times 100 = Pendiente\ (\%)$$

¿En cuál de las dos rampas se han ascendido más metros? ¿Qué es mejor, una rampa del 26% durante 115 metros, o una del 27% pero más corta?

La decisión también puede depender del cómputo global. Con un software especial, los defensores de cada itinerario presentan los gráficos de la Fig. 5.

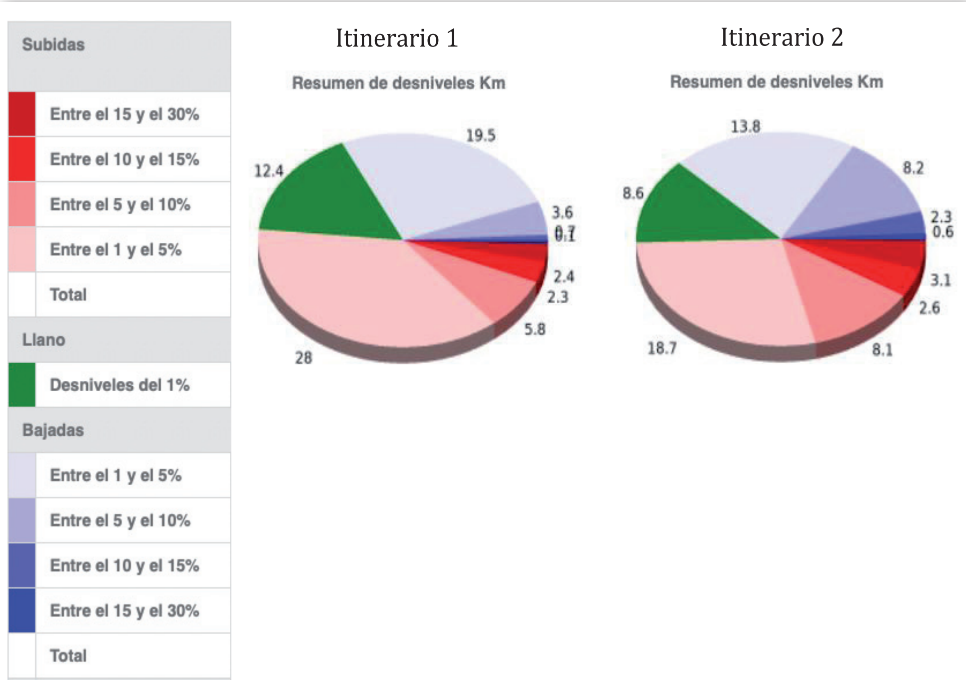


Figura 5. Representación de los desniveles de ambas rutas. Fuente: IBP index

La decisión final es difícil. ¿En cuál de los dos itinerarios hay más subida? ¿Es suficientemente grande la diferencia para aconsejar uno por encima del otro? ¿Son las diferencias en la dureza de las subidas un criterio "definitivo" para escoger uno de los itinerarios, y no el otro? Como se puede ver, ejemplos como éste ilustran el uso que damos en nuestras vidas de las matemáticas, en la toma de decisiones en cualquier ámbito de nuestras vidas.

El primer ciclo de PIAAC (2011-18) sugirió basar la implementación de los contenidos curriculares de matemáticas para personas adultas en lo que denominó *facetas*. En concreto, el grupo de expertos de alfabetización numérica definió cuatro facetas que incluían:

- Evaluar
- Identificar
- Acceder
- Representar

En el marco internacional actual de alfabetización matemática de las personas adultas (Tout et al., 2021) estas cuatro facetas han pasado a ser componentes de una dimensión más general que son los *procesos cognitivos*. De acuerdo con la investigación que se lleva realizando durante la última década en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas a personas adultas, resulta mucho más adecuado que el enfoque del currículum de matemáticas sea más orientado al uso de la matemática de forma crítica. En ese sentido, en el marco del PIAAC 2 podemos leer que ahora la orientación es hablar de:

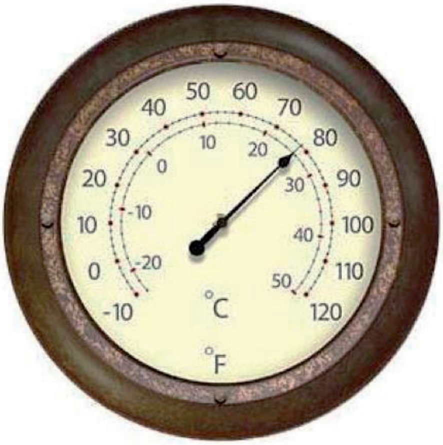
- Acceder y evaluar situaciones matemáticamente (evaluar, identificar, acceder, y representar)
- Actuar sobre y usar las matemáticas (ordenar, contar, estimar, computar, medir, graficar y dibujar)
- Evaluar, reflexionar de manera crítica, juzgar (evaluar, reflexionar, justificar, y explicar).

Por tanto, de acuerdo con las orientaciones internacionales, estos tres elementos tendrían que ser los ejes para diseñar y planificar unidades didácticas orientadas a cubrir los contenidos mencionados más arriba.

Ejemplo

(Ítem liberado de PIAAC, 2013; Evaluación de competencias de adultos (PIAAC). Estímulos de comprensión lectora, cálculo, componentes de lectura y resolución de problemas en contextos informatizados. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. p. 17)

Termómetro
Observe el termómetro



Pregunta 1

Responda a la pregunta: Si la temperatura marcada baja aproximadamente 30 grados Celsius, ¿cuál sería la temperatura en grados Celsius (ºC)?

En este ejemplo, se puede observar que la persona tiene acceder a la información relevante para responder a la pregunta, reconocer que la temperatura se representa en dos escalas de medida diferentes: una en grados Celsius, y otra en grados Fahrenheit; la persona tiene que identificar cuáles son los datos necesarios para responder (el punto que indica la aguja del termómetro); cuál de los valores (de qué escala) es el que se necesita; y para eso tiene que juzgar de manera crítica cuál de las dos representaciones de temperatura (y por tanto, cuál de las dos series numéricas) es la correcta para poder responder a la pregunta.

El currículum de matemáticas para la educación básica de personas adultas actual

Actualmente la enseñanza de personas adultas en España se estructura en la enseñanza básica, que incluye las enseñanzas iniciales y la educación secundaria, y una vez obtenido el *Graduado de Educación Secundaria* (GES) la persona puede continuar con el bachillerato, los ciclos formativos de grado medio, y/o las pruebas de acceso a la universidad.

En el currículum se dice que el desarrollo de la competencia matemática tiene que servir para usar y relacionar los números, operaciones básicas y otras formas de expresión y razonamiento matemático, en la vida cotidiana:

> Contribución al desarrollo de la competencia matemática
> Contribuye a la adquisición de la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.
> Favorece la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social. (BOE-A-2009-10115).

Tal y como hemos visto más arriba, las matemáticas en la EpA tienen que ser entendidas como algo más que aritmética: alfabetizarse matemáticamente hablando implica desarrollar un comportamiento matemático que quiere decir no solo conocer las operaciones básicas, sino que también aplicar las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.

En general, la enseñanza de las matemáticas en la EpA tiene que servir para:

- Dotar a las personas adultas del conocimiento necesario para que sepan usar las representaciones formales (académicas) de los números y relacionarlas con situaciones de la vida cotidiana, para resolver problemas y tomar decisiones sabiendo interpretar con precisión los datos, expresiones y procesos matemáticos.
- Saber usar las representaciones de los objetos matemáticos para comunicarse con otras personas.
- Analizar de manera crítica hechos concretos de la realidad.
- Alfabetizarse científica y matemáticamente.
- Organizar el propio razonamiento y pensamiento abstracto.

En las discusiones actuales en los equipos de expertos que estamos discutiendo las orientaciones del próximo currículum de EpA existe el esfuerzo de tratar de alinear nuestro futuro currículum con las líneas internacionales de la enseñanza de las matemáticas en la EpA. Esas tendencias (CENF, PIAAC, NiP, MiA, etc.) van en la línea de que la educación de personas adultas sirva para reconocer la experiencia previa que las personas ya tienen (en todos los ámbitos académicos, y no solo en la enseñanza de las matemáticas), y que tome esa experiencia como punto de partida para, aprender, ampliar y consolidar aprendizajes formales (académicos).

Por tanto, cuando una persona obtenga el título de GES (Graduado de Educación Secundaria), tiene que ser capaz de satisfacer todos los aspectos anteriores. Ahora bien, teniendo en cuenta la especificidad de las personas adultas (en términos de *target* desde el punto de vista del sistema educativo), es preciso no olvidar nunca que las personas adultas ya tenemos experiencias matemáticas en nuestras vidas, vivimos y usamos objetos matemáticos con cierta solvencia, utilizando estrategias que pueden ser académicas (sobre todo en el caso de las personas que sí hemos seguido un proceso de escolarización), o informales (y no formales), en el caso de las personas que no tuvieron la oportunidad de ir a la escuela. Los/as docentes de EpA deben tener en cuenta esta realidad, al igual que la concreción del currículum oficial.

De acuerdo con el currículum actual (y a la espera de que se publique el nuevo), los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la EpA son:

> 8. Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
> 9. Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, y formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática.
> 10. Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas.
> 11. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos para describir la realidad. (BOE-A-2009-10115)

Los currículums de matemáticas de personas adultas actuales de la mayor parte de países ponen el énfasis en el uso de las matemáticas como una práctica social (Yasukawa et al., 2018).

En Europa tenemos algunos ejemplos avalados por la investigación previa en el ámbito, como el currículum enmarcado por el proyecto *Common European Numeracy Framework* (Hoogland, 2018-2021), que integra varios de los elementos que ya habían sido contrastados en *Mathematics in Action* (van Groenestijn y Lindenskov, 2007) o *Matemáticas para la educación de personas adultas* (Díez-Palomar et al., 2002).

Los contenidos del currículum de matemáticas para personas adultas actual

El currículum de matemáticas en nuestro país se organiza en torno a los siguientes descriptores de contenidos:

– Números y operaciones
– Medida
– Geometría
– Tratamiento de la información, azar y probabilidad

La tabla 3 desglosa estos descriptores de manera concreta.

Tabla 3. Contenidos de la enseñanza de las matemáticas en EpA de acuerdo con la normativa vigente

Enseñanzas iniciales I	Enseñanzas iniciales II	Enseñanza Secundaria
Bloque 1. Números y operaciones. Números naturales. Ordenación, operaciones con números naturales. Resolución de problemas y aplicación en la vida cotidiana. El sistema de numeración decimal. Números racionales y decimales. Paso de fracción a decimal. Operaciones con números racionales y decimales. Resolución de problemas y aplicación a la vida cotidiana. Familiarización con el uso de la calculadora para la realización de operaciones elementales. Bloque 2. La medida: Estimación y cálculo de magnitudes. Unidades de medida: Longitud, masa, capacidad y tiempo. Unidades de medida convencionales y no convencionales. Bloque 3. Geometría. Identificación y clasificación de elementos geométricos. Aplicación de estos conocimientos a los objetos del entorno. Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida diaria. Obtención y utilización de información proveniente de gráficos estadísticos relativos a fenómenos cotidianos. Lectura e interpretación de mapas y planos que impliquen el uso de escalas sencillas.	(ámbito científico-tecnológico) Profundización en los números naturales, decimales y racionales y sus operaciones. Su uso en actividades cotidianas. Números enteros (positivos y negativos). Operaciones con números enteros. Divisibilidad. Múltiplos y divisores. Números primos y compuestos. Expresión de partes utilizando porcentajes. Aplicación en situaciones o problemas habituales; por ejemplo en descuentos, capacidades, encuestas e informaciones sobre temas de actualidad. Profundización en las unidades de medida, longitud, masa, tiempo y capacidad. Medidas de superficie y volumen. Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos. Las medidas de ángulos. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medirlos. La representación elemental en el plano y el espacio, escalas y gráficas sencillas. Uso de sistemas de referencia. Uso de planos del barrio o de la localidad. Proporcionalidad geométrica: introducción a la semejanza. Aplicaciones y reducciones. Distintas formas de representar la información. Tipos elementales de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la construcción de gráficos. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.	Modulo 1 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 2. Números y álgebra. Bloque 3. Funciones y gráficas. Bloque 4. Herramientas tecnológicas. Bloque 5. Los modelos y la medida. Modulo 2 Bloque 1. La resolución de problemas científicos y tecnológicos. Bloque 2. Números y álgebra. Bloque 3. Estadística y probabilidad. Nivel 2 Modulo 3 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 3. Números y álgebra. Bloque 4. Geometría. Bloque 5. Estadística. Modulo 4 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 3. Economía de lo cotidiano. Bloque 4. Funciones y gráficas. Probabilidad.

La presentación de estos contenidos difiere según sea el modelo didáctico adoptado. En la educación de personas adultas existen dos enfoques didácticos principales: el escolar y el modelo social.

El primer enfoque presenta los contenidos haciendo un paralelismo con la educación de los niños y de las niñas. Por ejemplo, de acuerdo con Gelman y Gallistel (1986), para desarrollar lo que Baroody y otros han denominado "sentido numérico" hay que adquirir y comprender los principios del recuento:

– Principio de la correspondencia uno-a-uno: asignar un número a un objeto de una colección de objetos, sin dejarse ninguno, ni contarlo dos veces.
– Principio del orden estable: utilizar la serie numérica en el orden correcto (n, n+1, (n+1)+1… (n+1)+n).
– Principio de la cardinalidad: reconocimiento del último numeral de un conjunto como la cantidad de objetos en dicho conjunto.
– Principio de la abstracción: reconocimiento que los principios anteriores se aplican a cualquier tipo de conjunto de objetos, independientemente del tipo de objeto.
– Principio del orden irrelevante: en un conjunto de objetos, no importa por cual se comience a contar, el cardinal del conjunto siempre será el mismo.

Todas las personas adultas a lo largo de nuestras vidas hemos podido adquirir todos estos principios, incluso quienes no han tenido la oportunidad de ir a la escuela y en la vida adulta hacen la opción de ir a la EpA. Por tanto, el currículum de matemáticas de las enseñanzas iniciales no debe comenzar con aspectos tales como la compresión y el uso del recuento, o el significado de las cantidades discretas, por ejemplo. Al contrario, se recomienda dar un enfoque social del número y de sus usos.[3]

Ejemplo (de materiales de enseñanza de niveles iniciales, ámbito científico tecnológico, de la Junta de Andalucía)

A continuación, te ofrecemos algunas cantidades numéricas. Indica cuál de ellas se corresponde con cada una de las siguientes cuestiones. Utiliza la calculadora.

376 – 98.760 – 575 – 8.700 – 168 – 71.175 – 4.200

3 En Díez-Palomar (2020) se presenta el caso de una discusión en una tertulia matemática dialógica donde las mujeres participantes reflexionan sobre diferentes sistemas de numeración, y el concepto de base numérica, usando como referente sus recuerdos del uso de monedas cuyas fracciones se solían utilizar usando bases numéricas diferentes de la habitual del sistema numérico decimal. El ejemplo usado se remite a las pesetas, y al uso habitual de la unidad de "duro" como 5 pesetas, pero que a veces se usaba incluso más que la propia "peseta" (unidad decimal), para referirse a precios o a cantidades (p.e., cinco duros por veinticinco pesetas, veinte duros por cien pesetas, etc.).

- Tengo 564 euros y me gasto la tercera parte en un billete de avión. ¿Cuánto me sobra? _____ euros.
- Vendo mi moto que costó 2.300 euros por la cuarta parte de su precio. ¿Por cuánto la vendo? _____ euros.
- Realizo una llamada desde mi móvil cuyo coste es 14 céntimos por minuto. Si he estado hablando durante 12 minutos ¿Cuánto me costarán? ______ céntimos.
- Ahorro mensualmente 175 euros. ¿Cuánto he ahorrado en dos años? ______ euros.
- Recorro diariamente 65 kilómetros en coche. ¿Cuánto supone al cabo de tres años? _____ kilómetros.
- Pago la letra de mi coche por un importe de 145 euros al mes. ¿Cuánto supone al cabo de 5 años? _______ euros.
- En mi casa se gastan mensualmente 8.230 litros de agua. ¿Cuánto se gasta al año? _______ litros.

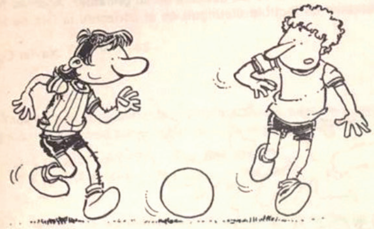
El modelo social se basa en buscar las conexiones de los contenidos académicos con las situaciones de la vida cotidiana, partiendo de la "psicología de la persona adulta" como sujetos que ya cuentan con experiencias previas. Dentro del modelo social destaca el enfoque comunicativo, caracterizado sobre todo por la inclusión de las voces de todas las personas adultas participantes.

A mediados de los años 80, Ramón Flecha, fundador de la escuela de personas adultas de La Verneda – Sant Martí, juntamente con un grupo de personas adultas, y profesionales de la didáctica de las matemáticas, crearon un libro de matemáticas para personas adultas como resultado de intensos diálogos entre todos ellos y ellas (Lemos et al., 1982). Este libro, reeditado años más tarde (Díez-Palomar, et al., 2002), incorpora enfoques novedosos en aquella época, que luego hemos visto en materiales posteriores que han caracterizado la enseñanza de las matemáticas en la EpA, como el uso de recortes de diario para trabajar la alfabetización numérica crítica, el uso de boletos de la quiniela como material para trabajar las probabilidades, la explicación de la base de un sistema numérico usando la representación de los circuitos eléctricos de las calculadoras para representar la construcción de números decimales a partir de su equivalente en binario, creando una "continuidad" con la *formación ocupacional* (de electrónica, por ejemplo), o la encuesta sobre la sexualidad femenina, para trabajar la estadística. Todos los temas se presentan de manera contextualizada, y parten de las propuestas de las personas adultas, de aquello que les interesa, que tiene sentido en sus vidas, y para lo que las matemáticas les da una herramienta para comprender mejor y saber tomar mejores decisiones. Esta forma de enseñar la matemática fue avalada por investigaciones como el proyecto *Numeracy* (1993), en el que se examinaron las habilidades numéricas de personas como, por ejemplo, los trabajadores de la SEAT en Martorell, y que luego han contribuido a lo que se llama *numeracy at the workplace* (FitzSimons, 2013; FitzSimons y Coben, 2009).

Ejemplo (procedente de la primera edición del libro *Matemáticas en las escuelas de adultos* -1982-, p. 24)

2) Los números enteros y el fútbol

Las clasificaciones de algunas competiciones deportivas suelen presentarse también en puntos positivos y negativos, es decir, en números enteros. Por ejemplo:



Jornada 33:

EQUIPOS	Ptos.	
1. Real Sociedad	45	+13
2. Barcelona	44	+12
3. Real Madrid	44	+10
4. Athlétic	40	+6
5. Valencia	38	+4
6. Betis	35	+1
7. Osasuna	34	
8. Zaragoza	34	
9. Sevilla	33	+1
10. At. Madrid	32	
11. Español	32	−2
12. Valladolid	32	
13. Rácing	30	−2
14. Las Palmas	29	−5
15. Spórting	27	−5
16. Cádiz	27	−7
17. Hércules	26	−6
18. Castellón	12	−20

Cada nueva jornada va variando la clasificación de acuerdo con las siguientes normas:

— cuando un equipo juega en casa
- si gana se queda igual
- si empata obtiene 1 punto negativo
- si pierde obtiene 2 puntos negativos

— cuando un equipo juega fuera
- si gana obtiene 2 puntos positivos
- si empata obtiene 1 punto positivo
- si pierde se queda igual

Los resultados de la jornada 34 han sido:

RESULTADOS

Spórting, 4; Las Palmas, 0
Castellón, 0; Cádiz, 1.
Barcelona, 2; Betis, 2.
Rácing, 3; Real Madrid, 2.
R. Sociedad, 2; Ath. Bilbao, 1.
At. Madrid, 2; Osasuna, 1.
Sevilla, 4; Español, 1.
Hércules, 2; Valencia, 2.
Valladolid, 2; Zaragoza, 1.

a) ¿Qué equipos se han quedado igual? ¿Cuáles han obtenido 1 punto positivo? ¿Cuáles 2 positivos? ¿Cuáles 1 negativo? ¿Cuáles 2 negativos?

b) Ve calculando uno a uno los puntos positivos o negativos que tendrán ahora el Betis, Valencia, Cádiz, Barcelona, Hércules y Castellón.

c) La tabla que vas a ver ahora indica los partidos que cada equipo ha ganado, empatado o perdido en casa o fuera durante las 34 jornadas de liga (J: jugados, G: ganados, E: empatados, P: perdidos).

Primera división

EQUIPOS	Ptos.	Casa J.	Casa G.	Casa E.	Casa P.	Fuera J.	Fuera G.	Fuera E.	Fuera P.	Total J.	Total G.	Total E.	Total P.
1. Real Sociedad	47	17	15	2	0	17	5	5	7	34	20	7	7
2. Barcelona	45	17	14	2	1	17	5	5	7	34	19	7	8
3. Real Madrid	44	17	13	4	0	17	5	4	8	34	18	8	8
4. Athlétic	40	17	14	2	1	17	4	2	11	34	18	4	12
5. Valencia	39	17	15	1	1	17	2	4	11	34	17	5	12
6. Betis	36	17	12	2	3	17	3	4	10	34	15	6	13
7. Sevilla	35	17	10	5	2	17	5	0	12	34	15	5	14
8. At. Madrid	34	17	12	2	3	17	3	2	12	34	15	4	15
9. Valladolid	34	17	12	3	2	17	1	5	11	34	13	8	13
10. Zaragoza	34	17	8	8	1	17	5	0	12	34	13	8	13
11. Osasuna	34	17	10	3	4	17	4	3	10	34	14	6	14
12. Rácing	32	17	11	1	5	17	1	7	9	34	12	8	14
13. Español	32	17	10	2	5	17	3	4	10	34	13	6	15
14. Spórting	29	17	9	3	5	17	1	6	10	34	10	9	15
15. Las Palmas	29	17	9	5	3	17	2	2	13	34	11	7	16
16. Cádiz	29	17	12	3	2	17	1	0	16	34	13	3	18
17. Hércules	27	17	7	3	7	17	4	2	11	34	11	5	18
18. Castellón	12	17	2	5	10	17	1	1	15	34	3	6	25

Se trata ahora de calcular a partir de los datos de esa tabla los puntos positivos o negativos que tiene ahora cada equipo. Nosotros ponemos como ejemplo 3 y vosotros resolvéis los 15 restantes.

24

Figura 6. Detalle de la página 24 del libro *Matemáticas en las escuelas de adultos*

A inicios de los años 2000, con el paso ya decidido de la idea de la alfabetización numérica reducida a la aritmética, al conocimiento matemático para hacer frente a la vida cotidiana, los materiales de personas adultas comienzan a incorporar la idea de contexto y las matemáticas *situadas* (en términos de Lave y Wenger -1991-). Por ejemplo, en el proyecto MiA (*Mathematics in Action*), en el que participaron Dinamarca, Hungría, los Países Bajos y España, encontramos actividades como “Food- Energy” (sobre el gasto calórico y el cálculo para crear dietas saludables ajustadas a las necesidades calóricas de cada persona según su actividad / ocupación diaria), el diseño del presupuesto doméstico (incluyendo formas de tabular los datos y graficarlos, incluyendo la lectura e interpretación de dichos gráficos y tablas), cálculo de precios rebajados de acuerdo con un determinado porcentaje de rebaja, uso de porcentajes también en las recetas culinarias, etc.

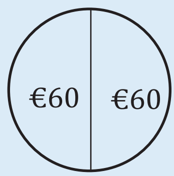
Ejemplo (procedente de *Mathematics in Action*, -2007- p. 72)

Maestro: Un folleto de una óptica dice: “Esta semana 50% de descuento en todas las gafas.” ¿Cuánto tenéis que pagar por unas gafas de 120 euros? Coged un papel. Haced los cálculos en el papel. Quiero saber cómo lo habéis resuelto.

Durante la interacción, aparecen tres respuestas: 75 euros, 70 euros, y 60 euros.

Maestro: ¿Por qué pensáis que son 70 euros? ¿Cómo lo habéis calculado? ¿Qué pensáis? ¿Lo podéis hacer otra vez? Os queremos escuchar. ¿Lo podéis escribir en la pizarra? Lo queremos ver.

En la pizarra se escriben estas tres respuestas.

Respuesta 70 euros o 75 euros	Respuesta 60 euros	Respuesta 60 euros
Soraya: €120 – €50 = €70 Carla: Creo que son €75. No te sé explicar por qué. No lo recuerdo. *Carla probablemente calculó €120 – €50, pero tiene problemas con la resta y no lo sabe explicar.*	Joyeuse: $12\cancel{0} \times \frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 60$ €120-€60=€60 50% es multiplicar por 50 y luego dividir entre 100. He aprendido a tachar el cero, no sé por qué.	Nhung  50% es la mitad – la mitad, o sea, la mitad del precio = a la mitad. La mitad de €120 es €60.

CLAVES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EPA: APRENDIENDO MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA PRÁCTICA

Las personas adultas tienen muchas y diversas responsabilidades en sus vidas. Son padres, madres, abuelos, abuelas, vecinos/as, ciudadanos/as, consumidores/as, empleados/as, voluntarios/as, miembros/as de algún club, etc. Y en todos esos roles tienen que hacer frente a diferentes situaciones en las que las matemáticas están presentes. Mieke van Groenestijn en su tesis doctoral (2002), y más tarde en el proyecto MiA (2007), sugiere que la enseñanza de las matemáticas a las personas adultas tiene que servir para darles (darnos) herramientas para desempeñar dichos roles con solvencia. Groenestijn propone una serie de consideraciones a tener en cuenta a la hora de diseñar y/o implementar un currículum de matemáticas para personas adultas, como resultado de diversas investigaciones sobre el aprendizaje de las personas adultas en situaciones de vida reales (Lave et al., 1984; Resnick, 1987; Carraher et al., 1988; Lave, 1988; Lave yW Wenger, 1991; Saxe, 1991; van der Kamp y Scheeren, 1996; Noss y Hoyles, 1996; Tuijnman et al., 1997; Greeno et al. 1999) y que durante los últimos veinte años han continuado produciendo evidencias que confirman la propuesta de Groenestijn (2002, 2007).

Las personas adultas son libres para aprender

Éste es un aspecto importante: las personas adultas que acuden a un centro educativo, no lo hacen porque sea obligatorio; lo hacen porque quieren, porque tienen un proyecto de vida, porque quieren tener mejores oportunidades, porque quieren recuperar una oportunidad que la vida les negó en su momento, … Pero, en cualquier caso, están en el aula del centro educativo de manera voluntaria. Y esto es una diferencia muy importante respecto a una escuela de primaria, o un instituto de secundaria.

El aprendizaje sucede en situaciones que son funcionales

Existe una necesidad para aprender. El aprendizaje responde a una serie de necesidades concretas, que emergen de situaciones de la vida cotidiana. Las personas adultas aprenden para resolver problemas reales. El aprendizaje es resultado de resolver esas situaciones. Todo aprendizaje tiene un motivo, no se aprende porque sí. Ahora bien, tal y como dice Groenestijn, esto puede entrañar dos problemas: por un lado, el aprendizaje depende mucho de la persona y de la situación, si no se ve un problema en cierta situación, entonces no se creará el contexto para que surja el aprendizaje. Por otro lado, el relacionar el aprendizaje con un contexto específico crea el problema de la transferencia hacia otro tipo de contextos. Este problema ha sido discutido más tarde por Evans (2002).

El aprendizaje en la EpA se caracteriza por utilizar materiales que son auténticos

En la investigación en didáctica de las matemáticas se ha discutido mucho a propósito de la autenticidad (o no) de los materiales que usamos en el aula (Turner et al., 2009). Esto es particularmente cierto en el caso de la Epa. Mientras que en la educación primaria o en la secundaria los niños/a suelen utilizar libros de texto, esquemas, o materiales manipulativos, en el caso de la EpA es más frecuente encontrar situaciones reales y materiales auténticos. Por ejemplo, en el libro de *Matemáticas. Educación de personas adultas* (Díez-Palomar et al., 2002) encontramos extractos de cuentas bancarias auténticas, boletos de la lotería de Navidad de verdad, recortes de diario, o nóminas auténticas. Este tipo de materiales facilita el aprendizaje de las matemáticas para las personas adultas. Se ve la utilidad que tienen, a la vez que son un buen recurso para el aprendizaje porque tienen sentido. La discusión que se produce en el aula sirve también para desarrollar un sentido crítico en la interpretación y comprensión de los objetos matemáticos implícitos en dichos materiales. Desde la investigación este enfoque ha sido ampliamente validado, con propuestas como las del learning-by-doing-by-doing (Carlson y Sullivan, 1999; Frijn et al., 2014; Martínez, 2018; Schank, 1996) y el learning-for-doing (FitzSimons, 2004).

Toda situación de aprendizaje está determinada socio-culturalmente

Los trabajos de Vygotksy (1978) ya mostraron en el primer tercio del siglo XX que el aprendizaje es un hecho social que ocurre en un contexto cultural. Esto es cierto para cualquier episodio de aprendizaje, y también lo es en el caso de las personas adultas. Las investigaciones de Saxe (1991) muestran que el aprendizaje está social e históricamente situado. Díez-Palomar (2020) muestra ejemplos en los que mujeres que participan en una tertulia dialógica de matemáticas recurren a sus recuerdos para encontrar unidades de medida que se usaban en sus respectivos pueblos, cuando eran niñas. El trabajar con las personas adultas en el aula con un enfoque basado en el diálogo igualitario abre la puerta a enriquecer las experiencias de aprendizaje incluyendo en las discusiones esos conocimientos.

El aprendizaje se basa más en la "cognición compartida" que en la "cognición individual"

Los trabajos de Resnick (1991), Wertsch (1991), o Hutchins (2000) prueban que el aprendizaje es resultado de un proceso de cognición compartido con otras personas. Cualquier muestra individual de aprendizaje siempre es resultado de haber compartido con otras personas el proceso de aprendizaje. A través de la discusión de materiales (libros de texto, problemas, actividades, etc.), las personas somos capaces de generar conocimiento. Hutchins (2000) uso el concepto de "cognición distribuida" para ilustrar el hecho frecuente que ante un problema cuando es una única persona la que lo aborda, a menudo puede encontrarse con dificultades por no saber encontrar todos los elementos necesarios para dar con la respuesta. En cambio, cuando el mismo problema se presenta ante un grupo de personas, que lo pueden discutir, y compartir así sus diferentes conocimientos, experiencias, etc., creando así una suerte de "zona de desarrollo próximo", entonces entre todas son capaces de resolver el problema, aprendiendo las unas de las otras.

El aprendizaje ocurre por colaboración

Groenestijn (2002) dice que el aprendizaje en práctica ocurre vía *mostrar-imitar-participar-aplicar*. Con esas cuatro palabras en realidad lo que explica es que en el caso de las personas adultas no es necesario crear contextos de aprendizaje específicos; las personas adultas comparten de manera espontánea cuando tienen que resolver una tarea, igual que ocurre en la vida real, cuando en el trabajo, o en casa, tienen que resolver una situación: buscamos siempre la ayuda, apoyo, consejo, o simplemente a "alguien que nos escuche", porque sabemos que ese apoyo sirve para resolver la tarea en la que estamos. De hecho, Vygotsky (1978) ya mostró evidencias de que el propio proceso de verbalización (de explicar a alguien el problema sobre el que estamos trabajando) es una forma no solo de comunicarlo, sino de acotarlo y, en última instancia, de comprenderlo y buscar una respuesta al mismo. Se trata de uno de los procesos psicológicos superiores más cruciales desde el punto de vista del aprendizaje (de niños/as y de personas adultas).

El aprendizaje es una constante negociación de las "reglas del juego."

En la vida real las personas adultas contantemente ajustamos las reglas a la situación que tenemos que resolver en cada momento. Ejemplos claros son, por ejemplo, el uso de recetas de cocina. Cuando vienen a casa 5 personas en vez de las 4 para la que teníamos los ingredientes de la receta, lo que hacemos es ajustar las cantidades de la receta para acomodar a una persona más en la mesa, y que no se quede sin comer. Este hecho marca la forma en que hacemos clase en los centros de EpA, porque las personas adultas no se quedan pasivas esperando a que les demos las fórmulas (las recetas) para resolver los problemas del libro, sino que muchas veces miran cómo ajustar la situación a su experiencia.

El enfoque dialógico en la enseñanza de las matemáticas

Hemos hablado de que existen dos modelos principales en la enseñanza en la EpA: el modelo escolar, y el modelo social.

Éste último es el que la investigación en el ámbito de la EpA ha mostrado que mejores resultados da. Los dos teóricos más importantes cuyos trabajos sustentan este modelo son Freire (1970a, 1970b, 1998, 2000) y Flecha (1997, 2000).

Ramón Flecha es el creador del *Aprendizaje Dialógico* (AD), que es una de las teorías educativas que más se usan en la EpA en todo el mundo. El AD se basa en siete principios:

– Diálogo igualitario
– Inteligencia cultural
– Solidaridad
– Transformación
– Dimensión instrumental
– Creación de sentido
– Igualdad de las diferencias

Esta teoría educativa es la base de lo que se conoce como matemática dialógica (Díez-Palomar y Cabré, 2015; Díez-Palomar, 2017; Díez-Palomar et al., 2021), y da aportaciones para enfocar la práctica de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, siguiendo los mencionados principios.

Diálogo igualitario

Este principio se refiere a la igual oportunidad que debe tener cada persona para participar en el diálogo que se crea cuando se propone resolver conjuntamente una actividad matemática. Parte del hecho de que toda persona tiene capacidad de habla y acción, como una capacidad innata por el simple hecho de nacer "persona." A diferencia de otras formas de vida, las personas nos comunicamos, sea oralmente, mediante textos, por signos, o por cualquier otro medio de comunicación. Esta capacidad es la base sobre la que autores como Habermas (1981, 1985) sustentan su teoría de la acción comunicativa. Habermas (1981, 1985) estudió el habla y los diferentes actos de la comunicación. En su estudio intentó dar con las condiciones que determinan que un acto de habla sea aceptable, y señaló que la validez del mismo viene dada por tres aspectos: la pretensión de verdad, la pretensión de rectitud normativa y la pretensión de veracidad. Según él, la racionalidad tiene un carácter discursivo porque los actos comunicativos se sustentan sobre la defensa argumentada de las pretensiones de validez. Frente a los argumentos de poder, Habermas defiende el poder de los argumentos, como forma de crear consensos en torno a los enunciados. Flecha afirma que las personas podemos crear consensos cuando usamos el diálogo de manera igualitaria, siendo "igualitario" el hecho de que todas las personas tenemos la capacidad de emitir actos de habla para intercambiar nuestros argumentos basados en pretensiones de validez (verdad, rectitud normativa, y veracidad), de manera que el consenso se alcanza como resultado del acuerdo sobre la validez de esos argumentos, no por la posición de poder que ocupe quién los use. Aplicado a la enseñanza (no solo la de las personas adultas, sino la enseñanza en general), el diálogo igualitario se refiere a que todas las personas que están participando en un episodio de aprendizaje pueden aportar argumentos para sustentar sus afirmaciones, propuestas de resolución de la actividad, etc., de manera que la discusión y el convencimiento del resto del grupo (para llegar al acuerdo) pone de manifiesto las posibles inconsistencias, errores, o aciertos, que haya en los argumentos esgrimidos, y abre la posibilidad de que todas las personas puedan participar y enriquecerse explícitamente de este diálogo, generando pues mejores aprendizajes. Es importante, por tanto, abrir espacios en el aula de personas adultas para que aparezcan oportunidades para el diálogo igualitario, ya sea a partir de la organización de aula, o de cómo gestione el/a docente las dinámicas del aula.

Inteligencia cultural

Existe un gran número de evidencias científicas que prueban que hay más de un tipo de "inteligencia." Vygotsky (1978) y Luria (1976) afirman que los procesos psicológicos superiores se desarrollan por mediación de objetos culturales, como el lenguaje, la escritura o los sistemas de notación matemática. Siguiendo la línea de trabajo de Vygotsky, Scribner y Cole (1978) sugieren que el pensamiento es resultado del uso que hacemos las personas de las herramientas en contextos de práctica e interacción. La inteligencia presenta varias formas, no solo la "académica" o "escolar", sino que también encontramos lo que se denominaría "inteligencia práctica", ligada a situaciones contextuales, de la vida real. En el ámbito de las matemáticas tenemos trabajos clásicos, como el que realizaron Carraher, Carraher y Schlieman (1985) de los *meninos da rua*, o el enfoque de las "matemáticas del supermercado" de Lave (1988). De hecho, tal y como escribe Lave, "básicamente ningún problema en la tienda o la cocina se resuelve en forma de algoritmo académico." Este tipo de estudios ha servido para mostrar que muchas personas adultas llevan al aula del centro de educación otras formas de inteligencia que son diferentes de la que conocemos con "escolar" o "académica." Skemp (1976) propuso los términos de *procedural learning* y *conceptual learning* para distinguir justamente entre estos diferentes "tipos" de inteligencias. Un ejemplo que ilustra este diferente "tipo de inteligencias" lo encontramos en el siguiente enunciado: ¿Cuál es la proporción entre el área de estos dos triángulos?

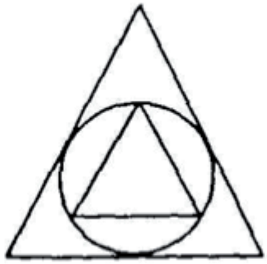


Figura 7. Enunciado propuesto por Skemp para distinguir entre *procedural learning y conceptual learning*

Para alguien que esté pensando en la explicación "escolar", puede resultar evidente que la forma de responder a esta pregunta es primero identificar los lados del triángulo con letras, y luego medirlos con una regla, por ejemplo. Después, tomando las medidas de esos lados, y usando los criterios de semejanza de los triángulos, puede razonar que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Observando el resultado de estas comparaciones es fácil deducir la relación de proporcionalidad entre ambos triángulos. Sin embargo, ésta no es la única manera de responder a la pregunta inicial. Otra persona podría tener la siguiente idea: "voy a girar el triángulo que está dentro del círculo, a ver qué pasa." Y al hacerlo, ocurre lo siguiente:

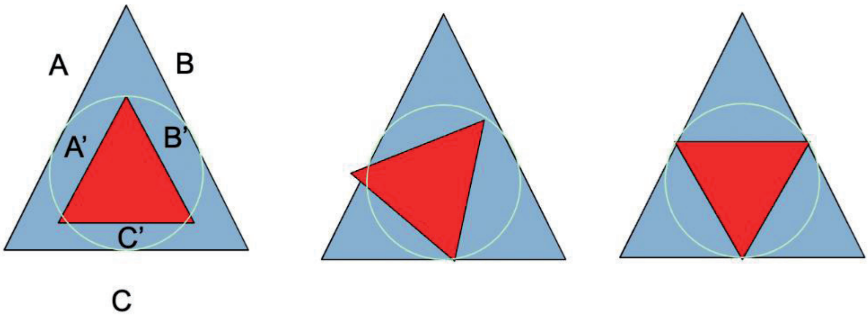


Figura 8. Ejemplo de resolución usando el *procedural learning*

De repente, con un "movimiento de giro" de uno de los triángulos podemos comprobar de manera visual que la relación entre ambos triángulos es que uno es una cuarta parte que el otro. El tipo de "inteligencia" que hemos usado aquí sería más acorde con lo que Scribner denomina "inteligencia práctica." En la EpA este tipo de situaciones ocurre constantemente, porque las personas adultas relacionan todo lo que escuchan en clase con su vida cotidiana (laboral, doméstica, etc.). Existen innumerables ejemplos de procedimientos prácticos matemáticos para realizar tareas y resolver problemas (Saló, 2020; Keogh et al., 2019; Albertí, 2010). Las habilidades comunicativas de las personas (Soler y Flecha, 2010) integran todas estas inteligencias en los actos de habla comunicativos.

Solidaridad

En la investigación educativa se ha hablado mucho sobre los actores que participan en la práctica de enseñanza y aprendizaje. Bruner (Wood, Bruner y Ross, 1976) propuso la teoría del andamiaje (*scaffolding*). Pero más tarde, los resultados de su investigación le llevaron a reconocer que el proceso de aprendizaje es un proceso intersubjetivo en el que participan todas las personas y en el que todas hacen sus contribuciones. En 1996 propuso el concepto de *comunidades de aprendices mutuos* para referirse al hecho de que todas las personas, a través de la intersubjetividad, aprenden las unas de las otras, de acuerdo con sus habilidades. Estos conceptos nacen de constatar que en la práctica las personas, cuando estamos resolviendo una tarea, si compartimos lo que estamos haciendo con las personas que tenemos al lado, creamos espacios de aprendizaje en los que otros principios como el diálogo igualitario, o la inteligencia cultural, pueden enriquecer los aprendizajes de todos y todas.

Transformación

Freire (1997) escribió que las personas somos "seres de transformación, no de adaptación." Para aprender es necesario transformar el contexto. En la EpA encontramos perfiles de personas muy diferentes, desde jóvenes que abandonaron los estudios, a personas que nunca tuvieron la oportunidad de ir a la escuela, inmigrantes de otros países, refugiados, etc. Las matemáticas tienen que crear universos de posibilidad para aprendizajes de máximos. El currículum tiene que estar basado en las posibilidades que todas las personas tienen de alcanzar los aprendizajes de los contenidos curriculares, no en sus déficits. El *Aprendizaje Dialógico* parte de estas ideas, porque existen muchas evidencias que una educación que Freire llamaría "bancaria" lo que hace es reproducir las desigualdades y etiquetar a las personas. Los estudios del *Interaccionismo Simbólico* de Mead (2015) han mostrado el impacto negativo que tienen las interacciones sobre la agencia y la identidad humanas. La identidad (el *I* en inglés – el *yo*-) es resultado de la interiorización de la imagen que tienen los demás de nosotros/as mismos. A través de prácticas sociales interiorizamos la imagen social de nosotros mismos (el *me* en inglés, -el mí-), y eso marca nuestro *self* (nuestra identidad). En educación Rosenthal y Jacobson (1968) estudiaron este fenómeno al que denominaron *Efecto Pigmalión*, y que puede marcar profundamente la disposición para aprender de una persona concreta. La implementación del currículum que se basa en altas expectativas transforma las oportunidades de aprendizaje. En el ámbito de la didáctica de las matemáticas también tenemos evidencias del mismo fenómeno. Pólya (1945), por ejemplo, escribió en la introducción de su libro *How to solve it* que ofrecer problemas muy fáciles a los y las estudiantes no servía para nada, porque no suponía un reto para ellos y ellas (que es la base del aprendizaje tal y como muestran estudios desde la psicología del aprendizaje, como los de Piaget). En cambio, proponer problemas fuera del alcance de los y las estudiantes, contribuye a generar frustración y fracaso. Ahora sabemos que generar espacios heterogéneos, donde las personas sean muy diversas, y que funcionen en base al diálogo igualitario y a la inteligencia cultural, abre la posibilidad al aprendizaje a través de las cadenas de solidaridad (García-Carrión, 2012) que enriquecen los aprendizajes porque transforman las condiciones de partida.

La dimensión instrumental

Apple en *Escuelas democráticas* (Apple y Beane, 2007) escribió que un currículum democrático incluye la enseñanza del currículum oficial. El enfoque del AD se basa en el criterio del currículum de la competencia y del esfuerzo (frente a los llamados "currículums de la felicidad y de la sociabilidad"). Se trata de ofrecer un currículum de máximos, no adaptado ni rebajado, sino basado en la calidad, en la excelencia, en incluir los mejores aprendizajes en cada uno de los ámbitos del saber. En el caso de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, implica incluir todos los contenidos que aparecen en el currículum oficial, tal y como se menciona en el apartado correspondiente de más arriba. Consiste en superar la oposición entre la dimensión humanista y la dimensión tecnocrática de la educación, en palabras de Freire (1997). Flecha, el creador del AD, lo explica con las siguientes palabras (1997, p. 33): "El aprendizaje instrumental se intensifica y profundiza cunado se sitúa en un adecuado marco dialógico. La capacidad de selección y procesamiento de la información es el mejor instrumento cognitivo para desenvolverse en la sociedad actual (…) La reflexión es imprescindible para comprender con profundidad las tareas a realizar y para tener creatividad en la construcción de nuevas respuestas a los problemas que se van planteando. Cuando el diálogo es igualitario fomenta una intensa reflexión, al tener que comprender los argumentos ajenos y aportar los propios."

La creación de sentido

A inicios del s. XX Weber publicó uno de los libros referentes de la teoría social (y sociológica), *La ética protestante y el espíritu del capitalismo* (1901-1905). En este libro analiza una de las consecuencias más dramáticas de la modernidad, que es la perdida de sentido. Para las personas que acuden a los centros de EpA a aprender, la escuela responde a sus sueños, a sus proyectos personales, y eso es una "creación de sentido." La enseñanza surge de la necesidad, pero también del deseo de aprender, de conocer y crecer intelectualmente hablando. Para ello, es necesario que el currículum sea de calidad, que incluya los saberes matemáticos que nos han legado las personas que vivieron antes que nosotros y nosotras (tal y como vemos en el principio del aprendizaje instrumental), porque esos conocimientos, esos objetos matemáticos, son los que van a generar mayor interés por aprenderlos. Ejemplo de ello son las *tertulias matemáticas dialógicas*, donde se leen libros de matemáticas reconocidos por la comunidad científica internacional como libros de referencia (libros que presentan una "buena matemática", una "matemática de calidad"). Entre las personas adultas de la escuela de La Verneda, que llevan participando varios años en la tertulia matemática dialógica, se aprecian especialmente los libros de historia de las matemáticas, que presentan con rigor los contenidos matemáticos (a veces con textos difíciles, repletos de lenguaje simbólico como fórmulas, teoremas, proposiciones, y formas de representación que incluyen gráficos, tablas, o notaciones de sistemas numéricos históricos en desuso actualmente); pero que son fuente de profundas reflexiones, que enriquecen el aprendizaje más allá de lo que se puede encontrar en un libro de texto de matemáticas de enseñanzas iniciales, por ejemplo (Ocampo, 2021).

La igualdad de las diferencias

Muchos currículums, también los de matemáticas, se basan en el principio de igualdad de oportunidades. Su motivación es ofrecer unos estándares que guíen el diseño de los proyectos educativos de centro, así como el diseño de las planificaciones docentes (secuencias didácticas, criterios de evaluación, materiales, etc.). Sin embargo, la investigación que hemos ido acumulando en educación y teorías del aprendizaje sugiere que ese criterio de igualdad de oportunidades no es suficiente (Flecha, 2014). No sirve cuando el contexto de aula se caracteriza por ser muy diverso; cuando tenemos perfiles de estudiantes (personas participantes en términos de EpA) que son muy diferentes, con motivaciones distintas, historias personales diferentes, y trayectorias académicas desiguales. Ante esto, los currículums que tienen a la homogeneización están destinados al fracaso. Tal y como dice Flecha (1997), la implementación de un currículum nunca tiene que conducir ni hacia una igualdad homogeneizadora, ni hacia una diversidad desigual; sino hacia el criterio de igualdad de resultados. La excelencia se consigue gracias a la diversidad, tal y como han mostrado las mejores experiencias educativas de todo el mundo (Apple y Beane, 2007; Flecha, 2014). Pero eso se logra gracias a reconocer la diversidad y sus beneficios, cuando se abren espacios para que todas las personas puedan aportar su conocimiento basado en la experiencia. Ejemplos en el caso de la enseñanza de matemáticas en la EpA los encontramos en personas que usan de manera solvente estrategias de cálculo mental para calcular porcentajes sin necesidad de usar procedimientos académicos como puedan ser "la regla de tres", o el algoritmo que usa la representación del porcentaje como fracción con el denominador igual a cien. Pedro Plaza (2021) cita a Soto [y Rouche] (1995) describiendo un método no académico para calcular porcentajes:

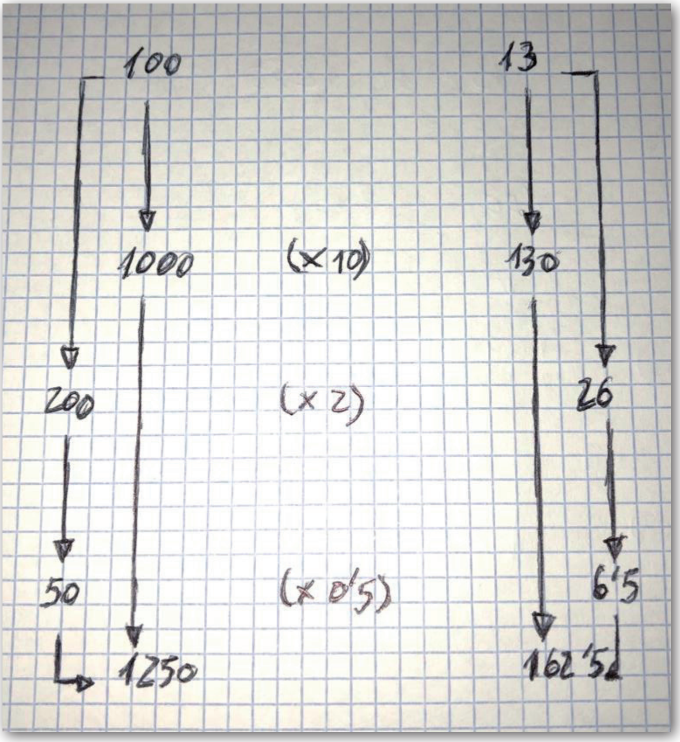


Figura 9. Cálculo del 13% de 1250. Basado en Plaza (2021)

Orientaciones para la práctica

Cerramos este capítulo con algunas propuestas basadas en lo que sabemos a raíz de las investigaciones en el área de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, a modo de orientaciones para la práctica.

El objeto de enseñanza: las matemáticas

Hay muchas "matemáticas", pero la matemática es una igual para todo el mundo. Esto quiere decir que las personas adultas tenemos muchas formas diferentes de hacer y usar las matemáticas. Los enfoques constructivistas han hecho mucho daño, porque han sido usados para justificar las adaptaciones curriculares diciendo que tenemos que presentar, organizar y enseñar las "matemáticas" de acuerdo con cómo las "construye" cada persona. De esa manera, la concreción de los contenidos, el nivel de lo que se enseña, etc., difiere de un centro a otro. De hecho, esta diversidad es una de las dificultades principales que están presentes en el sistema educativo de

EpA actualmente, y que se manifiesta en aspectos tales como las pruebas VIA (valoración inicial del alumno). La falta de criterios comunes provoca que la experiencia "educativa" que puedan tener dos personas que vayan a centros diferentes (incluso en el mismo municipio) pueda resultar completamente distinta (Peréz-Gómez et al., 2020). Sin embargo, las investigaciones en educación han identificado que una de las variables que explican el éxito de aprendizaje es que el diseño, planificación e implementación del currículum utilice estrategias y recursos didácticos para lograr que todos los y las estudiantes alcancen las mismas metas de aprendizaje (y que estas metas estén basadas en máximos, no en mínimos). Ejemplos de actuaciones educativas de éxito los podemos encontrar en Flecha (2014) y en el documento *Actuaciones de éxito en escuelas Europeas* publicado por la Secretaría General Técnica, Centro de Publicaciones, del Ministerio de Educación y Ciencia.

Conexiones

En el libro *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES en España), el *National Council of Teachers of Mathematics* de USA publicaba a inicios de los años 2000 una serie de procesos clave para la enseñanza de las matemáticas: la resolución de problemas, el razonamiento y prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Estos procesos han ido implantándose en las propuestas curriculares que se han llevado a cabo en diferentes países en los últimos veinte años, y el caso de España no es excepción. La nueva ley de educación primaria (1 de marzo de 2022) dice que las competencias específicas se organizan en torno a cinco ejes fundamentales: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y (lo que no encontramos en otros lugares, ni tampoco en la investigación previa), destrezas socioafectivas. En el caso de la enseñanza de las matemáticas en la EpA la noción de competencia también ha ido ocupando lugar (sobre todo como resultados de las definiciones de *numeracy* y *numerate behavior* desarrollados por el *ALL Numeracy group* (Tout, 2000) y que hemos continuado usando en el NEG (Numeracy Experts Group) actualmente en 2022. En términos concretos, esto quiere decir que las personas tienen diferentes formas de expresar y poner en práctica esa competencia numérica / matemática, y es preciso diseñar entornos de aprendizaje para que dichas formas emerjan y supongan un enriquecimiento de la práctica de aprendizaje. Un ejemplo que ilustra este aspecto lo podemos encontrar en Gloria, una mujer que no había ido nunca a la escuela. En el centro de EpA esta señora asiste a clase para "aprender a restar." El maestro de matemáticas está explicando la resta "con llevadas", el algoritmo de la resta por valor posicional. Gloria no entiende por qué tiene que "pedir prestado", se hace un lio al pedir a las decenas del minuendo, o dar a las decenas del sustraendo. No sabe si usar el "número de arriba" o el "número de abajo" para completar la decena que necesita para poder restar 9 de 3 (le piden que a 23 le reste

19). Finalmente, cuando le preguntan, ella explica que no resta de esa manera; lo que hace es “ir -mentalmente- desde el 19 hasta el 23” (es decir, aplica el algoritmo de suma inversa, o compensa lo que falta desde el sustraendo hasta el minuendo). A través de los argumentos en el espacio de diálogo igualitario que se genera tanto Gloria como el maestro (y el resto de las personas de la clase) son capaces de conectar ambos algoritmos, y comprender de esa manera el funcionamiento de la resta de manera más profunda.

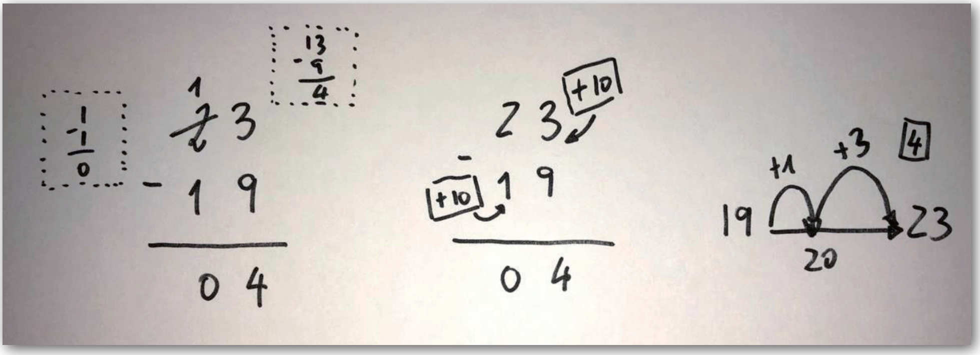


Figura 10. Ejemplo de tres formas diferentes de hacer la resta (dos -escolares- basadas en algoritmos de valor posicional, y otra como “suma inversa”, o compensación de la diferencia entre minuendo y sustraendo -estrategia de cálculo mental

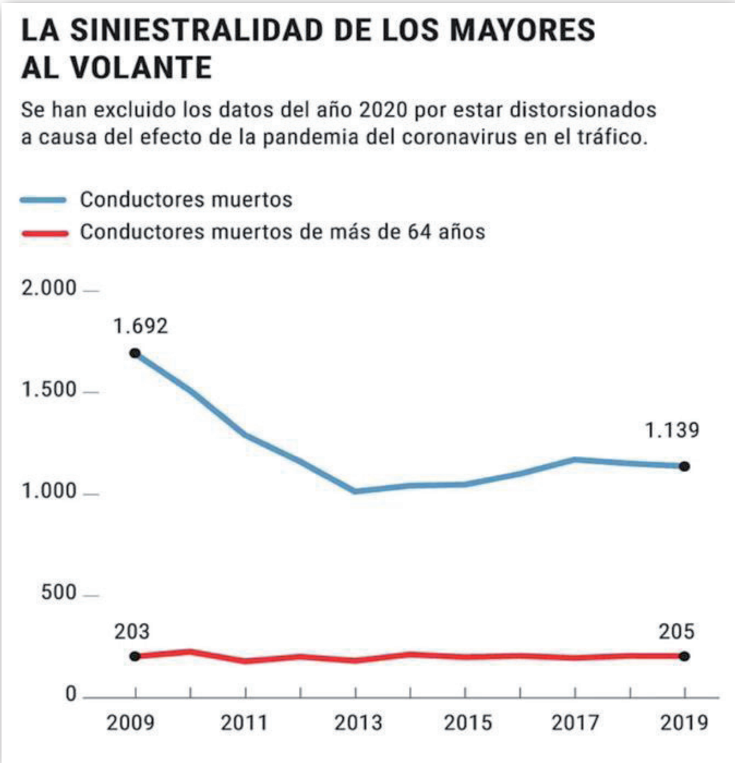
El pensamiento crítico

Otro aspecto clave de la enseñanza de las matemáticas en la EpA es la relación que tienen con el desarrollo y uso del pensamiento crítico. Un ejemplo que usó Pedro Plaza en una charla en 2021 ilustra esta idea: dice que, si queremos que una cantidad parezca más grande, se la puede comparar con una longitud, pero si queremos que parezca más pequeña, usamos entonces el volumen: un billón de monedas de un euro, una detrás de la otra, darían 600 vueltas a la Tierra, pero todas ellas cabrían en una caja cúbica de menos de 140 metros de lado. Darrell Huff (1993) en *How to llie with statistics* explica que en una empresa al jefe le interesará expresar el salario medio de sus trabajadores con la media aritmética (porque está muy afectada por los valores extremos), de manera que su salario queda “camuflado” por el peso que tiene el salario de los peones; mientras que si son los peones quienes tienen que protestar por sus bajos salarios preferirán siempre usar la moda (puesto que al ser más en la empresa, representa mejor su situación).

Ejemplo (procedente del blog http://www.malaprensa.com/)

En el blog "malaprensa.com" podemos leer:

> En un diario de marzo de 2022 podemos leer: "Tráfico falla con los conductores mayores. No reduce su siniestralidad con la intensidad que había previsto (un 10% en la pasada década). Tampoco se ha modificado el sistema para renovar el carné, el mismo con 65 que con 90 años." En la noticia se dice que de los 13 objetivos que tenía Tráfico en 2011, en 2020 (con datos de 2019) solo se habían cumplido 4. Se dice: "Uno de los que no se ha alcanzado era "recortar en un 10% la siniestralidad de los conductores mayores de 64 años." Eso obligaba a que, en 2019, se hubiese bajado a 185 fallecidos. La cifra real fue de 205, casi los mismos que se habían contabilizado en 2009."



Fuente: Del blog malaprensa.com

El autor del blog explica que estos datos no tienen en cuenta que entre 2009 y 2019 el número de conductores mayores de 64 ha cambiado. Recuperando datos, concluye lo siguiente:

Tabla

Variación en la mortalidad de conductores en España, 2009-2019.			
	2009	2019	Variación
Todos los conductores			
Conductores (millones)	25,73	27,32	6,18%
Fallecidos	1.692	1.139	-32,68%
Fallecidos/millón	65,76	41,69	-36,60%
Mayores de 64			
Conductores (millones)	2,86	4,38	53,15%
Fallecidos	203	205	0,99%
Fallecidos/millón	70,98	46,80	-34,06%

Fuente: Del blog malaprensa.com

Por tanto, aunque 203 y 205 sean dos cantidades muy similares, si las ponemos en contexto y las comparamos con el total de conductores mayores de 64 años que hay en 2009 y en 2019, la tasa de variación indica un descenso del 34,06% (mucho más que el objetivo del 10%).

El contexto

El ejemplo anterior nos lleva a otro aspecto importante en la enseñanza de las matemáticas en la EpA: el contexto. Las matemáticas siempre se dan en contexto, aparecen relacionadas con aspectos de la vida cotidiana (con el trabajo, con el hogar, con la familia, con la salud, etc.). Por tanto, cuando hay que pensar cómo diseñar secuencias didácticas para enseñar los objetos matemáticos que aparecen en la descripción de los contenidos del currículum en la competencia matemática y tecnológica, es importante tener en cuenta que el conocimiento matemático está siempre situado (en términos de Lave y Wenger -1991-). Muchos materiales curriculares de matemáticas (tanto de niveles iniciales, como de secundaria) utilizan libros de texto, recortes de periódico, prospectos de medicamentos, facturas de la luz o del gas, recetas de cocina, etc. Existen muchos materiales, y de calidad, que aprovechan situaciones de la vida cotidiana, eventos (p.e., unas elecciones, la planificación de la salida de fin de semana según la interpretación de la predicción del tiempo, etc.). Algunos autores, como Plaza et al., (2004), sostienen que el desplegamiento del currículum de matemáticas en la EpA tiene que ser de manera transversal, pensado a partir de situaciones. Flecha (2014), en base las contribuciones de la investigación internacional en educación sugieren que los materiales y recursos tienen que basarse en obras clásicas, o cuyos contenidos han sido reconocidos y validados por la comunidad científica internacional (en este caso, por la comunidad de matemáticas).

La inclusión de la voz de las personas participantes

Finalmente, queremos resaltar aquí la importancia de contar siempre con la voz de las personas adultas (usando las orientaciones del AD). Ellas son quienes van a participar en la clase, para aprender matemáticas, y como hemos visto, tienen no solo conocimientos ya de una gran cantidad de objetos matemáticos, sino que también tienen necesidades y motivaciones para usar las matemáticas en sus vidas. Concretar el currículum a través de situaciones, usar las matemáticas para modelizar la vida real, para tener herramientas de toma de decisiones, para resolver problemas (o crearlos como recurso de aprendizaje), tiene que contar con las contribuciones de las propias personas adultas. A través de sus argumentos, de sus diálogos, las matemáticas toman sentido (se crea sentido en torno a ellas), y esto es una condición *sine qua non* para incentivar un aprendizaje con comprensión.

Referencias

Albertí, M. (2010). Situated mathematical research: The interaction of academic and non-academic practices. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 32-39.

Apple, M. W. y Beane, J. A. (Eds.). (2007). *Democratic schools: Lessons in powerful education*. Heinemann.

Benn, R. (1997). *Adults Count Too. Mathematics for Empowerment*. National Institute of Adult Continuing Education.

BOE (Boletín Oficial del Estado). (2009). Orden EDU/1622/2009, de 10 de junio, por la que se regula la enseñanza básica para personas adultas presencial y a distancia, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación (páginas 51252 a 51349). Gobierno de España. BOE-A-2009-10115.

Boistrup, L. y Keogh, J. (2017). The context of workplaces as part of mathematics education in vocational studies: Institutional norms and (lack of) authenticity. In Dooley, T. y Gueudet, G. (Eds.). (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1 – 5, 2017). DCU Institute of Education y ERME.

Carlson, L. E. y Sullivan, J. F. (1999). Hands-on engineering: learning by doing in the integrated teaching and learning program. *International Journal of Engineering Education*, *15*(1), 20-31.

Carraher, T., Carraher, D. y Schlieman, A.D. (1988). Mathematics in the streets and in the schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3,* 21-29.

CREA. (1993). *Numeracy*. UNESCO y Departament de Benestar Social de la Generalitat de Catalunya.

de Agüero, M. (2008). When women cook mole and men build a wall. In Colleran, N., Tipperary, N. R., y Safford-Ramus, K. (Eds.), *The Changing Face of Adults Mathematics Education: Learning from the Past, Planning for the Future*, (pp. 121-137). ALM.
Díez-Palomar, J. (2017). Mathematics Dialogic Gatherings: A Way to Create New Possibilities to Learn Mathematics. *Adults Learning Mathematics, 12*(1), 39-48.
Díez-Palomar, J. (2020). Dialogic mathematics gatherings: Encouraging the other women's critical thinking on numeracy. *ZDM, 52*(3), 473-487.
Díez-Palomar, J., y Cabré, J. (2015). Using dialogic talk to teach mathematics: The case of interactive groups. *ZDM, 47*(7), 1299-1312.
Díez-Palomar, J., Chan, M. C. E., Clarke, D. y Padrós, M. (2021). How does dialogical talk promote student learning during small group work? An exploratory study. *Learning, Culture and Social Interaction, 30*, 100540.
Díez-Palomar, J., Flecha, A., Lemos, L., Ortega, Mª A., Flecha, R., Giménez, F., Valls, R. y Escolà, FJ. (2002). *Matemáticas. Educación de personas adultas*. El Roure Editorial.
Evans, J. (2002). *Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice*. Routledge.
Evans, J., Tsatsaroni, A. y Czarnecka, B. (2014). Mathematical images in advertising: Constructing difference and shaping identity, in global consumer culture. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 3-27.
Evans, J., Tsatsaroni, A. y Staub, N. (2007). Images of Mathematics in Popular Culture/ Adults' Lives: A Study of Advertisements in the UK Press. *Adults Learning Mathematics*, *2*(2), 33-53.
FitzSimons, G. E. (2004). An overview of adult and lifelong mathematics education. In *Keynote presentation at Topic Study Group 6, 10th International Congress on Mathematics Education ICME* (Vol. 10).
FitzSimons, G. E. (2013). Doing Mathematics in the Workplace: A Brief Review of Selected Literature. *Adults Learning Mathematics, 8*(1), 7-19.
FitzSimons, G. y Coben, D. (2009). Adult numeracy for work and life: Curriculum and teaching implications of recent research. In R. Maclean, D. Wilson, (eds) *International Handbook of Education for the Changing World of Work* (pp. 2731-2745). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5281-1_179
Flecha, R. (1997). *Compartiendo palabras: el aprendizaje de las personas adultas a través del diálogo*. Paidós.
Flecha, R. (2000). *Sharing words: Theory and practice of dialogic learning*. Rowman y Littlefield.
Flecha, R. (2014). *Successful educational actions for inclusion and social cohesion in Europe*. Springer.
Freire, P. (1970a). *Pedagogy of the oppressed*. Continuum.
Freire, P. (1970b). The adult literacy process as cultural action for freedom. *Harvard Educational Review*, *40*(2), 205–225.
Freire, P. (1997). *A la sombra de este árbol*. El Roure.
Freire, P. (2000). *Pedagogy of freedom: Ethics, democracy, and civic courage*. Rowman y Littlefield Publishers.
Galligan, L. (2013). Becoming competent, confident and critically aware: Tracing academic numeracy development in nursing. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *8*(1), 20–30.
García-Carrión, R. (2012). Out of the Ghetto: Psychological bases of dialogic learning. *International Journal of Educational Psychology*, *1*(1), 51-69.
Geiger, V. (2019). Using mathematics as evidence supporting critical reasoning and enquiry in primary science classrooms. *ZDM, 51*, 929-940.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Greeno, J., Eckert, P., Stuckey, S., Sachs, P. y Wenger, E. (1999). Learning in and for participation and society. In *How adults learn. Proceedings*. Georgetown University Conference Center, Washington DC.

Groenestijn, M. van (2002). *A gateway to numeracy. A study of numeracy in adult basic education*. Utrecht CD-B Pres.

Groenestijn, M. van y Lindenskov, L. (eds.) (2007). *Mathematics in Action, Communalities across differences. A handbook for teachers in Adult Education*. ALL Foundation, Netherlands.

Habermas, J. (1981). *The theory of communicative action: Volume 1: Reason and the rationalization of society* (Vol. 1). Beacon press.

Habermas, J. (1985). *The theory of communicative action: Volume 2: Lifeword and system: A critique of functionalist reason*(Vol. 2). Beacon press.

Harris, M. (2000). Women, mathematics and work. In Coben, D., O'Donoghue, J., y Fitzsimons, G. E. (Eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. 171-190). Springer.

Hoogland, K. (2018-2021). *Common European Numeracy Framework*. ERASMUS +. European Commission.

Hoogland, K., Auer, M., Díez-Palomar, J., O'Meara, N. y van Groenestijn, M. (2019). Initiating a common european numeracy framework. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409293/document

Hoyles, C., Noss, R. y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 4-27.

Huff, D. (1993). *How to lie with statistics*. Norton y Company.

Hutchins, E. (2000). Distributed cognition. *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences. Elsevier Science*, *138*.

Jarvis, P. (2004). *Adult education and lifelong learning: Theory and practice*. Routledge.

Kamp, M. van der y Scheeren, J. (1996). *Functional literacy and numeracy skills of older adults in the Netherlands*. Max Goote Kenniscentrum, University of Amsterdam.

Kandel, E. R., Schwartz, J. H., Jessell, T. M., Siegelbaum, S., Hudspeth, A. J., y Mack, S. (Eds.). (2000). *Principles of neural science*. McGraw-Hill.

Keogh, J. J., Maguire, T. y O'Donoghue, J. (2019). *Adults, Mathematics and Work: From Research into Practice*. Brill Sense.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Harvard University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Lave, J., Murtaugh, M. y de la Roche, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff, and J. Lave (Eds.), *Everyday Cognition* (pp. 67-95). Harvard University Press.

Lemos, L., Ortega, Mª A., Flecha, R., Giménez, F., Valls, R. y Escolà, FJ. (1982). *Matemáticas. Educación de personas adultas*. El Roure Editorial.

Luria, A. R. (1976). *Cognitive development: Its cultural and social foundations*. Harvard university press.

Martinez, A. (2018). *Teacher Perceptions of the Learning by Doing Program* (Doctoral dissertation).

Mead, G. H. (2015). *Mind, self, and society*. University of Chicago Press.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows of mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Press.

O Campo, M. (2020). *Tertulias matemáticas dialógicas para el aprendizaje de las matemáticas en mujeres adultas no escolarizadas y sin titulación académica*. PhD Dissertation. University of Barcelona.

Pérez-Gómez, P. Díez-Palomar, J., Valls, R. y Sánchez Santamaría, J. (2020). Diseño de un modelo de evaluación y acreditación de competencias básicas en la población adulta. Informe Nacional. European Association for the Education of Adults y Ministerio de Educación. Gobierno de España.

Plaza, P. (2021). Las matemáticas en la educación de personas adultas. *Ciclo Matemàtiques per a persones adultes. CESIRE. https://www.youtube.com/watch?v=kWL2sSK-4eA*

Plaza, P., González, M.J., Montero, B. y Rubio, C. (2004). *Matemáticas críticas y transformadoras en la educación de personas adultas*. Aljibe.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Resnick, L. B. (1991). Shared cognition: Thinking as social practice.

Resnick, L.B. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher, 16*, 13-20.

Rogoff, B. E. y Lave, J. E. (1984). *Everyday cognition: Its development in social context*. Harvard University Press.

Rosenthal, R. y Jacobson, L. (1968). Pygmalion in the classroom. *The urban review*, *3*(1), 16-20.

Safford-Ramus, K., Misra, P. K. y Maguire, T. (2016). *The Troika of adult learners, lifelong learning, and mathematics*. Springer.

Saló, L. (2020). *Problem solving and use of mathematics at work. Hanging around farmers and cabinetmarkers*. PhD dissertation. University of Helsinki.

Saxe, G. (1991). *Culture and Cognitive Development. Studies in Mathematics Understanding*. Lawrence Elrbaum Associates, Publishers.

Schank, R. C. (1996). Goal-based scenarios: Case-based reasoning meets learning by doing. In *Case-based reasoning: Experiences, lessons y future directions* (pp. 295-347). AAAI Press/ The MIT.

Scribner, S. y Cole, M. (1978). Literacy without schooling: Testing for intellectual effects. *Harvard Educational Review*, *48*(4), 448-461.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Soler, M. y Flecha, R. (2010). Desde los actos de habla de Austin a los actos comunicativos: Perspectivas desde Searle, Habermas y CREA. *Revista signos*, *43*, 363-375.

Soto, I. y Rouche, N. (1995). Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación matemática*, *7*(01), 77-95.

Tout, D. (2000). Numeracy Up Front: Behind the International Life Skills Survey. *ARIS Resources Bulletin*, *11*(1), 1–5.

Tout, D., Demonty, I., Díez-Palomar, J., Geiger, V., Hoogland, K. y Maguire, T. (2021). PIAAC Cycle 2 assessment framework: Numeracy In OECD, *The Assessment Frameworks for Cycle 2 of the Programme for the International Assessment of Adult competencies*, OECD Skills Studies (pp. 65-154). OECD Publishing. http://doi.org/10.1787/4bc2342d-en

Tuijnman, A., Kirsch, I. y Wagner, D. (1997). *Adult basic skills, innovations in measurement and policy analysis*. Hampton Press.

Turner, E. E., Gutiérrez-Varley, M., Simic-Muller, K. y Díez-Palomar, J. (2009). “Everything is math in the whole world”: Integrating critical and community knowledge in authentic mathematical investigations with elementary Latina/o students. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 136-157.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.

Weber, M. (2012). *La ética protestante y el espíritu del capitalismo*. FCE. Fondo de Cultura Económica.

Wertsch, J. V. (1991). A sociocultural approach to socially shared cognition.

Withnall, A. (1995). Towards a definition of numeracy. In D. Coben (Ed.), *Proceedings of the inaugural conference of adults learning maths–A research forum* (pp. 11-17). ALM.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Child Psychology y Psychiatry y Allied Disciplines, 17(2), 89–100.* https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Yasukawa, K., Rogers, A., Jackson, K. y Street, B. V. (2018). *Numeracy as Social Practice: Global and Local Perspectives*. Routledge.