

Recursos didácticos para el aula de matemáticas

Didactic resources for the mathematics classroom

Rodríguez-Sánchez, M. M., Sánchez-Barbero, B., Monterrubio, M. C.
Universidad de Salamanca

Resumen

La utilización en el aula de diferentes recursos puede ayudar a mejorar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, y conseguir así un aprendizaje más significativo. Uno de los recursos que mayor número de adeptos tiene en las aulas es el libro de texto. En este capítulo se pretende mostrar cómo el uso exclusivo del libro de texto presenta algunas limitaciones que se pueden solventar con un correcto acompañamiento de otros recursos didácticos. Se mostrarán algunos recursos y materiales manipulativos con los que se pueden trabajar matemáticas, exponiendo las ventajas e inconvenientes de su utilización. También se propondrán pautas para su uso en las aulas de matemáticas, con el fin de animar a los lectores a introducirlos en el aula y ayudar así al aprendizaje de sus estudiantes.

Palabras clave: Recursos didácticos, Material manipulativo, Libro de texto, Didáctica de las matemáticas.

Abstract

The use of different resources in the classroom can help to improve students' attitude towards mathematics, thus achieving more meaningful learning. One of the resources that has the largest number of followers in classrooms is the textbook. In this chapter we try to show how the limitations of the exclusive use of the textbook can be solved with a correct accompaniment of other didactic resources. Resources and manipulative materials with which mathematics can be worked will be shown, exposing the advantages and disadvantages of their use. Guidelines for the use of resources and materials in mathematics classrooms will also be proposed, to encourage readers to introduce them in the classroom and thus help their students' learning.

Keywords: Didactic resources, Manipulative material, Textbook, Didactics of mathematic.

INTRODUCCIÓN

EN GENERAL, EXISTE CIERTO DESINTERÉS del alumnado hacia las matemáticas. Esto puede deberse a que no aprecia una vinculación entre la materia y la realidad lo que hace que, en ocasiones, le cueste llegar a la abstracción matemática requerida y, como consecuencia, su motivación, gusto y actitudes positivas hacia la asignatura se vean mermados. Evaluaciones Internacionales, como TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) y PISA (Programme for International Student Assessment), muestran cómo el rendimiento en matemáticas de los alumnos españoles está por debajo de la media de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) y de la Unión Europea (Mullis et al., 2020). Esto, junto con la descalificación profesional que puede generar el uso exclusivo del libro de texto, hace reconsiderar el empleo en el aula de otros recursos diferentes que se complementen entre sí, sean motivadores y acerquen las matemáticas a la vida cotidiana (Alsina, 2004). Además, el aprendizaje mediante diversos materiales facilita el paso de una matemática concreta a una abstracta, potenciando así el razonamiento y la reflexión en las aulas (Area, 2010).

Este trabajo pretende ofrecer una visión general del uso de recursos y materiales para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Se comienza explicando qué se entiende por recurso didáctico y se presentan algunos ejemplos. Posteriormente, se tratan de manera independiente el libro de texto, un recurso bastante utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y los materiales manipulativos, presentando una clasificación y mostrando algunos ejemplos de la utilización de materiales existentes y propuestas de elaboración. Finalmente, se analizan las ventajas e inconvenientes de la utilización de los diferentes recursos, se presentan algunos consejos junto con un decálogo para su buen uso, y se termina con unas consideraciones finales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Entendemos como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas cualquier medio que, utilizado convenientemente, contribuya a la consecución de dicho aprendizaje. Por ello, se puede entender que los diversos recursos engloban, además del libro de texto, los materiales manipulativos, tecnológicos y otras situaciones o medios, como la prensa, el cine, la literatura, los juegos o el plegado del papel, entre otros. Estos pueden ser adaptados según el nivel educativo y el objetivo pretendido.

Los currículos actuales manifiestan la relevancia del uso de diferentes recursos e inciden en la importancia de que el docente utilice diferentes metodologías didácticas que fomenten la motivación por aprender, despierten la curiosidad y hagan ver a los alumnos la necesidad de adquirir conocimientos, destrezas y actitudes hacia el área. Consideramos que el uso de recursos diversos puede contribuir a ello.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de recursos que pueden utilizarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ejemplo 1: La prensa

Diversos autores analizan la importancia de la utilización de la prensa en las aulas (Chamoso et al., 2005; Olmos y Martí-Contreras, 2021). Esta puede ayudar, por ejemplo, al aprendizaje del sentido estocástico mediante el estudio de gráficos estadísticos. Para ello, planteamos dos posibilidades. La primera es pedir a los estudiantes que lleven un periódico cualquiera al aula y, a partir de ahí, descubrir las diferentes gráficas utilizadas y si son o no las más adecuadas para transmitir la información de la noticia en la que aparecen. Esto permite introducir o profundizar en las características de cada tipo de gráfica, el significado de sus elementos, la interpretación de los datos, sacar conclusiones, etc. La segunda posibilidad, es lo que denominamos *Proyecto Sabuesos*, donde los estudiantes deben buscar posibles errores estadísticos, cometidos tanto en la redacción como en la representación de la información (Figura 1), explicar los motivos por los que constituye un error, justificar la posible intencionalidad, desconocimiento u otros aspectos de cada uno de ellos. Se completa con la redacción de una carta al periódico expresando el malestar por el error cometido e incluyendo una propuesta de mejora sobre cómo se debería reflejar esa información de manera adecuada. A partir de ahí, parece fundamental facilitar la discusión en el aula para que, mediante una reflexión crítica, se puedan obtener conclusiones que faciliten el aprendizaje. Además, este proyecto es ampliable a cualquier medio de comunicación. Se puede encontrar una colección de errores estadísticos cometidos en la prensa española en la página web Malaprensa (<http://www.malaprensa.com/>).



El mayor número de cincuentones solteros de España se encuentra en Salamanca. (2021, 27 octubre). Diario Noticias Salamanca 24 Horas.

“En Salamanca, el 45,65% de las personas entre 20 y 59 años está soltera. En el caso de los varones, el índice asciende a 51,43% y, en el caso de las mujeres, a 40,12%”. Error: El intervalo seleccionado no corresponde con el título de la noticia porque el porcentaje de “cincuentones” se sitúa entre 20 y 59 años.

https://www.salamanca24horas.com/local/mayor-numero-cincuentones-solteros-espana-se-encuentra-en-salamanca_15016919_102.html

En la imagen, aparece un diagrama de barras presentado en una conocida cadena de televisión, que representa el número de fallecidos por la COVID en la comunidad de Madrid, durante los meses de julio a octubre (2021). Error: Se puede observar que a pesar de que septiembre tenga un mayor número de fallecidos (1136), la barra que lo representa se sitúa por debajo de la barra del mes de octubre (1056), que refleja un menor número de fallecidos.



Mes	Número de fallecidos
JULIO	80
AGOSTO	247
SEPTIEMBRE	1.136
27 OCTUBRE	1.056

Figura 1. Errores en la redacción y representación, presentados por los “sabuesos”

Ejemplo 2: El cine

El uso del cine en el aula permite distintas posibilidades como pueden ser el visionado de largometrajes completos o, únicamente, de determinadas secuencias. En el primer caso, parando en los momentos adecuados para incidir en algunos aspectos de interés, aunque tiene la limitación del tiempo, pues no permite realizarlo en una sesión de clase. En el segundo caso, se seleccionan escenas de corta duración y se plantean actividades asociadas, por ejemplo, *La habitación de Fermat* permite ver la escena en la que se tratan los números primos y plantear actividades centradas en dicho contenido, lo que ayuda a reforzarlo o a motivarlo mostrando contextos diferentes. Además, ofrece situaciones para la resolución de problemas, como cronometrar 9 minutos utilizando dos relojes de arena de 4 y 7 minutos. Una tercera posibilidad es detectar situaciones imposibles o errores matemáticos e intentar solventarlos. Sorando (2018) muestra una selección de películas y actividades, clasificadas por curso y contenido, algunas de las cuales se encuentran en <https://maticasentumundo.es/CINE/100escenas.htm>. Además, Martín y Martín (2021) presentan en <http://www.centrocp.com/proyecto-esc3n4s-ma-tematicas/> una colección de fichas con actividades referidas a escenas del cine y series de televisión, para ser llevadas al aula.

Ejemplo 3: La literatura

La literatura brinda diversas posibilidades, como usar obras literarias completas con las matemáticas como tema central, por ejemplo *El diablo de los números*, *El señor del cero*, *El hombre que calculaba*, *Planilandia*... cuya lectura puede realizarse de manera conjunta con la asignatura de Lengua. Otra opción es mediante obras que únicamente aluden a las matemáticas en determinados momentos y de las que se pueden extraer fragmentos con los que trabajar un contenido concreto, por ejemplo *Los Viajes de Gulliver* o *Alicia en el País de las Maravillas* cuyo cuadernillo de trabajo se puede descargar en la web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2002_-_las_matematicas_de_alicia_y_gulliver.pdf (Quintana, 2002). Además, en *Leer matemáticas* (<http://www.leermatematicas.es/>) se pueden encontrar lecturas recomendadas según el nivel educativo, y fichas de trabajo descargables para su uso en el aula. También se pueden utilizar cuentos infantiles. Por ejemplo, *Blancanieves y los Siete Enanitos* permite trabajar desde el conteo a la proporcionalidad, planteando situaciones como: teniendo en cuenta que Blancanieves necesitó juntar todas las camitas para poder dormir, ¿qué tamaño tendrían los personajes del cuento?, ¿cómo debería ser la puerta para que Blancanieves pudiera entrar y salir de la casa?, entre otras.

Una última posibilidad es la elaboración de pequeñas narrativas, cuentos, cómics, etc., por los estudiantes (Sánchez-Barbero, Cáceres et al., 2020). Como ejemplo, el cuento elaborado por estudiantes de Grado en Maestro en Educación Primaria, *Los*

tres cerditos matemáticos, donde, mediante la narrativa en la que los cerditos se hacen mayores y desean independizarse, se introducen tamaños y formas (los cerditos pequeño, mediano y grande hicieron sus casas redonda, triangular y cuadrada, respectivamente), se plantean enunciados verbales (recogieron 3, 1, 2 flores, respectivamente, ¿cuántas recogieron entre todos?) y se trabaja el uso del reloj (llegaron a casa a las 10:20, ¿puedes situar las agujas del reloj?) (Figura 2).



Figura 2. Algunas páginas de “Los tres cerditos matemáticos”, elaborado por estudiantes

Ejemplo 4. Los Juegos

Desde una perspectiva lúdica, recursos como los juegos tradicionales o los juegos de mesa también pueden contribuir al aprendizaje de las matemáticas (Chamoso et al., 2004, 2005; Muñiz-Rodríguez et al., 2014). Aunque es común el uso de juegos para el aprendizaje de la probabilidad, esta no es la única posibilidad. Por ejemplo, jugando con tres dados, se pueden lanzar y plantear cuestiones como: intenta construir triángulos cuyos lados midan los valores obtenidos, en caso de conseguirlo, ¿qué tipo de triángulo sería?, ¿es esto posible siempre? ¿Cuándo? De esta forma se pueden deducir propiedades, trabajar clasificaciones, etc. (Corbalán, 1994, pp. 161-162).

Otra posibilidad es utilizar juegos basados en la magia. La *matemagia* despierta la curiosidad del estudiante y, gracias a la inquietud por descubrir los fundamentos matemáticos ocultos, contribuye al desarrollo del razonamiento matemático y el pensamiento crítico. Una propuesta puede ser realizar diversos trucos, provocar la discusión sobre por qué sucede eso y, mediante el trabajo en grupo y las aportaciones del docente en los momentos adecuados, facilitar el descubrimiento del truco, la matemática escondida. Posteriormente, se recomienda la práctica entre iguales, para comprobar la validez de su deducción. Por ejemplo, se puede mejorar el cálculo mental, profundizar en los sistemas de numeración, establecer patrones, trabajar composición y descomposición de números, etc., mediante el truco de adivinar la fecha de cumpleaños de un espectador, utilizando tarjetas numéricas construidas usando el sistema de numeración binario (Gardner, 1956). A un voluntario se le entregan las tarjetas (Figura 3) y se le pregunta en qué tarjetas figura el número que corresponde al día de su nacimiento. El estudiante las mira y devuelve al mago aquellas que lo contengan y, en ese instante, el mago lo

adivina. Para ello, debe sumar el número más bajo en cada tarjeta (en este caso, situado en la esquina superior izquierda), por ejemplo, si el número elegido es 12, el estudiante entregaría las tarjetas naranja y amarilla, y el mago inmediatamente lo diría en voz alta ($4+8=12$). Se puede repetir la actividad adivinando el mes de nacimiento. Posteriormente se insta a deducir el truco y practicarlo. Es posible adaptarlo a diferentes niveles, por ejemplo, en Educación Infantil se puede realizar la adivinación de números del 1 al 15 (ayudándose de pegatinas en el reverso, para facilitar el conteo al pequemago), o en niveles superiores, motivar a los estudiantes a que elaboren sus propias tarjetas para adivinar números mayores. Después de profundizar en varios matetrucos, se puede proponer la invención de uno propio que puede estar, o no, basado en alguno de los realizados, y que lo practiquen con sus compañeros, lo que obliga a pensar en operaciones, propiedades, jerarquía, paréntesis, etc. Alegría y Ruíz (2002) ofrecen una colección de trucos con su correspondiente explicación matemática.

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7	8	9	10	11	16	17	18	19
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15	20	21	22	23
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23	24	25	26	27	24	25	26	27
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31

Figura 3. Tarjetas mágicas

Ejemplo 5. El Plegado del papel

Un recurso tradicionalmente utilizado en el aula de matemáticas es la papiroflexia, que permite hacer figuras de papel doblando, sin cortar o pegar. Por ejemplo, se pueden construir los puntos notables de un triángulo y la Recta de Euler, o utilizar la papiroflexia modular para construir figuras en 3D. Se pueden encontrar ejemplos de papiroflexia y matemáticas en la revista pajarita de la Asociación Española de Papiroflexia (AEP), (<https://www.pajarita.org/articulos/>).

Sin embargo, entendemos que, para su uso en el aula, se pueden permitir algunas acciones prohibidas en la papiroflexia, por ello preferimos hablar del doblado del papel en general. En esta ocasión, utilizamos el *Proyecto Dobra y Rasga*, que ofrece posibilidades de aprendizaje del sentido geométrico, por ejemplo, mediante la construcción de un Tangram. Para ello, comenzamos con un papel cuadrado, doblamos y rasgamos por su diagonal obteniendo 2 triángulos rectángulos iguales (T_a y T_b). Doblamos T_a por una de las alturas (bisectriz del ángulo recto), y rasgamos, obteniendo dos triángulos rectángulos iguales, que serán dos piezas de nuestro Tangram (P_1 y P_2). Este paso permite comprobar que, en un triángulo rectángulo isósceles, respecto al vértice del ángulo recto y su lado opuesto, coinciden altura, mediana, mediatriz, bisectriz. Por otro lado, doblamos y rasgamos T_b por una paralela a su hipotenusa, obteniendo un triángulo rectángulo menor, tercera pieza (P_3). Doblamos la pieza restante (trapecio isósceles) por uno de sus vértices, mediante

una perpendicular a las bases, para separar un triángulo rectángulo, cuarta pieza (P4), y un trapecio rectángulo. Al doblar este último por la mediatriz de su base menor obtenemos un cuadrado, quinta pieza (P5). Por último, doblando y rasgando por una paralela al lado oblicuo del trapecio rectángulo resultante obtendremos un triángulo rectángulo (P6) y un romboide (P7), sexta y séptima pieza del tangram (Figura 4). Hacer esta construcción permite trabajar el lenguaje matemático, figuras geométricas, diagonales, paralelas, etc., más deducir la relación entre áreas y perímetros de las piezas.

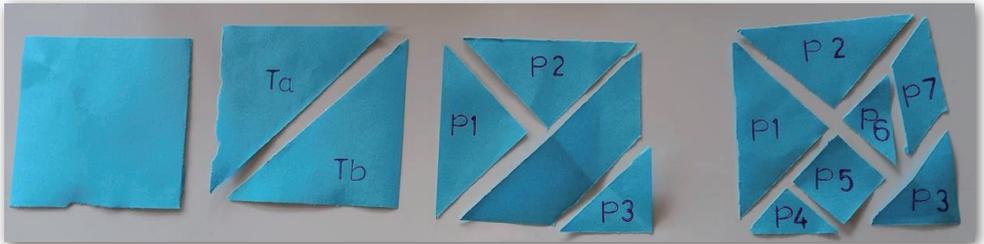


Figura 4. Proyecto Dobra y Rasga. Tangram

Otra opción, doblando papeles o cartulinas es la elaboración de un Lapbook. Este recurso consiste en una cartulina doblada, habitualmente en tres partes de manera que la parte central es el doble que las laterales, y al abrirlo aparece toda la información y materiales que los estudiantes hayan seleccionado, elaborado y colocado, en solapas, bolsillos, desplegables, libritos, etc. Son los estudiantes los que lo elaboran, lo que favorece la creatividad, la investigación en el aula y un aprendizaje más significativo. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de uso para repasar un contenido. Se establecieron grupos de trabajo entre los que se distribuyeron los contenidos, y cada uno elaboró su Lapbook, incluyendo los aspectos que consideró más relevantes. Posteriormente se realizó la presentación en el aula y se colocaron a la vista de todos para recordar los aspectos del aprendizaje que cada uno consideró.



Figura 5. Lapbook sobre probabilidad, elaborado por estudiantes

EL LIBRO DE TEXTO

El Real Decreto 1744/1998 de 31 de julio (B.O.E. 4-9-1998), normativa legal vigente en la actualidad, en su artículo 2 indica:

2. Se entiende por libro de texto el material impreso de carácter duradero y autosuficiente, destinado a ser utilizado por los alumnos y que desarrolla, atendiendo a las orientaciones metodológicas y criterios de evaluación correspondientes, los contenidos establecidos por la normativa académica vigente para el área o materia y el ciclo o curso de que en cada caso se trate.

En particular, centrándonos en el área de Matemáticas, Van Dormolen (1986) distingue tres tipos de libros de texto:

- Libros de ejercicios y problemas.
- Libros de teoría, por un lado, y problemas y ejercicios por otro.
- Mezcla: teoría regularmente mezclada con problemas y ejercicios.

En el presente trabajo, se entiende por libro de texto de matemáticas el que corresponde a un curso concreto y cuyo uso específico es la enseñanza.

El libro de texto es un recurso que se encuentra presente en las aulas de forma habitual. De hecho, en muchos casos, es el propio manual el que establece el currículo real que se desarrolla en un aula. Su uso en el aula puede realizarse de forma exclusiva o bien de forma conjunta con otros materiales y recursos. Una de las grandes ventajas que presenta el libro de texto en el aula es la ayuda que supone para la planificación de las clases. Sin embargo, precisamente esta ventaja se puede convertir en un gran inconveniente si el libro de texto se convierte en el elemento que guía la práctica docente de forma exclusiva. Torres considera que para el profesorado se puede producir una “descualificación profesional” (1994, p. 177). Trabajar siguiendo un libro de texto nos puede llevar a cuestionarnos la formación del profesorado. El profesor debe tener la preparación suficiente para poder buscar diferentes formas de poner el conocimiento de contenido matemático específico a disposición del alumnado, teniendo en cuenta la diversidad de alumnos que existe en las aulas y tratando de motivarlos en función de sus inquietudes e intereses. Por otra parte, al plantearse la posibilidad de que un libro de este tipo pudiera permitir al alumno trabajar de forma autónoma, sin contar con la presencia de un profesor, Van Dormolen (1986) señala que la pérdida de interacción entre los alumnos y de estos con el profesor no favorece una comprensión profunda de las matemáticas. Aunque como señala Cockcroft el libro de texto se pueda considerar una “ayuda inestimable” para el profesor, es preciso destacar la importancia de la figura del profesor para que el libro de texto pueda ser utilizado de forma que contribuya de la manera más adecuada en el aprendizaje de los alumnos (1985, p. 113). Por ejemplo, la presencia del profesor es necesaria para que, utilizando el libro de texto, pueda atender a la diversidad del alumnado. Las clases online,

que se desarrollaron durante el periodo en que los alumnos no pudieron asistir de manera presencial a las aulas debido a la pandemia de COVID-19, pusieron de manifiesto que el proceso de enseñanza y aprendizaje no se podía llevar a cabo de manera que el alumno trabajara de forma autónoma con su libro de texto, sino que era necesaria la presencia de un profesor.

Como señalan Cantoral et al., el libro de texto presenta “visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes” (2015, p. 11). La normativa legal hace hincapié en la importancia de proponer situaciones de aprendizaje contextualizadas, que fomenten la reflexión, el razonamiento y el establecimiento de conexiones y que permitan trabajar la modelización en las diferentes etapas educativas. Se propone la utilización de metodologías activas, que permitan trabajar de forma individual y colectiva. En particular se señala la importancia del trabajo por proyectos como metodología para el desarrollo de actividades de carácter interdisciplinar lo que permitirá promover la reflexión. Sin embargo, como señalan López et al., resulta curioso que “la principal herramienta de trabajo en el aula no sea coherente con estas ideas, y que sólo aparezcan problemas en los que se pone en marcha la lógica, el ingenio o problemas cercanos a la vida real en lugares puntuales de la unidad” (2015, p. 89). En esta misma línea se encuentran los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas analizando el álgebra y el análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de Educación Secundaria (Codes et al., 2010, 2011) donde se ha puesto de manifiesto la escasez de actividades que fomenten la reflexión y la presencia de una serie de tareas que, tratando de ser contextualizadas, realmente proponen planteamientos demasiado artificiales, lo que hace que los alumnos las encuentren alejadas de sus intereses.

En definitiva, con respecto al uso del libro de texto en las aulas, es fundamental la figura del profesor y de él depende la función que tenga el manual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. La posibilidad de realizar trabajos en grupo, fomentar la comunicación de ideas matemáticas y prestar atención a la construcción social del conocimiento son tareas propias del profesor. El libro de texto no tiene que ser un material cerrado, sino que puede tener una propuesta de tareas de investigación, de proyectos, etc. Sin duda, la posibilidad de plantear estas tareas, de carácter diferente a lo que se encuentra tradicionalmente en el libro de texto, debería ser una ventaja del libro de texto digital. Sin embargo, al menos de momento, el libro de texto digital no se está utilizando de modo habitual en las aulas. Sería necesario que todos los alumnos pudieran contar con un dispositivo para acceder a él en el aula de forma que, en muchas ocasiones, el uso se limita a la proyección en la pantalla del mismo texto que los alumnos tienen en papel. Las actividades que se proponen en el libro de texto digital suelen ser las mismas que se realizan de forma habitual en las aulas y, cuando tiene alguna actividad en la que se utilizan recursos diferentes, como por ejemplo Geogebra, en general se limitan a actividades ya realizadas y que pueden visualizarse, cuando la gran ventaja de este y otros recursos tecnológicos es precisamente la posibilidad de que los alumnos realicen tareas de investigación que les permitan comprender los conceptos matemáticos y aplicarlos a diferentes situaciones. El hecho de que el alumno trabaje solo con su libro digital en

su dispositivo tampoco favorece la interacción con el resto de los compañeros, aspecto fundamental para la comprensión de las matemáticas, como ya se ha indicado.

Diversos autores (Torres, 1994; Vilella y Contreras, 2005) y la propia experiencia como docentes muestran que la utilización del libro de texto en el aula permite al profesorado gestionar la temporalización de manera más sencilla y al alumnado tener acceso a un documento que podrá consultar si no ha quedado clara alguna explicación y, sobre todo, como fuente para la realización de actividades. Pero, salvo estas ventajas, una para alumnos y otra para profesores, encontramos una serie de inconvenientes como el hecho de que no parte de los conocimientos previos de los alumnos sino que da por supuesto el punto de partida y no atiende a la diversidad. Además, no fomenta la interacción con los compañeros, la realización de trabajos cooperativos, trabajos de campo o de investigación o talleres de carácter interdisciplinar y potencia la actividad rutinaria y repetitiva.

Todo lo expuesto anteriormente nos lleva a considerar, tal como señalan Vilella y Contreras (2005) que, a pesar de la importancia que tiene la utilización del libro de texto en el aula y la responsabilidad que en muchas ocasiones se deja que recaiga en el manual, la elección de dicho recurso no se realiza de una forma especialmente cuidadosa. Por este motivo consideramos que es importante que la elección del libro de texto que va a utilizarse en el aula se realice siguiendo un modelo de análisis y valoración de manuales escolares que permita realizar dicha elección de forma rigurosa (Monteerrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012). En muchas ocasiones, esta decisión provoca situaciones en las que, cuando ya se está utilizando el libro de texto en el aula, se observan deficiencias importantes que hacen que el funcionamiento no sea el esperado. Por este motivo, de acuerdo con Vilella y Contreras, consideramos que “parece necesario buscar espacios en el ámbito de la formación inicial y permanente del profesorado para realizar actividades formativas que permitan añadir al conocimiento profesional del docente criterios explícitos para la selección y uso de libros de texto” (2005, p. 431).

MATERIALES MANIPULATIVOS

Bruner (1966) indica que para interiorizar un concepto o adquirir un conocimiento matemático es necesario el paso por tres procesos: Concreto, donde los materiales manipulativos sirven de apoyo para un acercamiento a la realidad; Pictórico, donde la información se interpreta de forma visual a través del dibujo; y Simbólico, donde son los propios símbolos involucrados en la tarea los que cobran importancia, plasmando así los Procesos mentales de la fases Concreta y Pictórica. English (2013; citado en Rodríguez-Muñoz et al., 2021) señala que el trabajo con objetos, primero desde la manipulación y después desde lo gráfico, permite a los alumnos la distinción de diferentes características de esos objetos, facilitando así el paso a la abstracción matemática.

Para establecer una correcta clasificación de los materiales manipulativos, se van a adaptar diferentes clasificaciones no excluyentes que han dado algunos autores, como son su diseño y creación (Cascallana, 1988) y la utilidad y el formato en el que se presentan (Flores et

al., 2011). Además, se ha ampliado con una clasificación de los materiales manipulativos según el material de creación, obteniendo así una clasificación más completa (Figura 6).

Quizás una de las clasificaciones que se debe explicar para una mejor comprensión es la realizada por Cascallana (1988), quien entiende por material estructurado o específico aquel cuyo diseño y creación tiene un fin didáctico (por ejemplo: las regletas de Cuisenaire, los geoplanos o los policubos, entre otros), y por material no estructurado o no específico, aquel cuyo diseño y creación está relacionado con otros aspectos cotidianos, sin finalidad didáctica propia (por ejemplo: animales, muñecos, coches, entre otros).

El uso de los materiales manipulativos no debería ser una recomendación, sino una obligación pedagógica (Alsina, 2004; Canals, 2013, citados en Sotos y Ródenas, 2018). De hecho, su uso en cualquier nivel académico permite que el alumnado adquiera conocimientos y desarrolle la competencia matemática (De Castro y Palop, 2019), quizás por este motivo, los nuevos currículos educativos le prestan especial atención.

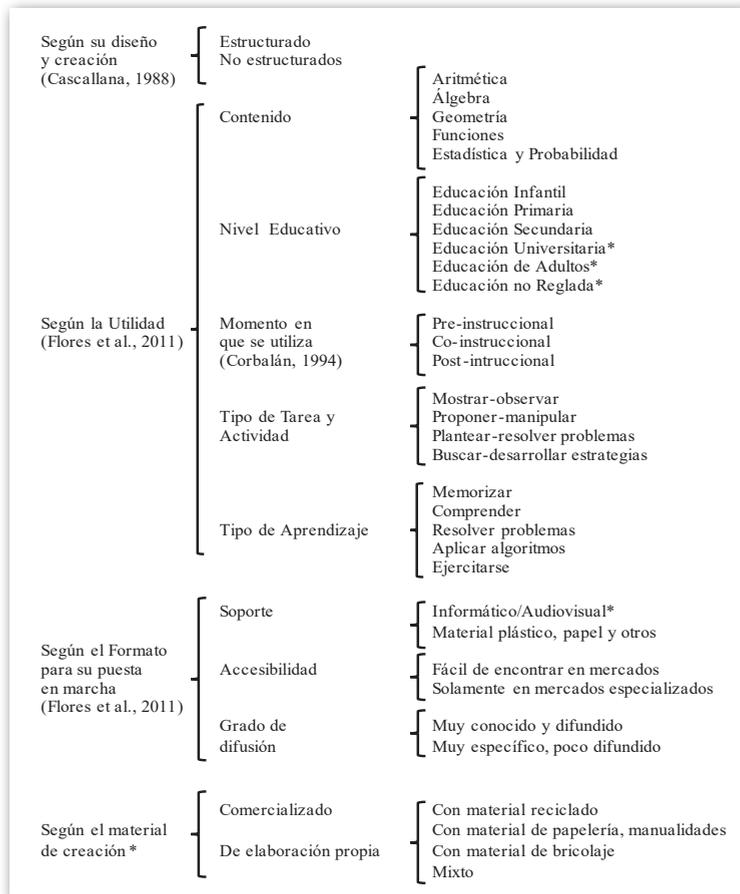


Figura 6. Clasificación de materiales manipulativos. (Nota: La ampliación de la clasificación está indicada con asterisco (*))

El Real Decreto 95/2022 de 1 de febrero de 2022 (B.O.E. 02-02-2022) y el Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo de 2022 (B.O.E. 02-03-2022) por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil y Primaria, respectivamente, apuntan que, para un correcto desarrollo de la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, se ha de atender especialmente a la manipulación de objetos y comprobación de fenómenos, contextualizando e invitando a los alumnos a la reflexión, al razonamiento y al establecimiento de relaciones. Del mismo modo, el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo de 2022 (B.O.E. 30-03-2022) por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria defiende que la formulación y comprobación de las conjeturas se puede realizar por medio de materiales manipulativos. Además, los nuevos currículos educativos incluyen como saber básico el sentido socioafectivo, teniendo cabida en él las creencias, actitudes y emociones de los alumnos hacia las matemáticas.

Ante todas estas cuestiones, ha de quedar claro que el docente tiene un papel importante en el aula que debe trabajar en varios sentidos, siempre teniendo en cuenta el objetivo de aprendizaje que se plantee para un correcto desarrollo y cumplimiento del currículo (Abaurrea et al., 2019). Por una parte, es el que debe seleccionar el tipo de tareas matemáticas que quiere desarrollar en el aula (Sánchez-Barbero, Chamoso et al., 2020); por otra parte, es el que debe seleccionar el medio adecuado para la consecución de este objetivo (Valbuena et al., 2018) y, por último, es el que debe mediar en el aula redirigiendo la interacción de los estudiantes hacia un correcto uso del material dependiendo de la tarea propuesta, para la consecución del objetivo de aprendizaje planteado (Sua y Jaime, 2021). Esto, junto con las ideas de Valbuena et al. (2018) referidas a que la calidad de la educación está ligada a la calidad docente, lleva a pensar que en la formación docente debería asumir mayor importancia el aprendizaje del uso de recursos didácticos (Sánchez-Barbero, Cáceres et al., 2020) o, incluso, trabajar en la formación docente cómo elaborar materiales manipulativos (Sánchez-Barbero et al., 2018).

Aunque existen numerosos y variados materiales manipulativos, a modo de ejemplo se van a utilizar los policubos, fundamentalmente por tres razones: es un material manipulativo conocido, su versatilidad permite trabajar diversos contenidos matemáticos en diferentes niveles y su bajo coste es asumible por cualquier centro educativo.

Ejemplo 1: Patrones y sentido numérico

La búsqueda de patrones y regularidades es un contenido que se puede trabajar desde Educación Infantil, comenzando con los patrones de repetición, donde se puede pedir a los alumnos que continúen añadiendo policubos a la pieza que se les presenta (Figura 7).



Figura 7. Patrón de repetición

Unido a la búsqueda de patrones, se puede trabajar el sentido numérico planteando diferentes situaciones como la que se presenta en la Figura 8 donde se espera que continúen añadiendo cuatro fichas rojas, una ficha blanca, cinco fichas rojas, etc., o la que se muestra en la Figura 9 donde el objetivo es trabajar la secuencia numérica de números pares e impares.



Figura 8. Patrón numérico

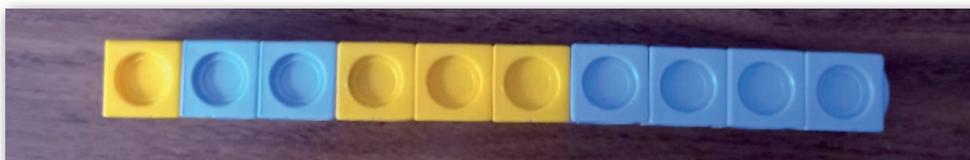


Figura 9. Secuencia numérica, pares e impares

Ejemplo 2: Sentido geométrico

El sentido geométrico se puede trabajar pidiendo a los alumnos que construyan los tricubos (Figura 10), los tetracubos (Figura 11) y, finalmente, se eligen las piezas de éstos que permiten construir un cubosoma (Figura 12).

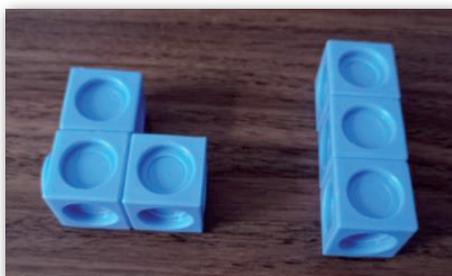


Figura 10. Tricubos



Figura 11. Tetracubos

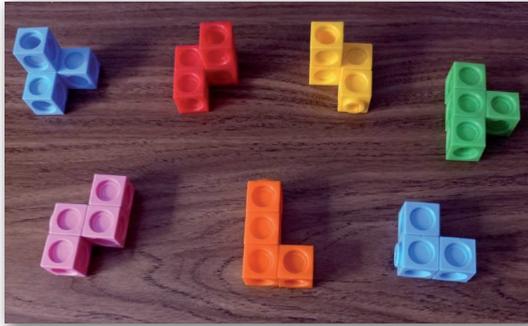


Figura 12. Cubosoma

A continuación, y de modo amplio, se muestran ejemplos para trabajar el sentido estocástico desde Educación Infantil hasta Educación Secundaria.

Ejemplo 3: Moda (Figura 13)

- Situación: se pregunta a 10 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que cero, cuatro que uno y tres que dos. ¿Cuál es la moda de hermanos?
- Pensamiento: la moda correspondería a la columna más alta.
- Respuesta: la moda es 1.



Figura 13. Cálculo de la moda

Ejemplo 4: Media (Figura 14)

- Situación: un alumno ha sacado en sus exámenes de matemáticas del primer trimestre un 4, 5 y 6, pero... ¿cómo le ayudamos a calcular su nota final?
- Pensamiento: tendríamos que conseguir que las tres columnas relativas a las notas de cada examen tengan la misma altura.
- Respuesta: la media es 5.

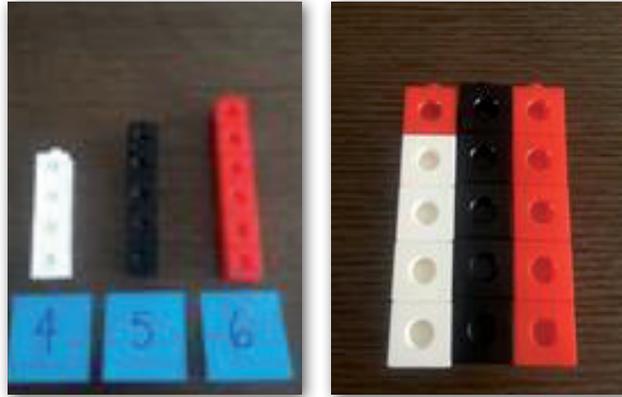


Figura 14. Cálculo de la media

Ejemplo 5: Mediana con un número impar de datos (Figura 15)

- Situación: se pregunta a 9 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que 0, tres que 1 y tres que 2. ¿Cuál es la mediana de hermanos?
- Pensamiento: ordenar todos los policubos, primero el color correspondiente a cero hermanos, después el correspondiente a un hermano y por último el correspondiente a dos hermanos; retiraríamos un policubo de cada extremo; y así repetidamente hasta que en el centro solo quede uno (el número de alumnos es impar), que sería la mediana.
- Respuesta: la mediana es 1.



Figura 15. Cálculo de la mediana con número impar de datos

Ejemplo 6: Mediana con un número par de datos (Figura 16)

- Situación: se pregunta a 10 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que cero, cuatro que uno y tres que dos. ¿Cuál es la mediana de hermanos?
- Pensamiento: ordenar todos los policubos, primero el color correspondiente a cero hermanos, después el correspondiente a un hermano y por último el correspondiente a dos hermanos; retiraríamos un policubo de cada extremo; hasta que en el centro queden dos policubos (el número de alumnos es par). Ahora, calcularíamos la media de estos dos números.
- Respuesta: la mediana es 1.

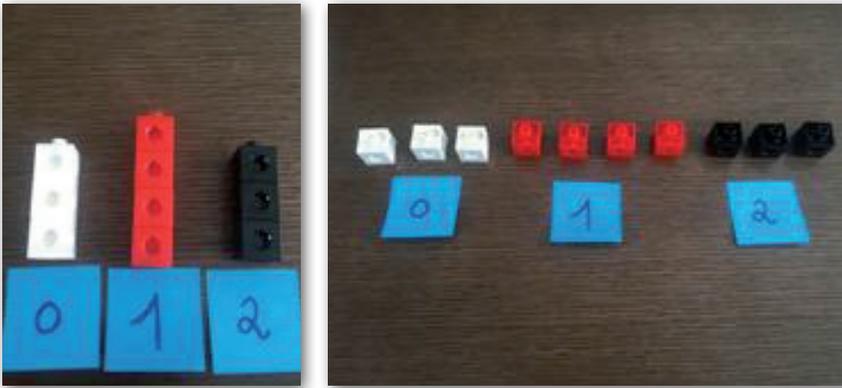


Figura 16. Cálculo de la mediana con número par de datos

Ejemplo 7: Permutaciones (Figura 17)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo), ¿cuántas banderas de 3 colores distintos podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos todos de tres en tres y sí importa el orden.
- Respuesta: son permutaciones de 3 elementos tomados de 3 en 3.

$$P_n = n! = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



Figura 17. Cálculo de permutaciones

Ejemplo 8: Variaciones sin repetición (Figura 18)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántas banderas de 2 colores distintos (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, sí importa el orden y no se pueden repetir.
- Respuesta: son variaciones sin repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

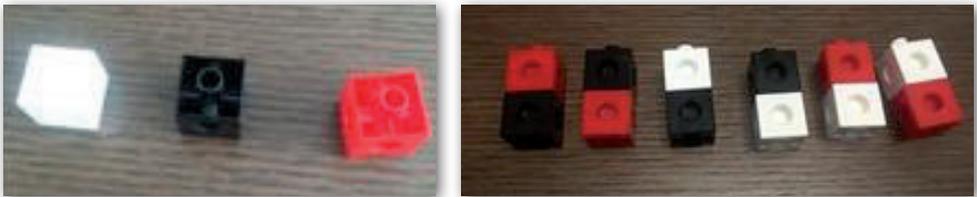


Figura 18. Cálculo de variaciones sin repetición

Ejemplo 9: Variaciones con repetición (Figura 19)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántas banderas de 2 colores (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, sí importa el orden y sí se pueden repetir.
- Respuesta: son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$VR_{m,n} = m^n = V_{3,2} = 3^2 = 9$$



Figura 19. Cálculo de variaciones con repetición

Ejemplo 10: Combinaciones sin repetición (Figura 20)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántos grupos de 2 colores (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, no importa el orden y no se pueden repetir.

- Respuesta: son combinaciones sin repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$Cm, n = \frac{V_{m,n}}{P_n} = C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

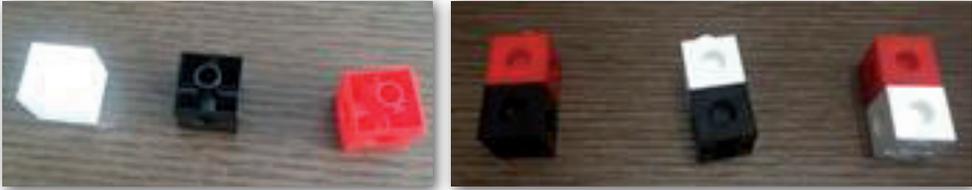


Figura 20. Cálculo de combinaciones sin repetición

Ejemplo 11: Combinaciones con repetición (Figura 21)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántos grupos de 2 colores (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, no importa el orden y sí se pueden repetir.
- Respuesta: luego son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$CRm, n = \binom{m+n-1}{n} = CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$



Figura 21. Cálculo de combinaciones con repetición

Elaboración de materiales manipulativos y ejemplos

Según la clasificación de materiales manipulativos (Figura 6), existe material reciclado y de papelería, entre otros, que pueden servir de materia prima para la elaboración de materiales manipulativos adaptados a las necesidades de los alumnos. Por ejemplo, en la enseñanza para adultos (tengan o no discapacidades o dificultades de aprendizaje) cuando se disponen a trabajar con material manipulativo para el aprendizaje de un cierto contenido matemático, se encuentran con materiales comercializados, a veces muy infantiles, que nada tienen que ver con su edad. Por otra parte, en ocasiones, no se encuentran materiales manipulativos comercializados útiles para el aprendizaje

de determinados contenidos o conceptos matemáticos, o son demasiado costosos para poder disponer de ellos en los centros educativos, por lo que una posibilidad, ante estos casos, es la elaboración de materiales manipulativos atendiendo a las necesidades reales de los usuarios.

Es preciso tener claros los contenidos y objetivos matemáticos que quieren abordarse con la utilización del material manipulativo que se quiere elaborar. Generalmente, es preferible elaborar un material para abordar un contenido u objetivo específico, que uno general.

Por otra parte, hay que determinar con claridad la población a la que irá destinado el material. Precisamente esta es una de las grandes ventajas de la elaboración de este tipo de material ya que podemos crear un material para atender las necesidades específicas de un alumnado concreto.

A continuación, se muestran ejemplos de materiales manipulativos, elaborados por futuros docentes de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, que permiten su adaptación para alumnos con discapacidad visual. La ficha sigue el formato propuesto por Chamoso et al. (1997).

Ejemplo 1:

NOMBRE: “*La mariquita de colores*” (Figura 22)

NIVEL: Educación Infantil

CONTENIDOS:

- Colores.
- Conteos numéricos.

OBJETIVOS:

- Conocer los colores.
- Discriminar por colores.
- Relacionar los colores.
- Realizar conteos numéricos.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: fieltro y ojos móviles.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: se tiene la mariquita, puntos de tres colores (rosas, azules y verdes) y un dado en cuyas caras tienen los tres colores relativos a los puntos. El alumno tira el dado y tendrá que poner sobre la mariquita todos los puntos del mismo color que el dado indica. Así mismo, el alumno podrá realizar el conteo de cuántos puntos hay sobre la mariquita a medida que los va colocando.

VARIANTES: según se avanza de nivel, se puede modificar el material:

- Añadir más colores para su discriminación.
- Añadir un dado numérico de modo que el alumno debe tirar los dos dados (el de colores y el numérico) y poner sobre la mariquita tantos puntos como indica el dado numérico y del color que indica el dado de colores.
- Realizar sumas y restas. El alumno tira dos veces el dado numérico y deberá sumar o restar (del mayor número sacado el menor de ellos), de modo que ese sería el total de puntos que debe poner sobre la mariquita, del color que indique el dado de colores.

OBSERVACIONES: adaptación a discapacidad visual. Realizar los puntos de la mariquita de diferente material, por ejemplo: los puntos rosas en goma eva, los verdes en fieltro y los azules en cartón con relieve (y lo mismo para el dado de colores). Si algún alumno presenta una discapacidad visual, mediante el tacto sabrá los puntos que debe poner sobre la mariquita y así realizar la actividad con los compañeros.



Figura 22. La mariquita de colores

Ejemplo 2:

NOMBRE: “El árbol de los números” (Figura 23)

NIVEL: Educación Primaria y Secundaria

CONTENIDOS:

- Números pares e impares.
- Números enteros.

OBJETIVOS:

- Clasificar números.
- Diferenciar números positivos y negativos.
- Diferenciar números pares e impares.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: cartulina, goma eva, perlitas adhesivas y plástico de plastificar.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: se tienen dos ramas en el árbol. Una de ellas soporta los números pares y otra los impares y, a su vez, cada una de ellas se bifurca en positivos y negativos. El alumno deberá seleccionar una ficha numérica al azar y tendrá que clasificar el número de la ficha según sea par o impar, y con signo positivo o negativo, introduciendo la ficha del número en la copa del árbol adecuada.

VARIANTES: el alumno realiza operaciones con las fichas numéricas y, clasifica el resultado, en la copa del árbol correspondiente.

OBSERVACIONES: adaptación a discapacidad visual. Las palabras que nos llevan a la correcta clasificación de las fichas numéricas están en sistema braille. Un aspecto importante sería adaptarlas adecuadamente siguiendo las dimensiones que requiere la lectura en dicho sistema. También podría hacerse cada manzana de un material diferente para que los alumnos con discapacidad visual puedan reconocerlas al tacto.



Figura 23. El árbol de los números. Material adaptado a discapacidad visual

Ejemplo 3:

NOMBRE: “*La revolución de las figuras geométricas*” (Figura 24)

NIVEL: Educación Secundaria

CONTENIDOS:

- Figuras planas.
- Cuerpos de revolución.

OBJETIVOS:

- Conocer cómo se forman los diferentes cuerpos de revolución (cono, tronco de cono, cilindro y esfera)
- Asociar el cuerpo de revolución a la figura geométrica que lo genera.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: goma eva, pajitas, pegamento y tijeras.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: al hacer girar las pajitas se generan los cuerpos de revolución correspondientes.

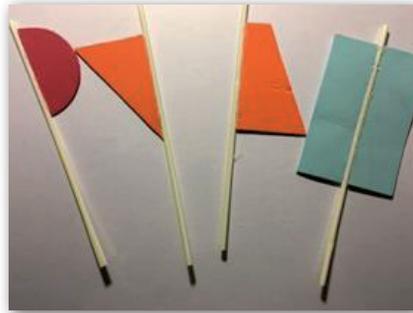


Figura 24. La revolución de las figuras geométricas

VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL USO DE RECURSOS Y MATERIALES MANIPULATIVOS

El uso de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas cuenta con ventajas e inconvenientes que se han tratado de recoger en una única tabla (Tabla 1), aunque debido a la diversidad de recursos y materiales y de las formas de uso, es posible que algunas de ellas no correspondan a determinados recursos.

Tabla 1. Ventajas e inconvenientes del uso de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas

Ventajas	Inconvenientes
Aumenta la motivación y las actitudes positivas hacia las matemáticas	Desconocimiento del profesorado
Propicia la participación del estudiante	Falta del material necesario
Minora el rechazo hacia las matemáticas y ayuda a superar bloqueos	Alto coste económico
Mejora la comprensión	Ratio profesor-alumno
Ayuda al desarrollo del pensamiento matemático y facilita el paso de concreto a abstracto	Disposición y tamaño del aula

Ventajas	Inconvenientes
Transforma el aula en un taller para la construcción del conocimiento matemático mediante la manipulación y experimentación Proporciona un aprendizaje significativo	Necesidad de flexibilidad horaria Sensación de pérdida (o de falta) de tiempo
Posibilita la investigación en el aula y fomenta la resolución de problemas Promueve el trabajo en grupo (cooperativo/colaborativo) Fomenta la interacción positiva entre compañeros Ayuda en el reconocimiento del éxito y los errores propios y ajenos. Mejora la empatía Refuerza la autoestima y fomenta la autonomía Facilita la adquisición de rutinas y el respeto a las normas Estimula la imaginación y potencia la creatividad Desarrolla pensamiento crítico y favorece la discusión Facilita la adquisición de competencias y la alfabetización matemática Permite la atención a la diversidad	Menosprecio o rechazo por parte de algunos padres

RECOMENDACIONES PARA EL USO DE RECURSOS Y MATERIALES

Para poder utilizar cualquier recurso se deben seguir los siguientes pasos: “1° Reconocerlo, tener conciencia de que existe. 2° Admitir que se necesita, creer en él. 3° Saber utilizarlo.” (Chamoso y Rawson, 2003, p.120). Existen multitud de recursos didácticos que se pueden encontrar en catálogos, páginas web, etc., a los que hay que añadir aquellos que pueden elaborar tanto el profesor como los estudiantes (Paso 1°). A la hora de seleccionarlos, se debe decidir si son adecuados, o no, para cumplir el objetivo de aprendizaje pretendido, y que no debería ser, únicamente, desarrollar una sesión divertida (Paso 2°). Por último, se debe planificar un uso adecuado del mismo (Paso 3°). Queremos incidir en la importancia del segundo paso, de tener confianza en los beneficios que este puede aportar, conocerlo detalladamente, su aplicación y su posible contribución al aprendizaje. Además, su uso debe ser resultado de la planificación de situaciones de aprendizaje con una selección de recursos y actividades, en la medida de lo posible, vinculadas al contexto cotidiano, y en función del desarrollo del pensamiento del alumno.

Algunos aspectos para su utilización que se deben tener en cuenta en esta planificación son los siguientes: objetivos de aprendizaje (contenido...), alumnos a los que se dirige (número, edad, características, ...), tiempo de uso (cuándo y cuánto),

modo de empleo (metodología, ...). Así, cuando nos planteamos el uso de recursos o materiales manipulativos para trabajar matemáticas en las aulas, debemos dar respuesta a algunas preguntas tal como se recoge en la Tabla 2.

Tabla 2. Preguntas fundamentales a la hora de usar recursos y materiales

Preguntas	Respuestas
Qué	Contenidos y objetivos matemáticos que se van a trabajar
A quién	Características particulares de los alumnos a los que se dirige
Cuándo y cuánto	Tiempo que se va a emplear
Dónde	Características del aula o lugar
Cómo	Metodología para el desarrollo de la sesión

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, se propone el siguiente Decálogo para la utilización de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas (Figura 25).

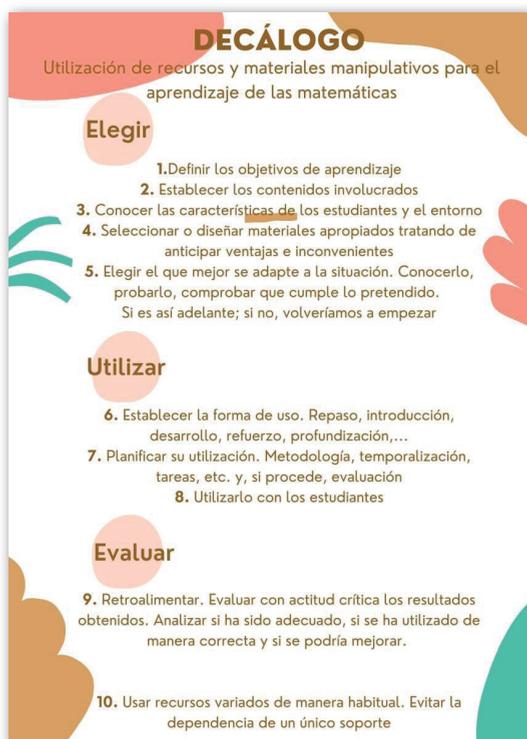


Figura 25. Decálogo para la utilización de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas (creado con plantilla a través de www.canva.com)

CONSIDERACIONES FINALES

Las nuevas leyes educativas dejan constancia de la importancia del uso de diferentes recursos, en particular de materiales manipulativos, para una correcta comprensión de las matemáticas, facilitando el paso de nuestro alumnado de lo concreto a lo abstracto y haciendo hincapié en las posibilidades que ofrece para atender a la diversidad presente en las aulas de forma habitual.

Teniendo en cuenta los inconvenientes que presenta la utilización del libro de texto como único recurso en el aula, así como las deficiencias que, al menos de momento, se observan en los libros de texto digitales, consideramos fundamental el uso de diferentes recursos didácticos en el aula de matemáticas ya que favorecen el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fomentan el razonamiento matemático y potencian los procesos de abstracción.

Se ha tratado de mostrar diversos recursos y posibilidades de utilización, pero no se debe olvidar que su uso, en el aula de matemáticas, es un medio para conseguir el objetivo perseguido y no el fin en sí mismo. Cualquier recurso utilizado, ya sea el libro de texto, material manipulativo u otros recursos, debe estar al servicio del profesor, no al revés. Se recomienda no abusar de ninguno de ellos, ya que se convertiría en algo repetitivo, perdiendo su aspecto motivador mientras que, por el contrario, el uso variado evita la dependencia del soporte utilizado y puede favorecer el proceso de generalización de los conceptos. Por otro lado, se entiende que los diferentes recursos y materiales deberían utilizarse de manera habitual, tanto dentro como fuera del aula de Matemáticas, sin reducir su uso únicamente a ocasiones especiales.

Con todo lo expuesto en el capítulo queda patente la importancia del uso de recursos y materiales diferentes al libro de texto, pero que se complementen entre sí, así como la importancia que tiene el docente en el aula, pues es el encargado de la selección tanto de las tareas como de los recursos que se utilizarán en el aula. Es por esto por lo que se debe dar mayor importancia a la introducción en los planes de formación docente de la enseñanza de una adecuada elección y un correcto uso y elaboración de diferentes recursos didácticos.

REFERENCIAS

- Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R (2019). Análisis didáctico de actividades para el estudio de lugares geométricos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 143-152. SEIEM.
- Alegría, P. y Ruiz, J. C. (2002). La Matemagia Desvelada. *SIGMA*, 21, 145-174.
https://www.researchgate.net/publication/28067236_La_matemagia_desvelada.
- Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de las competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Narcea.
- Area, M., Parcerisa, A. y Rodríguez, J. (Coords.) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Graó.

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Cantor, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9–28.
- Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Aula XXI.
- Chamoso, J. M., Durán, J., García, J. F., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumento para enseñar matemáticas. *SUMA*, 47, 47-58.
- Chamoso, J. M., Graña, B., Rodríguez, M. y Zárate, J. (2005). *Matemáticas desde la Prensa*. Nivola.
- Chamoso, J. M., Martín, P., Pereña, J. C. y Revuelta, F. J. (1997). Algunos materiales para su utilización en el aula de Matemáticas. *Aula*, 9, 319-350.
- Chamoso, J. M. y Rawson, W. (2003). *Matemáticas en una tarde de paseo*. Nivola.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. y Delgado, M. L. (2010). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*, 173-186. SEIEM.
- Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. y Delgado, M. L. (2011). El álgebra a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 237-247.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Síntesis.
- De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 243-252. SEIEM.
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Dover.
- López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 73 – 94.
- Martín, M. y Martín, A. (2021). Proyecto “ESC3N4S MA/TEMÁTICAS”. *Making Of. Cuadernos de Cine y Educación*, 162. Centro de Comunicación y Pedagogía. <http://www.centrocp.com/proyecto-esc3n4s-ma-tematicas/>.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 37-53. SEIEM.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación*, 358, 471-496. <http://doi.org/10-4438/1988-592X-RE-2010-358-087>.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L. y Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>.

- Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 19–33.
- Olmos, R. y Martí-Contreras, O. (2021). ¿Nos ayuda la competencia matemática a no dejarnos engañar por las fake news? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*, 668. SEIEM.
- Quintana, J. (2002). *Las Matemáticas de Alicia y Gulliver: lo grande y lo pequeño*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
https://fespm.es/IMG/pdf/dem2002_-_las_matematicas_de_alicia_y_gulliver.pdf
- Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General. *Boletín Oficial del Estado*, 212, de 4 de septiembre de 1998. <https://www.boe.es/boe/dias/1998/09/04/pdfs/A30005-30007.pdf>.
- Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 28, de 2 de febrero de 2022. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95>.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 2 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296>.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, de 30 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/30/pdfs/BOE-A-2022-4975.pdf>.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas. Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA*, 15(4), 311-338. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511>.
- Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., Rodríguez, M. M. y Rodríguez, D. (2020). Elaborando cómics en tiempo de confinamiento para aprender matemáticas en Educación Infantil y Primaria. *Magister*, 32(1), 97-101.
<https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.97-101>.
- Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Cáceres, M. J., Rodríguez, M. M., Salomón, M. S. y González, M. T. (2018). Creación de material manipulativo para futuros docentes de Infantil, Primaria y Secundaria para el aprendizaje de Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán” (Eds.), *XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León*, 236-244.
- Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2020). Analysis of teacher-student interaction in the joint solving of non-routine problems in Primary Education classrooms. *Sustainability*, 12, 10428. <https://doi.org/10.3390/su122410428>.
- Sorando, J.M. (2018). *100 escenas de cine y televisión para la clase de matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Sotos, M. A. y Ródenas, M. A. (2018). Análisis cuantitativo del uso de materiales didácticos para trabajar las matemáticas en educación infantil. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*, 664. SEIEM.

- Sua, C. y Jaime, A. (2021). Enriquecimiento extracurricular para talento matemático con ayuda de recursos manipulativos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 159-166. Universidad de La Rioja.
- Torres, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el curriculum integrado*. Morata.
- Valbuena, S., Conde, R. y Ortiz, J. (2018). La investigación en educación matemática y práctica pedagógica, perspectiva de licenciados en matemáticas en formación. *Revista Educación y Humanismo*, 20(34), 201-215. <http://doi.org/10.17081/eduhum.20.34.2593>.
- Van Dormolen, J. (1986). Textual Análisis. En Christiansen, B., Howson, A. G. Y Otte, M. (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, 141-171. D. Reidel Publishing Company.
- Villella, J. y Contreras, L. C. (2005). La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, 8(2), 419-433.