Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas[1]

Mathematics Teacher Education and Professional Development

Llinares, S.[a] (Coord.)
Breda, A [b], Climent, N.[c], Fernández, C.[a], Font, V.[b], Lupiáñez, J.L.[d], Moreno, M.[a], Perez-Tyteca, P.[a], Ruiz-Hidalgo, J.F.[d], Sánchez, A.[b]
[a] *Universidad de Alicante,*
[b] *Universidad de Barcelona,*
[c] *Universidad de Huelva,*
[d] *Universidad de Granada.*

Resumen

La investigación en Didáctica de la Matemática proporciona evidencias que permiten materializar propuestas de formación de maestros y profesores de matemáticas basadas en un marco de competencias profesionales docentes. Dos ideas son claves en este proceso. Por una parte, la identificación de diferentes prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemática. Por otra, la identificación del conocimiento que se activa en la realización de estas prácticas profesionales que se considera conocimiento especializado que debe poseer un profesor de matemáticas y que procede de las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Este capítulo propone y describe formas de materializar un marco de competencias profesionales docente para la formación de maestros y profesores de matemáticas de educación secundaria.

Palabras clave: Formación profesores de Matemáticas, Desarrollo profesional, Prácticas profesionales específicas, Conocimiento especializado, Enseñar matemáticas, Competencia profesional para la enseñanza.

Abstract

Research in Didactics of Mathematics provides evidence that allows materializing mathematics teacher education based on a framework of professional teaching skills. Two ideas are key in this process. First, the identification of different core practices that makes up mathematics teaching as a practice. Second, the identification of the specific knowledge activated in the performance of these core practices considered mathematics teachers' professional knowledge. This knowledge comes from the research in Didactics of Mathematics. This chapter proposes and describes ways to materialize a framework of core practices for the mathematics teacher education (primary and secondary school teachers).

Keywords: Mathematics Teacher Education, Professional development, Core practices, Mathematics Knowledge for Teaching, Mathematics Teaching, Teaching competence.

1. Autores de cada sección: A.1. Ceneida Fernández y Mar Moreno (UA); A.2. José Luis Lupiáñez y Juan Francisco Ruiz Hidalgo (UGR); A.3. y C.2. Adriana Breda, Alicia Sánchez, Vicenç Font (UB); C.1. Nuria Climent (UHU); D.1. Patricia Perez-Tyteca (UA).

Introducción

Es reconocida la importancia del papel de los docentes para una enseñanza eficaz. Como consecuencia, se necesita tener docentes bien formados y profesionalmente capaces. Esto implica reconocer la existencia de un conocimiento específico para enseñar matemáticas y la identificación de un determinado conjunto de *prácticas específicas profesionales* que conforman la práctica de enseñar matemáticas. La articulación entre prácticas específicas profesionales y el conocimiento que apoya el desarrollo de estas prácticas configuran el significado de las competencias docentes profesionales. Es decir, ser competente en la enseñanza de las matemáticas implica ser capaz de tomar decisiones de acción apoyadas en procesos de razonamiento usando conocimiento específico vinculado al conjunto de prácticas que constituyen las prácticas de enseñar matemáticas.

Llegar a ser competente en la enseñanza de las matemáticas, desde estas referencias, exige tener en cuenta aproximaciones y perspectivas desarrolladas en la investigación en Didáctica de la Matemática sobre la formación inicial y sobre el desarrollo profesional, así como en la articulación del acceso a la profesión docente. En este sentido, el conocimiento generado por las investigaciones en formación inicial y permanente de profesores de matemáticas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática aporta elementos que pueden dar coherencia al modelo de formación de docentes de matemáticas desde un marco de competencias profesionales docentes (desde la formación inicial de maestros y profesores de educación secundaria, hasta las propuestas de desarrollo profesional) (Badillo et al., 2019). Dicho modelo de profesión docente derivado de los resultados de proyectos de investigación y desarrollo (evidencias que apoyan las decisiones) y la experiencia práctica de los formadores de docentes de matemáticas permite asumir una manera coherente de concebir la formación inicial, el acceso a la profesión y las iniciativas de desarrollo profesional que se organiza por competencias profesionales. Estos proyectos de investigación y desarrollo han proporcionado conocimiento sobre los procesos formativos y han generado recursos didácticos específicos (Castro, 2011; Chamorro, 2003; Carrillo et al., 2016). En este capítulo se proporciona información sobre los conocimientos y recursos proporcionando ejemplos de cómo materializar una manera de entender un marco de competencias profesionales docentes para organizar la formación de los maestros y profesores de matemáticas.

Las investigaciones desde la Didáctica de la Matemática han permitido identificar *prácticas profesionales específicas* vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas y han generado *conocimientos que apoyan dichas prácticas específicas*. En la formación inicial y continua, tanto de maestros de educación primaria e infantil, como de profesores de matemáticas de educación secundaria, estas ideas y formas de proceder comparten el principio básico de que los currículos formativos deben estar organizados por el desarrollo de competencias profesionales (binomio entre prácticas específicas profesionales y conocimiento que apoya la realización de dichas prácticas). Para ello, se identifican tanto las prácticas específicas vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas como el conocimiento derivado desde las investigaciones en Didáctica de la matemática que apoya dichas prácticas. En particular, conocimientos específicos que permitan a los docentes describir, analizar, explicar lo que sucede en una clase de matemáticas para poder justificar las decisiones de acción (proponer propuestas de mejora). Algunas de estas prácticas profesionales específicas (formando parte de competencias profesionales docentes) son:

- Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes a partir de sus producciones matemáticas (orales o escritas) como una forma de dar sentido a lo que sucede en el aula para tomar decisiones de acción adecuadas.
- Identificar el potencial matemático de las tareas matemáticas como medio para apoyar la creación de oportunidades de aprendizaje, considerando las expectativas de aprendizaje y las dificultades y errores que cometen los estudiantes (Planificación/diseño, selección y valoración de tareas y secuencias de enseñanza) como un ámbito de interacción con el currículo y los materiales y recursos didácticos.
- Gestionar las secuencias didácticas en el aula de matemáticas considerando las interacciones entre el contenido, los estudiantes, y el contexto.
- Reflexionar sobre la propia práctica como una forma de problematizar el proceso de enseñanza de las matemáticas (identificar problemas en la enseñanza de las matemáticas para generar soluciones).

En estas prácticas profesionales específicas, la evaluación del aprendizaje matemático y la competencia en el uso de las tecnologías de la educación en la enseñanza de las matemáticas es transversal lo que requiere el uso de conocimiento de Didáctica de la Matemática para diseñar instrumentos e identificar niveles de logro de las competencias indicadas en el currículo.

La sinergia entre prácticas profesionales específicas y conocimiento activado en su realización define competencias docentes profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Esta sinergia es la que caracteriza las propuestas de formación docente y, por tanto, el modelo formativo por competencias. El conocimiento específico vinculado al desarrollo de estas prácticas funciona como un instrumento/herramienta conceptual para permitir a los docentes describir, explicar y justificar sus acciones. Por ejemplo, ideas tales como trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, criterios de idoneidad didáctica de las secuencias de enseñanza, oportunidades de aprendizaje o demanda cognitiva de las tareas matemáticas, se convierten en referencias para el desarrollo de las prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemáticas.

Además, el modelo de formación docente debe considerar cómo se desarrollan estas competencias profesionales y cómo podemos generar indicadores de su desarrollo (como una manera de tener instrumentos para la evaluación de dichas competencias). Por ello, la investigación en formación de maestros y profesores de Matemáticas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática ha empezado a generar dichos indicadores de desarrollo de las competencias profesionales mediante ciclos de diseño, implementación y análisis de entornos de aprendizaje, oportunidades de aprendizaje y de propuestas formativas.

Por otra parte, las prácticas específicas y el conocimiento que las apoya (conocimiento didáctico y matemático que se activa al realizarlas) están estrechamente vinculados al conocimiento de matemáticas del futuro docente. Esto genera cuestiones particulares tanto en la formación de maestros como de profesores de matemáticas de educación secundaria. En el caso de la formación inicial de maestros, el conocimiento de matemáticas que deben poseer los aspirantes a entrar en el programa de formación debe asegurarnos que puedan aprovechar las oportunidades de desarrollo de las competencias profesionales que los programas de formación pueden ofrecer (Gorgorio et al., 2021). La realidad y las investigaciones realizadas indican que el sistema educativo no está garantizando el conocimiento elemental de matemáticas (su competencia matemática) para poder aprovechar al máximo las oportunidades de aprendizaje y de desarrollo de las competencias profesionales docentes que los programas de formación de maestros ofrecen. Por otra parte, también es necesario asegurar la competencia matemática de los aspirantes a profesores de educación secundaria como condición para asegurar el aprovechamiento de las oportunidades de desarrollo de las competencias profesiones.

Finalmente, el modelo de formación docente que se apoya en el desarrollo de competencias docentes específicas en la enseñanza de las matemáticas subraya la relevancia del *periodo de prácticas* en los centros educativos y el papel que pueda desempeñar el tutor tutora. El significado de *aprender en la práctica* significa concebir las aulas de los centros de prácticas como ambiente de aprendizaje con los mismos focos de aprender a razonar sobre los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas. La consideración de las aulas de los centros de prácticas como contextos para aprender a razonar sobre la enseñanza de las matemáticas (y no solo como lugar de aplicación de conocimiento previamente aprendido) implica desarrollar una nueva manera de concebir la formación docente. Esta nueva forma de entender el papel de los centros de prácticas incide en que las prácticas formativas en los centros educativos deben ser coherentes con el objetivo de aprender competencias profesionales específicas de la enseñanza de las matemáticas.

Las secciones siguientes proponen formas de materializar un marco de competencias profesionales docentes para la formación de maestros y profesores de matemáticas de educación secundaria. Ejemplos y formas de proceder que permiten identificar estas ideas en la práctica de formar maestros y profesores de matemáticas se presentan en cuatro secciones: sobre la formación inicial, el acceso a la profesión, sobre el desarrollo profesional y el dominio afectivo como una cuestión transversal.

Parte A. Formación inicial

A.1. Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para decidir sobre la enseñanza

Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para proponer criterios de acción es una práctica profesional específica. Caracterizar entornos de aprendizaje en los programas de formación de maestros y profesores de matemáticas que potencian el desarrollo de estas prácticas permite plantear aproximaciones holísticas con el foco en la sinergia entre las prácticas específicas y los procesos de razonamiento usando conocimiento especializado (Fernández, Choy, 2019; Fernández et al., 2018; GIDIMAT-UA, 2021; Llinares y Fernández, 2021). El foco sobre esta sinergia permite apoyar el desarrollo de competencias profesionales que doten a los docentes de matemáticas de recursos para describir, explicar, interpretar y proponer criterios de acción para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Por ejemplo, la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes articula las siguientes tres destrezas interrelacionadas: (i) reconocer estrategias de los estudiantes identificando elementos matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión de estos elementos matemáticos, y (iii) tomar decisiones sobre la enseñanza con el objetivo de favorecer la progresión conceptual de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Esta competencia requiere el uso de conocimiento de matemáticas, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de las matemáticas para decidir cómo continuar en la enseñanza (Brown et al., 2020; Mason, 2002).

Características de los entornos de aprendizaje en los programas de formación inicial dirigidos a desarrollar esta competencia son:

- Uso de representaciones de la práctica.
- Uso de preguntas guía para centrar la atención sobre los aspectos relevantes en un momento determinado del proceso formativo de los docentes.
- Uso de conocimiento generado por las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a modo de instrumentos conceptuales para describir, interpretar y decidir cómo continuar en la enseñanza. Este conocimiento es condensando en documentos con información relevante para la resolución de las tareas profesionales.
- Espacios de interacción para la discusión, reflexión y uso de las ideas teóricas para describir, y analizar las situaciones de la práctica, y justificar cómo debería continuar la secuencia de enseñanza.

Las representaciones de la práctica son descripciones de situaciones y recursos de la enseñanza de las matemáticas (videos, narrativas, planes de lecciones, respuestas escritas de los estudiantes, descripciones de sucesos ocurridos en el aula en forma de narrativas o en formato cómic, etc …) que proporcionan contextos para analizar e interpretar uno o varios aspectos de la enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo, videos mostrando interacciones entre estudiantes resolviendo un problema o las interacciones entre estudiantes y el docente discutiendo diferentes resoluciones de un problema, o respuestas de estudiantes a varios problemas/actividades, etc. Las representaciones de la práctica son instrumentos útiles en la formación de profesorado al permitir focalizar la atención del futuro docente en aspectos de la práctica objeto del aprendizaje docente (Buchbinder y Kuntze, 2018), ofreciendo oportunidades para relacionar ideas teóricas con la situación. Por ejemplo, ofreciendo la posibilidad de observar diferentes niveles de la progresión del aprendizaje de los estudiantes de primaria o secundaria.

En este contexto, las preguntas guía permiten centrar la atención en desarrollar las destrezas de describir, interpretar y decidir haciendo uso del conocimiento procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática (instrumentos conceptuales). Este conocimiento (documento teórico) proporciona al futuro docente conocimiento para analizar la representación de la práctica. Estos instrumentos conceptuales pueden ser Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) que ayudan a estructurar la mirada profesional del futuro docente (Fernández et al., 2018; Edgington et al., 2016). Una THA consta de objetivos de aprendizaje, un modelo hipotético de aprendizaje del concepto matemático, entendido como niveles de progresión en el aprendizaje del contenido matemático, y un conjunto de actividades que favorezcan la progresión en la comprensión (Simon, 1995).

Por último, se asume una forma de entender cómo se desarrollan las competencias docentes vinculada a la colaboración con otros, adoptando una perspectiva sociocultural del aprendizaje. De esta manera, se crean espacios de interacción para las discusiones presenciales en pequeños grupos o gran grupo o a través de un foro/debate virtual. A continuación, para mostrar estas características de los entornos de aprendizaje que han sido diseñados, implementados y analizados en ciclos formativos se presentan dos ejemplos centrados en el desarrollo de *la competencia mirar profesionalmente* (i) el pensamiento geométrico de los estudiantes en la formación de maestros de Educación Primaria y (ii) el pensamiento funcional de los estudiantes en la formación de futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria.

Un entorno de aprendizaje para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento geométrico de los estudiantes para maestro/a

Este entorno de aprendizaje tiene como objetivo desarrollar la competencia en reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes e interpretarla, usando información procedente de las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, con el fin de tomar decisiones para la enseñanza (Tabla 1).

Tabla 1. Estructura del entorno de aprendizaje para desarrollar competencias docentes vinculadas a interpretar el pensamiento geométrico en Educación Primaria (figuras, cuerpos geométricos e isometrías)

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
1	▪ Representación de la práctica (Libros de texto): Capítulo 11, Figuras Planas (VV. AA (2019). Matemáticas 6º primaria, tercer trimestre, pp. 202-217. Editorial SM. ▪ Preguntas guía: Centradas en el *análisis de los materiales curriculares*, y los tipos de tareas y su organización en los libros de texto	Currículo de Educación Primaria (http://www.docv.gva.es/datos/2014/07/07/pdf/2014_6347.pdf) y documento actual pendiente del desarrollo en las CC.AA. (BOE.es - BOE-A-2022-3296 Real Decreto 157/2022). Sobre las características de las tareas
2	▪ Representación de la práctica: Respuestas de estudiantes de 2º de Educación Primaria a una tarea de clasificar figuras. ▪ Preguntas guía: Centradas en la *identificación de los elementos matemáticos e interpretación la comprensión* de los atributos relevantes de las figuras	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987)
3	▪ Representación de la práctica: Actividades y tareas en una lección. ▪ Preguntas guía: Centradas en *anticipar posibles respuestas de estudiantes* en función del nivel de comprensión de Van Hiele, analizar respuestas de estudiantes y justificar decisiones para apoyar el progreso de los estudiantes	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987) ▪ Sobre el pensamiento geométrico: imagen del concepto, errores y dificultades (Dickson et al., 1991; Fernández y Llinares, 2012).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
4 y 5	▪ Representación de la práctica: Respuestas de estudiantes a la clasificación de figuras y cuerpos geométricos, respectivamente. ▪ Preguntas guía: Centradas en *anticipar, analizar e interpretar características de la comprensión* sobre la clasificación de figuras geométricas y la clasificación de cuerpos geométricos, respectivamente, y decidir cómo continuar.	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987) ▪ Sobre el pensamiento geométrico: imagen del concepto, errores y dificultades (Dickson et al., 1991; Fernández y Llinares, 2012).

Documentos de apoyo:

Battista, M. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Geometrical Shapes. Building on Students' Reasoning*. Portamouth: Heinemann (pag. 36).
Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC-Labor
Fernández, C. y Llinares, S. (2012). *Dificultades en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. UOC. Universitat Oberta de Catalunya.
Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En: S. Llinares, S. y M.V. Sánchez, M.V. (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (cap. VI). Alfar: Sevilla.

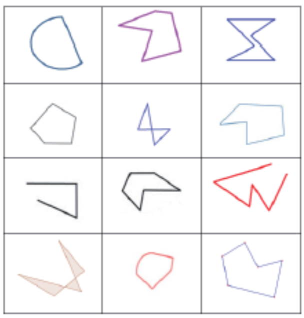
Veamos un ejemplo de una de las tareas profesionales de este entorno de enseñanza (tarea 2). Se proporciona a los estudiantes para maestro un documento teórico que es una síntesis de investigaciones sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1987), además de ejemplos de actividades para desarrollar la comprensión de cada nivel y la transición entre estos (Battista, 2012). La información sobre los primeros niveles de desarrollo del pensamiento geométrico caracteriza la transición entre una perspectiva perceptual de los estudiantes de los objetos geométricos hasta generar aproximaciones analíticas sobre las que se apoyan los procesos de clasificación.

La tarea se contextualiza a partir de una situación de aula (representación de la práctica) en la que una maestra de 2º de Educación Primaria, quiere saber cómo sus alumnos reconocen las figuras geométricas y sus atributos. Para ello, proporciona 12 cartas con diferentes figuras y solicita a sus estudiantes que clasifiquen las imágenes y justifiquen la clasificación realizada (Figura 1). Se aportan las respuestas de tres estudiantes en tres niveles diferentes de comprensión. El estudiante 1 es ejemplo de nivel 2 del desarrollo de la comprensión de Van Hiele, ya que es capaz de identificar los atributos de las figuras de manera individual, empieza a clasificar figuras según sus atributos y puede expresar verbalmente el criterio de clasificación empleado. Establece cuatro grupos independientes sin considerar cuando una figura es un ejemplo de un caso más general, (Figura 2). El estudiante 2, como ejemplo del nivel 1, agrupa las figuras en dos clases sin un criterio aparente. El estudiante 3 agrupa las figuras usando explícitamente la definición de polígono; hace dos grupos, el de los polígonos y el de las figuras que son no polígonos, sin usar atributos irrelevantes para la definición

Las preguntas guía tratan de que el estudiante para maestro identifique los elementos y procesos geométricos necesarios para resolver la actividad; interprete la respuesta de los estudiantes a partir de sus producciones y las dificultades manifestadas en la resolución, haciendo uso de los documentos teóricos proporcionados; y, finalmente, tome decisiones para favorecer el progreso de los estudiantes a partir de su comprensión.

En un contexto de reflexión y discusión entre iguales y con el formador, el estudiante para maestro tiene la oportunidad de analizar la tarea y valorar su exigencia cognitiva, identificando evidencias en las respuestas de los estudiantes e interpretarlas desde la perspectiva del conocimiento teórico sobre el desarrollo del pensamiento geométrico. La toma de decisiones exige al estudiante para maestro adaptarse a las necesidades específicas de los estudiantes para favorecer su progresión en el aprendizaje en función de la comprensión interpretada.

Tarea: Agrupar las siguientes figuras (los niños deben agruparlas proporcionando el criterio)
Material: 12 cartas con diferentes figuras



Maestra: En esta actividad tendrás que clasificar las figuras en grupos como tú quieras y explicar el por qué.

Figura 1. Actividad propuesta por la maestra (representación de la práctica)

Estudiante 1

DIÁLOGO ESTUDIANTE 1-ANA (MAESTRA)

Ana: Voy a darte estas fichas y me vas a agrupar las figuras como tú quieras.

Estudiante1: o sea como yo quiera, ¿no?

Ana: sí, como tú quieras

Estudiante1: pero, ¿cuántos grupos?

Ana: los que tú quieras.

[Tras agruparlos].

Ana: Vale, explícame, ¿cómo los has hecho?

Estudiante1: Pues estos porque tienen algún lado curvo (1), estos porque se cruzan (2), estos porque están abiertos (3) y todos estos porque sus lados son rectos está cerrada (4).

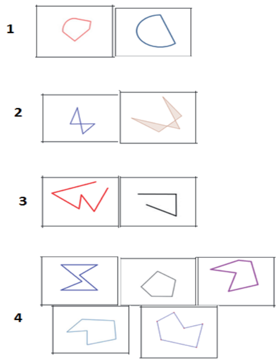


Figura 2. Diálogo entre la maestra y el estudiante 2 (representación de la práctica)

Un entorno de aprendizaje para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento funcional de los estudiantes (Formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria)

Este entorno de aprendizaje tiene como objetivo el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes sobre el límite de una función en un punto (Tabla 2).

Tabla 2. Estructura del entorno de aprendizaje para apoyar el desarrollo de competencias docentes vinculadas a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (sobre el concepto de límite de una función en un punto) (Adaptada de Llinares y Fernández, 2021).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
1	▪ Representación de la práctica: *Tres problemas de un libro de texto* sobre el concepto de límite de función en un punto. ▪ Preguntas guía: Centradas en la resolución de los problemas (Objetivo: Activar el conocimiento sobre los elementos matemáticos y modos de representación vinculados a la concepción dinámica de límite de una función en un punto).	▪ Sobre la concepción dinámica de límite (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996; Pons, 2014).
2	▪ Representación de la práctica: *Tres problemas de un libro de texto* sobre el concepto de límite de función en un punto. ▪ Preguntas guía: Anticipación de posibles respuestas de estudiantes de bachillerato para discutir posibles niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto.	▪ Sobre la concepción dinámica de límite (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996; Pons, 2014).
3	▪ Representación de la práctica: *Respuestas de cuatro estudiantes de bachillerato a tres problemas* sobre el concepto de límite de una función en un punto. ▪ Preguntas guía: Identificar e interpretar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar.	▪ Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
5	▪ Representación de la práctica: *Respuestas de tres estudiantes de bachillerato* a seis problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto. ▪ Preguntas guía: Identificar e interpretar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar.	▪ Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014).

Documentos de apoyo:

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219–236.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Colera, J., Olivera, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I. Bachillerato.* Anaya.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante. Alicante. España.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). SEIEM.

La tarea profesional 1 consta de tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto en diferentes modos de representación (algebraico, numérico y gráfico). Estos problemas proceden de un libro de texto de matemáticas de primer curso de bachillerato (Figura 3, Colera et al., 2008). Las preguntas guía están centradas en la resolución de los tres problemas indicando los elementos matemáticos y modos de representación que se usan en su resolución. Para ello, se proporciona a los estudiantes para profesor un documento con la definición de límite de una función en un punto basada en la concepción dinámica y los elementos matemáticos que la conforman (Pons et al., 2012): (i) función, (ii) aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico).

Se espera que el estudiante para profesor identifique en cada problema el modo de representación y los elementos matemáticos implicados como una manera de desarrollar un discurso profesional vinculado a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, el problema 1 (Figura 3) se presenta en modo algebraico con límites laterales no coincidentes en x=1 (apartado a) y coincidentes en x=2 (apartado b). Los elementos matemáticos implicados en la resolución son: (i) función definida a trozos; (ii) las aproximaciones en el dominio en x=1 y x=2, y aproximaciones en el rango para determinar el comportamiento de la *f*(x) alrededor de *f*(x)=3 y *f*(x)=4; (iii) la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango alrededor de los puntos x=1 y x=2.

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2
Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

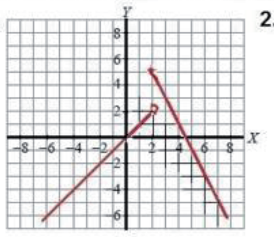
x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

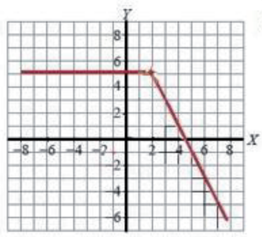
a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

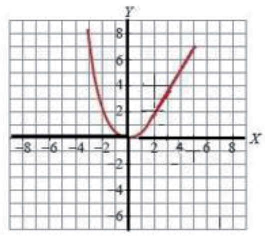
b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1.


2.


3.


a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

Figura 3. Problemas del libro de texto que forman parte de la tarea profesional 1

En la tarea profesional 2, los estudiantes para profesor tienen que anticipar respuestas hipotéticas de estudiantes de bachillerato a los problemas que habían resuelto en la tarea profesional 1 reflejando diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

En la tarea profesional 3, los estudiantes para profesor tiene que interpretar las respuestas dadas por cuatro estudiantes de Bachillerato (Pablo, Rebecca, Luiggi y Jorge) a los tres problemas (la Figura 4 muestra una de las respuestas) y proponer nuevas tareas para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión. Las respuestas de los cuatro estudiantes de Bachillerato evidencian diferentes niveles de comprensión del límite de una función en un punto (Pons, 2014; Tabla 3).

Tabla 3. Características de la comprensión del concepto de límite de cada estudiante de bachillerato

Estudiante	Características de su comprensión
Pablo	Coordina las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación (analítico, numérico y gráfico). No explicita la existencia de límite
Rebeca	Solo coordina las aproximaciones en el modo gráfico (y cuando los límites son coincidentes)
Luiggi	Coordina las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación. Explicita la existencia de límite
Jorge	Coordina en modo numérico y gráfico (este último sólo cuando los límites son coincidentes)

Las preguntas guía son las siguientes:

– *Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el "alumno X" para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué.*
– *A partir de las descripciones de cómo el alumno X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el alumno X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación.*
– *Considerando la comprensión de límite de una función de un punto del alumno X mostrada en la resolución de los problemas diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.*

Para interpretar las respuestas de los estudiantes de Bachillerato, los estudiantes para profesor disponen de un documento con información sobre características de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Figura 5, Pons, 2014). Se espera identifiquen que Jorge coordina los procesos de aproximación en el dominio y en el rango en modo numérico (cuando los límites son coincidentes y cuando no son coincidentes) pero en el modo gráfico únicamente cuando los límites son coincidentes. Considerando las características de la comprensión del concepto de limite, se podría decir que Jorge se sitúa en el nivel intermedio y que, por tanto, en las decisiones de acción se debería tener en cuenta la coordinación de aproximaciones cuando los límites son no coincidentes en modo gráfico y en modo algebraico.

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:

a) x tiende a 1. Justifica tu respuesta 3 ya que el 1 se sustituye en la f(x) 2x+1 porque x≤1 igual que 1

b) x tiende a 2. Justifica tu respuesta 4 ya que el 2 se sustituye en la f(x) 4 porque 1<x≤2 igual que 2

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan

1. **x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda** Tiende x_1 a 1 por la izquierda y la derecha. Tiende x_2 a 1 por la izquierda y por la derecha.
2. **las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda** Tienden a 2 por la izq y drcha
3. **las imágenes de g(..₂) por la derecha y por la izquierda?** Tiende a -1 por la izq y a 2 por la derecha

Justifica tus respuestas

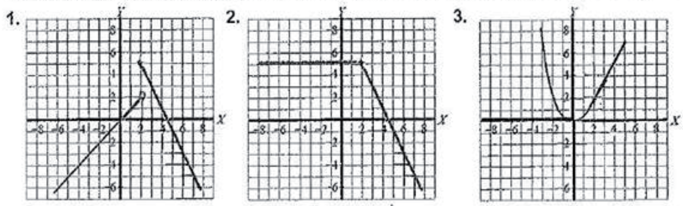
b) ¿a qué valor se acercan

1. **las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1** cuando f(x₁) se acerca a 2, x₁ se acerca a 1
2. **las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?** cuando g(x₂) se acerca -1, por la izq. y por la derecha a 2, x₂ se acerca a 1

Justifica tus respuestas

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas



a) El límite de la función es 2 en x = 2 3 cuando x se acerca a 2 y se acerca a 2 | coinciden por la izq y derecha

b) El límite de la función es 5 en x = 2 2 cuando x se acerca a 2 y se acerca a 5.

c) No existe el límite de la función en x = 2 1

Transcripción

PROBLEMA 1

a) 3 ya que el 1 se sustituye en la f(x) 2x+1, porque $x \leq 1$ *(igual que 19)*

b) 4 ya que el 2 se sustituye en la f(x) 4 , porque $1 < x \leq 2$ *(igual que 2)*

PROBLEMA 2.

a1) Tiende x_1 *a 1 por la izquierda y por la derecha*

Tiende x_2 *a 1 por la izquierda y por la derecha*

a2) Tiende a 2 por la izq y derecha

a3) Tiende a -1 por la izq y a 2 por la derecha

b1) cuando $f(x)_1$ *se acerca a 2 ,* x_1 *se acerca a 1*

b2) cuando a (x_2*) se acerca a -1, por la izq y por la derecha a 2,*

x_2 *se acerca a 1*

PROBLEMA 3

a) 3 cuando x se acerca a 2 f se acerca a 2

b) 2 cuando x se acerca a 2 f se acerca a 5

(coinciden por la izq y derecha)

c) 1

Figura 4. Respuesta de uno de los estudiantes de Bachillerato (Jorge).

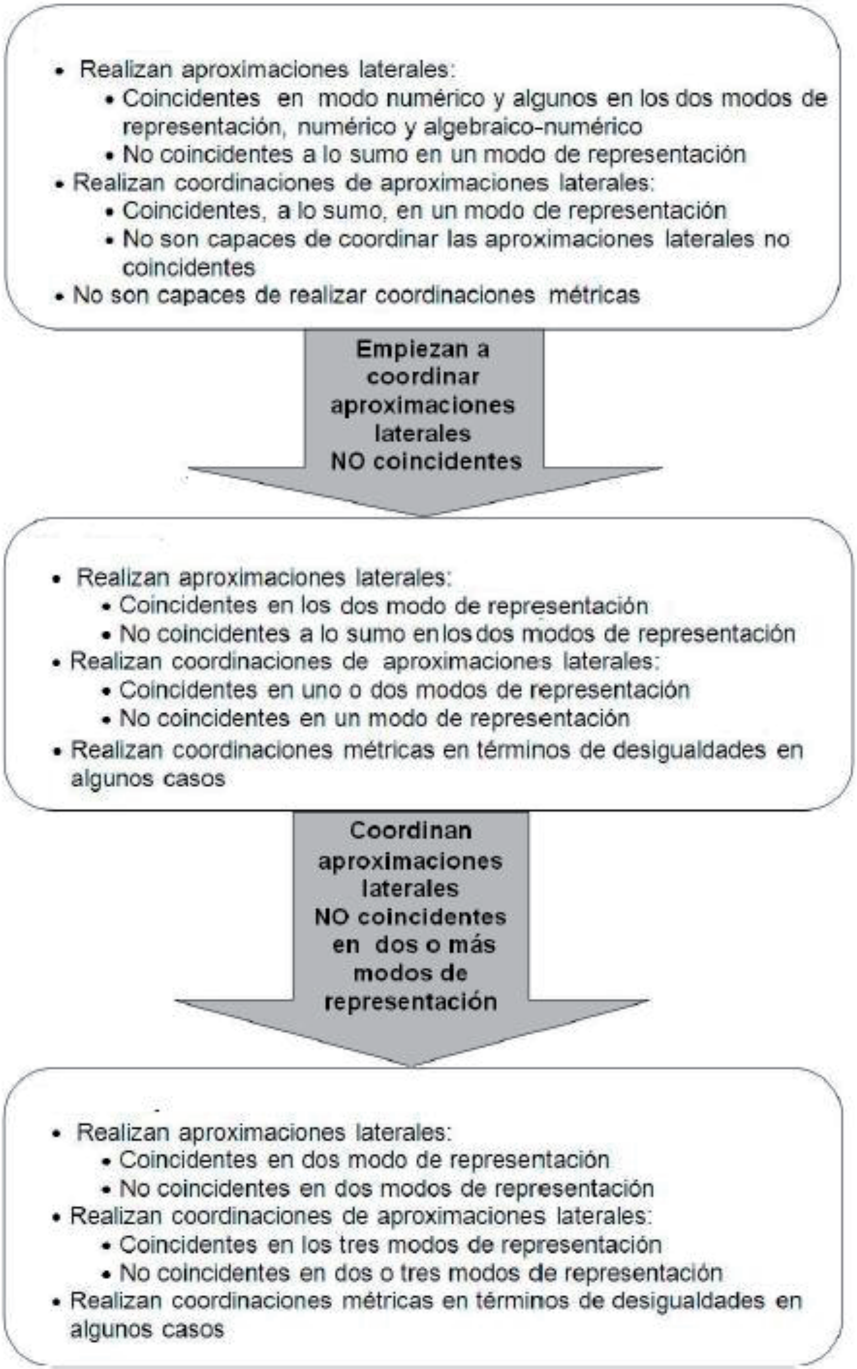


Figura 5. Documento teórico: Características de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

Estos dos ejemplos de entornos de aprendizaje (en la formación de maestros de Educación Primaria y la formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria) están insertos en ciclos formativos y muestran características de un modelo de formación docente basado en la sinergia entre la práctica y el conocimiento, permitiendo generar ambientes para el inicio del desarrollo de competencias docentes en la formación inicial. Esta sinergia entre la práctica específica (mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes) y el conocimiento sobre el que se apoya dicha práctica, permite vincular los procesos de describir e interpretar las situaciones de enseñanza y proponer criterios para orientar y decidir lo que hacer a continuación.

A.2. Oportunidades de aprendizaje y tareas matemáticas escolares

El término "oportunidades de aprendizaje" (OTL, Opportunities to Learn) se ha empleado en la investigación educativa con diferentes interpretaciones y énfasis. Como señala Floden (2002), durante más de treinta años de estudios comparativos internacionales, OTL ha sido una noción importante en la recogida, análisis y comunicación de datos, sobre todo en matemáticas y en el aprendizaje de las ciencias en general. Aunque las OTL fueron introducidas en la primera aplicación del proyecto FIMS (First International Survey) en los inicios de los años sesenta del siglo pasado, uno de los primeros significados concretos en educación de esta noción se atribuye a John Carroll (1963), quien la definió como el tiempo dedicado al aprendizaje. Algunos años después las OTL fueron más allá de la dimensión temporal, constituyendo un elemento central en el estudio comparativo que la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) realizó en Estados Unidos para valorar el logro en matemáticas de sus escolares (Törnroos, 2005). Las OTL se constituyeron en una medida de si los escolares habían tenido o no la oportunidad de estudiar un tema o de resolver un problema del tipo de los que aparecían en el cuestionario.

En el SIMS (Second International Mathematics Study; de 1976 a 1982), las OTL cumplieron ese mismo cometido, y se preguntó a los profesores si habían enseñado en sus clases los contenidos matemáticos tratados en los ítems usados (McDonnell, 1995). Otras cuestiones que se plantearon a los profesores permiten delimitar el significado que se atribuía a las OTL (metas instruccionales, actitudes y creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, estrategias docentes o su formación profesional. Durante muchos años posteriores fueron frecuentes los estudios centrados en la formación y actividad del profesor en comparación con los logros de sus escolares (Raizen y Jones, 1985). El uso de las OTL en este estudio sirvió para que esta noción se comenzara a usar a mediados de la década de los ochenta del siglo pasado para orientar tendencias educativas, y para realizar comparaciones curriculares según diferencias geográficas. Más allá del uso en el SIMS, centrado principalmente en los profesores y en el contenido matemático, en el estudio de las OTL comenzaron a incluirse estudios de escolares y responsables educativos y se abordaban aspectos tales como la organización y los recursos de los centros, el propio contenido en el currículo, la formación previa del profesor y sus estrategias instruccionales (McDonnell, 1995). De hecho, las OTL llegaron a constituirse como los vehículos más apropiados para reconducir los problemas de calidad y equidad de la educación (McLaughlin y Shepard, 1995).

En el proyecto TIMSS, las OTL se emplearon para recopilar datos, identificándose cuatro dimensiones relativas al currículum, al aula, a la escuela y a los escolares. Estas dimensiones delimitaban cuatro cuestiones: ¿Qué se espera que aprendan los escolares? ¿Quién administra la instrucción? ¿Cómo se organiza la instrucción? ¿Qué han aprendido los escolares? (Clarke y Gregory, 2003). A partir del estudio TIMSS, se profundiza en la cuestión relacionada con la organización de la instrucción y comienzan a definirse diferentes variables para caracterizar las OTL (Lupiáñez, 2009). Floden (2002) recoge un detallado análisis del papel de las OTL en diferentes estudios comparativos internacionales, reconociendo la amplitud de aspectos que abarcan las OTL como una característica común en todos ellos. En el marco de la formación de docentes también se han empleado las OTL como una noción central. Así, en el estudio TEDS-M se usa el concepto de OTL para "explicar el impacto de la preparación del profesor en su aprendizaje" (Tatto et al., 2008, p. 44).

Definiciones de OTL

La noción de OTL considera gran variedad de funciones y de propósitos y no existe una definición consensuada del término. Desde un punto de vista educativo se puede considerar la definición propuesta por Valverde et al., (2002) que la define como "la configuración de las condiciones sociales, políticas y pedagógicas que suministran a los escolares la posibilidad de adquirir conocimiento, desarrollar destrezas y formar actitudes relacionadas con las materias escolares" (p. 6). En esta definición se destaca, lo que el contexto social influye en la formación de la persona (el estudiante), que lo predispone y contribuye a su aprendizaje. Por otra parte, la definición destaca también las circunstancias educativas propuestas para incentivar ese aprendizaje (las políticas pedagógicas).

Una definición más centrada en la escuela es la que proponen Lo y Wheatly (1994), que definen las OTL como aquellas condiciones o circunstancias dentro de la escuela o el aula que promueven el aprendizaje de todos los escolares, y las caracterizan en función de varias componentes como currículos, profesores, materiales de aprendizaje o diferentes experiencias instruccionales. También señalan que las OTL se relacionan con la ausencia de barreras que dificulten el aprendizaje. Stevens y Grymes (1993) destacan además el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje "implementando modelos y programas instruccionales" (p. 3).

Esta noción se sigue considerando en la investigación en Didáctica de la Matemática, si bien su significado se ha asentado con ligeras reorientaciones o énfasis (Planas, 2014). Pero más allá de delimitar un significado para las OTL, también se han realizado diferentes aproximaciones para concretar qué aspectos o dimensiones del proceso educativo deben recoger.

Las variables que se tienen en cuenta cuando se estudian las OTL en los estudios internacionales tienen orígenes diferentes y su clasificación no es trivial. En un primer acercamiento, podríamos clasificar las variables de las OTL y, en consecuencia, las propias OTL en tres grupos (Williams et al., 2020):

– Variables que incluyen el currículum implementado, directamente generadas por los docentes, las tareas asignadas y el tipo de actividades relacionadas con el aprendizaje; pueden ser creadas e implementadas en el aula directamente por el profesorado (Cai et al., 2017).
– También se han incorporado como variables de OTL a algunas relacionadas con el currículo, que relacionan los contenidos presentados con la evaluación que se realiza, oportunidades educacionales de éstos, o implementación del plan de estudios (Schmidt et al., 2017);
– Finalmente, de manera general, indicadores amplios como el entorno, los recursos y las condiciones escolares, y la enseñanza que los estudiantes experimentan (Scherff y Piazza, 2008).

Oportunidades y tareas matemáticas escolares

Reconociendo y admitiendo la importancia de todas las dimensiones que abarcan las OTL, no cabe duda de que el diseño y la selección de tareas es una de las más relevantes desde el punto de vista de la actividad del docente. Cai et al. (2017) destacan cómo las tareas en las que se promueve el manejo de diferentes modos de representar las nociones involucradas, las que establecen diferentes demandas cognitivas, o aquellas que favorecen la aplicación de diferentes estrategias, suministran a los escolares la oportunidad de aprender matemáticas.

Las tareas constituyen el principal medio por el que un docente puede perseguir en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto estructurado de demanda de actuaciones a los escolares con sentido, mediante la práctica de una o varias herramientas matemáticas. Las tareas ejemplifican y, a la vez, muestran la diversidad de actividades que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo. Las tareas tienen demandas cognitivas que movilizan conocimientos para su empleo. Una tarea es un reto para el estudiante, y sirve para mostrar su aprendizaje sobre un foco de contenido movilizando conceptos y procedimientos y, asimismo, un indicador para que el profesor valore el grado de logro del aprendizaje expresado mediante uno o varios objetivos (Lupiáñez, 2009). La riqueza, variedad y complejidad de tareas tienen que ver con la calidad de la enseñanza que lleva a la práctica un docente y, por tanto, con las oportunidades de aprendizaje que suministra a su alumnado.

Cuando un docente se tiene que enfrentar a sus estudiantes olvida muchos de los condicionantes del aprendizaje externos al aula y se centra en alcanzar el máximo aprendizaje de su alumnado dentro de sus clases. Para ello, utiliza tareas escolares, más conocidas como ejercicios o actividades de matemáticas. Estas tareas requieren que los estudiantes movilicen sus conocimientos y ejerciten su competencia matemática. Por tanto, cada tarea atiende a una o varias expectativas: esto es, cada tarea tiene una meta, una finalidad, pretende que los estudiantes aprendan algo (de matemáticas). Así que podemos diferenciar unas tareas de otras por la intención de aprendizaje que tienen (Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016).

El sistema educativo actual se puede situar dentro un planteamiento funcional, donde las matemáticas que se enseñan deben tener una función, lo que condiciona cómo deben ser las tareas escolares. Estas recomendaciones curriculares indican que las tareas parten de conocimientos previos, están contextualizadas para ser significativas, progresan hacia niveles de abstracción, están secuenciadas, etc. Por tanto, la forma en la que un docente ofrece oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes es mediante las tareas matemáticas escolares. Las tareas cumplen así con una importante función: proporcionan un contexto convencional y estructurado que demanda actuaciones con sentido, mediante práctica de habilidades matemáticas. Esta función tiene dos características de componente cognitivo (Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016): por un lado, indica al docente si sus estudiantes cubren las expectativas. Por otro, sirve como herramienta de detección de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y para ayudar a la superación de estas dificultades.

Justificados por las características anteriores, el docente puede considerar dos puntos de partida para plantear oportunidades de aprendizaje:

- Las expectativas de aprendizaje
- Las dificultades y los errores que presentan los estudiantes

Oportunidades a partir de las expectativas de aprendizaje

Dentro de un marco curricular, las expectativas de aprendizaje consideran aspectos cognitivos, es decir, de aprendizaje de los contenidos matemáticos dentro del plan de formación. Concretamente, las expectativas agrupan las capacidades, las competencias, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los estudiantes aprendan o desarrollen como resultado de una propuesta de formación (Flores y Lupiáñez, 2016). Por ejemplo,

– En las leyes orgánicas de educación, donde se presentan los fines de la educación.
– Cuando se manifiesta el desarrollo de capacidades específicamente matemáticas. Es aquí donde toma importancia la noción de competencia matemática.
– En las indicaciones por ciclo y curso, donde se establecen criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Estas expectativas, en muchas ocasiones, se concretan en las programaciones de aula o de los departamentos didácticos de los centros en objetivos específicos.

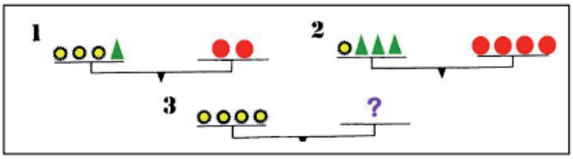
De todas estas expectativas, ¿cuáles son las que debe usar el docente? Aquellas que le aporten más información, puesto que está tratando de proponer oportunidades expresadas como tareas escolares, para que sus estudiantes aprendan. Por ejemplo, ante un posible objetivo para el bloque de medidas como *medir con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida* en primer ciclo de primaria, un docente puede sugerir que los escolares midan las dimensiones de su pupitre: primero sin instrumentos y luego que elijan el instrumento de medida que consideren más apropiado de varios a escoger. En esta tarea, además del desarrollo de la medida mediante procedimientos directos y el desarrollo de la habilidad de utilizar un instrumento, la posterior discusión y presentación de los resultados de ambas medidas permite al docente profundizar en las unidades convencionales y no convencionales y en qué se entiende por unidad adecuada.

La implementación de la primera parte de esta tarea permite desarrollar habilidades del sentido de la medida como el reconocimiento de atributos comparables, aunque las principales capacidades que se trabajan con esta tarea serían sobre la comprensión del proceso de medir: discusión sobre la elección de la unidad, antropométrica al principio, como el palmo y que profundiza en la idea de medida como repetición de la unidad y luego con instrumentos usuales, como la regla escolar o la cinta métrica. La discusión sobre las ventajas y los inconvenientes intenta orientar a los estudiantes hacia la apreciación de la utilidad del uso de las unidades estandarizadas para compartir la información.

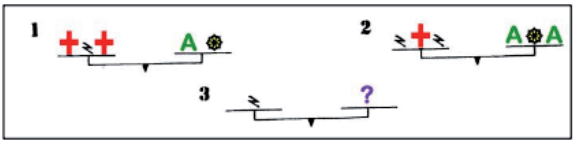
Un ejemplo para el tema de ecuaciones en 2º ESO, podría partir de un objetivo enunciado de la siguiente manera *Operar con las expresiones algebraicas para obtener ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) equivalentes a una dada y calcular algebraicamente las soluciones de un sistema*". El uso de balanzas de ecuaciones y tareas relacionando las representaciones algebraicas (Figura 6) permite consolidar las transformaciones que permiten obtener sistemas equivalentes sobre la base de un contexto, abordando la técnica de resolución de sistemas de ecuaciones y facilita empezar a trabajar los conceptos de sistemas determinados e indeterminados, comparando el número de objetos que aparecen y las condiciones (situaciones de equilibrio) que cumplen.

Tarea 9: ¿Qué hay que colocar en el platillo de la tercera balanza?

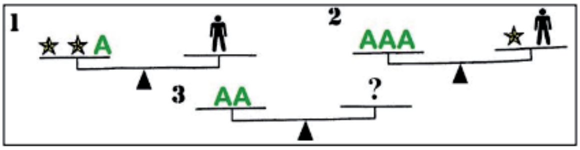
Balanza 1:



Balanza 2:



Balanza 3:



Dibuja y traduce al lenguaje algebraico, en cada caso, los pasos que has dado hasta llegar a la solución.

Figura 6. Tarea propuesta para 2º ESO como OTL a partir de un objetivo

El futuro docente debe saber situar este tipo de tareas en relación a los documentos curriculares, proponer tareas apropiadas para estas expectativas de manera que sean oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. La habilidad que se desea trabajar aquí con el futuro profesor es que sea capaz de proponer tareas apropiadas partiendo de una expectativa de aprendizaje. Para ello, se parte de una expectativa y se le anima a que:

- Identifique el nivel educativo en el que sería apropiada, para lo que puede usar los desarrollos curriculares vigentes
- Proponga una tarea escolar cuya meta sea esa expectativa

Oportunidades a partir de las dificultades y errores

La segunda fuente de organización de oportunidades son los errores y las dificultades. Aunque no sea familiar para los docentes, sobre el tema de los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se ha investigado mucho desde la Didáctica de la Matemática. Existen infinidad de artículos y libros al respecto (sobre qué papel tiene el error en el aprendizaje, cuáles son los errores más comunes que cometen los aprendices sobre casi todos los tópicos escolares, o cómo los docentes detectan y usan los errores que presentan sus estudiantes). En educación matemática se consideran dos enfoques respecto del uso de errores (Rico, 1998). En el primero de ellos, el error es considerado una oportunidad para promover el aprendizaje de los escolares. En el segundo, la meta es el análisis del error por parte del profesor. El error proporciona información sobre el estudiante que es útil para implementar un tratamiento orientado a cambiar las nociones erróneas (Fernández-Plaza et al., 2019).

Desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje, el docente debe conocer las dificultades propias de un tema de matemáticas y, o bien por su experiencia o bien por su formación, prever los errores que se pueden presentar en el aula y adelantarse a ellos incluyendo en la planificación tareas orientadas a su superación.

La búsqueda de errores es relativamente sencilla, ya que, en la actualidad, Internet y los motores de búsqueda son grandes aliados en la localización de dificultades de aprendizaje. En geometría en Educación Primaria son bien conocidos los errores y dificultades debidos a la tridimensionalidad de los objetos. Al introducir los poliedros, los escolares necesitan manipular representaciones físicas de estos objetos. Incluir tareas de representaciones posibilita la detección de relaciones y propiedades de los objetos que, en el futuro, puedan ser determinadas sin la necesidad de disponer de los modelos físicos. Así, para superar estas dificultades, conviene proponer tareas en las que se manipule y se discutan propiedades con modelos macizos hechos con plastilina, por ejemplo, o modelos huecos de palillos o cañas de refresco o desarrollos planos.

Como ejemplo para secundaria, al trabajar funciones en 4º ESO, una de las dificultades habituales es la de "no establecer conexión entre los distintos sistemas de representación" (Leinhart et al., 1990). Como idea de tarea relacionada, realizar tareas de repaso de conversiones, en las que las diferentes representaciones aparezcan juntas, puede ser una buena oportunidad de aprendizaje (Figura 7).

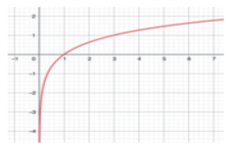
<table>
<tr><th colspan="4">TABLA DE CONVERSIONES</th></tr>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th><th>REPRESENTACIÓN NUMÉRICA</th><th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>Si compro 3 kgs de naranjas pago 4.5€ y si compro 7 kg nos cobrarán 10.5€ (Precio total en función de los kgs).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$y = 2^x$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 7. Tarea propuesta para 4º ESO como OTL a partir de una dificultad

Además, aprovechando el interés formativo que tiene la invención de problemas, se les podría proponer a los escolares que inventaran enunciados para cada una de las filas, procurando que se centren en contextos diferentes y que valoren la dificultad de cada uno de los problemas inventados. Esos enunciados se pueden intercambiar para ser resueltos. Ambas actuaciones, unido a la puesta en común posterior, también suministra oportunidades para aprender.

En definitiva, consideramos que el futuro docente debe saber encontrar, seleccionar y sintetizar documentos de investigación que identifiquen dificultades de aprendizaje en matemáticas y, posteriormente, proponer tareas apropiadas para la superación de dichos errores, de manera que estas tareas se conviertan en oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. Así, la propuesta que se le hace al futuro profesor es que, dado un error caracterizado en investigación, proponga una tarea escolar cuya meta sea la superación de dicho error.

En resumen, la noción de OTL tiene relevancia en la formación de profesores. Se debe introducir desde la formación inicial proponiendo tareas ricas y ejemplificando dinámicas y actuaciones de aula que favorezcan su creación. En el contexto curricular actual en España, en el que las competencias clave estructuran las expectativas formativas de los estudiantes a largo plazo, es necesaria una reflexión pausada del modo en el que les brindamos a los futuros profesores ejemplos de cómo pueden suministrarle a los estudiantes oportunidades para que lleguen a modelar su competencia matemática, y cómo, con esas dinámicas, estos futuros profesores disponen de oportunidades propias para desarrollar sus competencias profesionales.

A.3. Criterios de idoneidad didáctica para orientar el rediseño de la planificación e implementación de secuencias didácticas

En esta sección comentaremos brevemente el armazón de un ciclo formativo cuyo objetivo es realizar un rediseño de la práctica docente, orientado a su mejora, usando como referente teórico la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017; 2018).

Estructura de un ciclo formativo usando los Criterios de Idoneidad Didáctica como pauta para la reflexión sobre la propia práctica

Este ciclo se desarrolla de acuerdo con la siguiente secuencia:

a) Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los participantes la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis individual y grupal a partir de sus conocimientos previos y sin darles ninguna pauta. La puesta en común de los análisis realizados permite observar algunas regularidades, entre otras las siguientes:

- Los profesores o futuros profesores, cuando opinan (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.
- Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos (relacionados con las matemáticas, con aspectos cognitivos, con el entorno curricular, cultural y socio-laboral, con la gestión de la interacción, con aspectos emocionales y afectivos, con el uso de recursos, etc.).
- Cuando las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor. Por ejemplo, si han considerado que la gestión del episodio por parte del profesor no ha motivado a los alumnos, se infiere que ellos consideran importante realizar su práctica docente procurando motivar a sus alumnos y, además, que valoran positivamente conseguir la motivación de los alumnos.

b) El siguiente paso consiste en determinar si son valores individuales o más bien son morales, en el sentido de que son valores que la comunidad interesada en la Educación Matemática está trasmitiendo a sus miembros (por ejemplo, a los futuros profesores). A partir de esta pregunta se llega a la conclusión de que, sobre todo, son criterios que gozan de un cierto consenso en la comunidad y que ellos concuerdan con este consenso por su propia experiencia y formación o bien lo asumen sin casi discusión. También se concluye que lo que están concordando o asumiendo son aspectos relacionados con tendencias sobre cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas que se pueden encontrar en los congresos de Educación Matemática, en los currículos, en los cursos de formación de profesores inicial y permanente, etc. Dicho de otra manera, se hallan inmersos en un entorno que les envía el mensaje de que si quieren realizar una enseñanza de matemáticas de calidad tienen que seguir estas tendencias.

Todo lo anterior permite afirmar que en su caso se ha comprobado el siguiente *fenómeno*:

– El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*).
– Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educadores matemáticos*).
– Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto*, *tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Didáctica de las Matemáticas*).

Por último, se dedica tiempo a explicitar dichas tendencias. Entre otras, tendencia a incorporar nuevos tipos de contenidos matemáticos; tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas; tendencia de tipo metodológico hacia una enseñanza-aprendizaje activa (constructivista); tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs); tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; tendencia a considerar que saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos; tendencia a aceptar el principio de equidad en la Educación Matemática Obligatoria.

c) Una vez observado el fenómeno anterior en el cual se evidencia una relación entre los criterios que orientan la práctica del profesor (cuando ésta se orienta a la mejora) y los resultados y constructos teóricos de la Didáctica de la Matemática (DM), resulta pertinente preguntarse ¿cuál es (o debe ser) el papel de la DM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor?

Se explica que la respuesta a esta pregunta depende de cuáles consideremos que son las demandas a las que tiene que dar respuesta la DM. Dicho de otra manera, tenemos que posicionarnos sobre si la DM tiene que dar respuesta a las dos demandas siguientes y en cómo debe hacerlo:

> Demanda 1: Comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina ("¿qué ha ocurrido aquí?, ¿cómo?, ¿por qué?")
>
> Demanda 2: Orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina y, en particular, cómo mejorarlos ("¿qué se debe hacer?", "¿qué se podría mejorar?")

La primera lleva a describir, *interpretar y/o explicar* los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (ciencia básica / teoría). La segunda lleva a *generar criterios para orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza y aprendizaje* de las matemáticas y cómo orientar su mejora (ciencia aplicada).

Se trata de dos demandas muy diferentes pero muy relacionadas ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de una disciplina no es posible conseguir su mejora.

Hay diversos posicionamientos sobre estas dos demandas. Asumir solo la primera significa considerar que la DM no puede enseñar a nadie qué debe hacer sino, únicamente, qué puede hacer y cómo, por ejemplo, evidenciando que fijadas unas finalidades hay "prácticas que funcionan" para conseguirlas, aunque no corresponde a la DM fijar estas finalidades. Desde este punto de vista, la segunda demanda es una petición externa al área de la DM, que se justifica por la importancia social de la educación y porque la inversión que realiza la sociedad en educación, debe revertir en una mejora de la sociedad, etc. También hay planteamientos que no se oponen directamente a la segunda demanda, simplemente asumen la primera y posponen la segunda a un futuro indeterminado. Estos posicionamientos consideran que los enfoques teóricos en DM aún están poco desarrollados, sus resultados todavía son limitados incluso para responder a la primera demanda y, por tanto, no se está en condiciones de afrontar la segunda.

Ahora bien, hay programas de investigación que están cómodos con la segunda demanda ya que consideran que la razón de ser de la DM es poder orientar la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Por tanto, la primera demanda (describir/explicar) es simplemente un paso necesario para orientar la mejora. En cierta manera, este sería el caso de los enfoques que consideran a la DM como una ciencia orientada al diseño y evaluación de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (DBRC, 2003).

Por otra parte, hay enfoques teóricos en DM que asumen las dos demandas como es el caso del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). En este enfoque teórico se considera que el conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo y predictivo). Por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más *idóneos* posible (componente tecnológico

- prescriptivo). Se entiende que la *descripción, explicación y predicción*, son los fines de la actividad científica, mientras que la *prescripción y valoración*, son los principales objetivos de la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos.

d) A continuación, la problemática sobre cuál es (o debe ser) el papel de la DM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor se relaciona con lo que llamamos el problema del diseño instruccional y que formulamos de la siguiente manera: ¿Qué criterios usar para diseñar y rediseñar una unidad didáctica para que sea cada vez mejor? ¿Cómo debe ser una (buena) clase (secuencia de clases) de matemáticas? ¿Cuál es el papel de la DM en la generación de estos criterios? Se trata de preguntas relacionadas con cómo determinar la calidad de un proceso de instrucción

Con relación al problema del diseño instruccional se proponen dos soluciones extremas. La primera, que llamamos opción objetivista/positivista, considera que la investigación realizada en el área de la DM nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a conseguir en el proceso de instrucción, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguir el objetivo deseado. Dicho de otra manera, la investigación en DM ofrecerá a los profesores <<prácticas que funcionan>> ya que están avaladas por investigaciones realizadas con un grupo experimental y un grupo control, por meta-investigaciones sobre muchas de estas investigaciones y por meta investigaciones realizadas sobre éstas meta investigaciones. Se trata de prácticas que se puede asegurar que funcionan porque hay datos objetivos que las avalan (evidencias). Se trata de prácticas que, según los investigadores, están validadas empíricamente de manera objetiva, por métodos cuantitativos que garantizan el control y la verificación de resultados.

Desde este punto de vista, la estrategia para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben ser de tipo arriba/abajo, a partir de la producción de materiales curriculares realizados por expertos que aplican conocimiento científico y de prácticas que sabemos que funcionan porque están basadas en evidencias. Este punto de vista presenta algunos problemas. Por ejemplo, dada la complejidad de los procesos de instrucción no es seguro que manipular una determinada variable produzca los efectos esperados. La segunda solución, si bien considera importante tener en cuenta a la comunidad científica del área de la DM, no cree que sea la única a tener en cuenta, ya que considera que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa (comunidad científica, profesores, administración, padres de familia, etc.) cuando ésta busca conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor". Desde esta perspectiva hay que consensuar principios que pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

e) De acuerdo con la perspectiva consensual, se propone al grupo de profesores o futuros profesores establecer un consenso local (en el grupo) sobre los criterios a tener en cuenta para considerar un proceso de enseñanza y aprendizaje como bueno, de calidad, idóneo, mejor, etc. Por ejemplo, en un grupo se acordó que el profesor después de implementar la clase se debía hacer las siguientes preguntas: 1) ¿He enseñado unas matemáticas de calidad? 2) ¿Han aprendido los alumnos con las tareas propuestas? 3) ¿Los contenidos se corresponden con el currículo y son útiles para su inserción social y laboral? 4) ¿Las tareas y su gestión promueven la implicación de los alumnos? 5) ¿He utilizado los recursos temporales, materiales, TIC, etc. adecuados? 6) ¿He realizado una gestión adecuada de la interacción en la clase que ha permitido resolver las dificultades de los alumnos?

f) El siguiente paso es comentar que, desde la DM, diferentes autores han realizados intentos para recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Praetorius y Charalambous, 2018). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en la DM. Uno de los enfoques teóricos que ha trabajado en esta línea es el EOS, desarrollando la noción de idoneidad didáctica.

g) En el siguiente paso se explica la noción de idoneidad didáctica y los criterios de idoneidad didáctica.

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la *noción de idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales (Breda, 2020; Breda et al., 2017):

– criterio de idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas";
– criterio de idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar;

- criterio de idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos;
- criterio de idoneidad de medios, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción;
- criterio de idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y,
- criterio de idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros.

A continuación, se reflexiona sobre los criterios acordados por ellos y su relación con los CID. Por ejemplo, en el caso comentado en el apartado *e* anterior, se les hace observar que la primera pregunta tiene que ver con la disciplina, es decir con las matemáticas (idoneidad epistémica), la segunda con aspectos cognitivos (idoneidad cognitiva), la tercera tiene que ver con aspectos de utilidad y adaptación al entorno (idoneidad ecológica), la cuarta con aspectos afectivos (idoneidad afectiva), la quinta con el uso de recursos (idoneidad de medios) y la última con aspectos relacionados con la gestión de la interacción (idoneidad interaccional).

El hecho de que los profesores o futuros profesores hayan usado implícitamente los CID antes de conocerlos permite refinar el fenómeno observado en el apartado *b* anterior, de la siguiente manera:

- El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*).
- Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad matemática*).
- Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto*, *tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Educación Matemática*).
- Estos criterios se pueden reinterpretar en términos de los CID (criterios, componentes e indicadores).

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica se infieren en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representaban una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la DM, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores se puedan inferir en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

h) El siguiente paso es hacer operativos los CID mediante su desglose en componentes e indicadores.

La enseñanza y aprendizaje de los CID con sus componentes e indicadores es la parte central del ciclo formativo que estamos describiendo y es la que ocupa más tiempo. Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, los cuales encajan fácilmente con los propuestos en Breda et al. (2017). Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto. Por ejemplo, para la emergencia del componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", primero se remarca que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hace hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos. Por ejemplo, tomando problemas que se resuelven aplicando significados parciales diferentes del teorema de Thales (Font et al., 2017). Después se reflexiona sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de función (Font et al., 2012), inecuación, derivada, mediatriz y pendiente. Para el caso de la pendiente, por ejemplo, lo primero que se hace es preguntar a los participantes qué entienden ellos por pendiente de una recta; como resultado de sus respuestas suelen aparecer para la educación básica, como mínimo, los cuatro significados de la siguiente tarea que se les propone a continuación:

Tarea: A continuación, tienes diferentes significados de la pendiente de una recta y diferentes actividades. Asocia cada significado con la actividad que pone en juego este significado para su resolución (justifica la asociación).

Significados:

a) Significado geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta

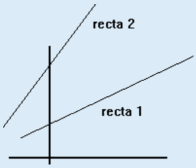
b) Significado trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.

c) Significado algébrico: el número que multiplica a la x en la fórmula $y = mx + n$

d) Significado funcional: el aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Actividades:

Actividad 1. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene más pendiente?



Actividad 2. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 4x + 5?

Actividad 3. Dibuja el gráfico de la función y = 5x + 1 y di si son correctos o no los comentarios de los siguientes estudiantes:

Juan: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba en vertical hasta volver a tocar la recta.

Alba: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia abajo en vertical hasta tocar la recta.

José: Si nos situamos en el origen de coordenadas y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 1 unidad hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Ana: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 10 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Alberto: Si nos situamos en el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas y nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 15 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Laura: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos un número de unidades en horizontal, para volver a tocar la recta nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba por cada unidad de desplazamiento horizontal.

Actividad 4. Halla la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje abscisas.

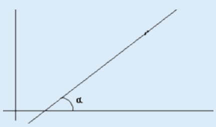


Figura 8. Tarea sobre los diferentes significados del objeto matemático pendiente. Nota: Calle, Breda y Font, en prensa.

En la puesta en común sobre la resolución de esta tarea se hace hincapié en que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial de la pendiente diferente. Además, la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción de pendiente en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados (Leinhardt et al, 1990). Se trata de que los participantes pasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente. En este último punto de vista, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos.

De esta manera, cada CID se va desglosando en componentes (Tabla 4) e indicadores, (Sánchez et al., 2021; Godino, 2013). En Breda et al. (2017) se presenta una rúbrica con indicadores para cada componente.

Criterio de Idoneidad	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Tabla 4. Criterios y componentes de idoneidad.
Nota: Basado en Breda et al., 2017.

Se termina este paso resaltando que:

– el constructo CID pretende ofrecer al profesor una pauta para orientar el diseño y rediseño de su práctica docente,
– los profesores los pueden usar como pauta para organizar su práctica,

– los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas.

Se pone el énfasis en este tercer aspecto, es decir, los criterios de idoneidad si bien son normas, no son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

i) El siguiente paso es que los participantes usen los CID como pauta para reflexionar sobre la implementación de una secuencia didáctica y hagan propuestas de mejora en su rediseño. Por ejemplo, en un Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de España, los futuros profesores utilizan los CID para valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado. En su TFM, los futuros profesores escriben comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. Se trata de una valoración que ha hecho el futuro profesor y que ha sido triangulada con su tutor. Por otra parte, posteriormente en la presentación oral de su valoración ante el tribunal del TFM hay una segunda triangulación. Tres ejemplos dónde se puede ver el tipo de reflexiones que hacen los participantes en este máster se pueden consultar en Font, Breda y Pino-Fan (2017), Ledezma et al. (2021) y Sánchez et al. (2021).

Parte B- acceso a la formación docente: El proceso de iniciación a la docencia

El modelo vinculado al desarrollo del conjunto de prácticas que configuran la práctica de enseñar matemáticas sobre el que es posible articular la formación inicial aporta elementos para proporcionar al profesor/a principiante orientación y tutorización adicionales. En particular, define la necesidad de articular espacios institucionales para apoyar el acceso a la profesión en el que generar *procesos de reflexión en la práctica* a partir de la problematización de aspectos particulares de la enseñanza de las matemáticas (potenciando la reflexión sobre la tarea de enseñar matemáticas y poder mejorarla). Estos espacios institucionales deberían permitir hacer visibles los razonamientos vinculados a la realización de las prácticas profesionales específicas usando conocimiento de Didáctica de la Matemática. De esta manera, la sinergia entre conocer y hacer en contextos de la práctica adquiere todo su sentido. El acceso a la profesión docente a través de la adaptación de modelos usados en otras profesiones puede caracterizar la transición desde la formación inicial al desempeño pleno de la formación. Este modelo implica la necesidad de identificar centros escolares e institutos de referencia y tutores de apoyo, que puedan constituir *unidades docentes* para los profesores principiantes. Los programas de inducción a la docencia deberían articularse estableciéndose contextos colaborativos entre docentes en ejercicio y formadores de profesores. Este modelo permitiría establecer la comunicación directa entre investigación y práctica favoreciendo los contextos de innovación educativa al apoyarse en la visibilidad de los procesos de razonamiento vinculados al desarrollo de las prácticas profesionales específicas de enseñar matemáticas. Ejemplos de estas iniciativas son propuestas de desarrollo profesional en el contexto de investigaciones colaborativas y aproximación al uso de "Lesson Study" que ya han empezado a articularse desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática (ejemplos de estas iniciativas son descritos en la siguiente sección). De esta manera, se establece el continuo entre la formación inicial, articulada a través del aprendizaje de prácticas profesionales específicas y procesos de razonamiento vinculados a dichas prácticas, y el establecimiento de contextos de apoyo para los maestros y profesores principiantes construidos desde las mismas referencias que la formación inicial. Los procesos de selección deben por tanto asegurar que la sinergia entre conocer y hacer (el logo y la praxis) sea concebido de manera integral y no como partes aisladas para favorecer el proceso de introducción a la docencia de manera gradual.

Parte C- desarrollo profesional

La formación permanente debe concebirse desde las referencias de las competencias docentes específicas y por tanto como una manera de potenciar los procesos de mejora de la práctica de enseñar matemáticas. En esta sección se describen dos ejemplos, uno basado en la creación de contextos colaborativos entre profesores de diferentes niveles educativos y otro considerando la posible adaptación de iniciativas desarrolladas en otros contextos como *Lesson Study*. Estas ejemplificaciones de formas de desarrollo profesional permiten generar procesos vinculados a la práctica real de la enseñanza de las matemáticas desarrollada en el aula como una manera de aprender a problematizar la propia práctica como una manera de mejorarla. Los ejemplos de desarrollo profesional descritos a continuación, como dos modalidades diferentes de formación de profesorado, son los espacios en los que los profesores pueden empezar a dotar de significado al carácter competencial de los nuevos currículos y son ejemplos que permiten particularizar propuestas de formación dual (mediante la colaboración entre las Facultades de Educación y los centros educativos). Estas aproximaciones al desarrollo profesional subrayan la relevancia de la especificidad de la enseñanza de las matemáticas en la implementación de formación dual (universidad-centro educativo) y como una forma de dar respuestas a las necesidades reales de los profesores y de los Centros educativos. Esta situación implica la necesaria articulación de comunidades de práctica (grupos de docentes de diferentes niveles compartiendo objetivos de mejora y recursos) como contexto de desarrollo profesional.

C.1. Desarrollo profesional en el contexto de investigaciones colaborativas

La necesidad de que haya una formación inicial para que los aspirantes a docentes puedan desarrollar conocimientos y competencias para la profesión es incuestionable. ¿Qué ocurre, sin embargo, con el profesorado en ejercicio? ¿Ha completado con su formación inicial el desarrollo de las competencias necesarias? ¿Éstas mejoran con la propia práctica? ¿O hace falta un enfoque formativo explícito para mejorar su formación?

Parece obvio que la formación inicial es insuficiente para construir las habilidades necesarias para enseñar. La complejidad de la tarea de enseñar matemáticas, requiere de un bagaje de conocimientos amplio y sólido, así como de diferentes competencias. Si bien la propia práctica de enseñar es un terreno de aprendizaje potencial de estas necesidades, la experiencia en sí misma no asegura un buen profesor o un profesor experto (Rojas et al., 2012). Se requiere reflexionar sobre la práctica y actualización, lo que conlleva la necesidad de una formación continua. Cuando nos referimos a la mejora en la competencia profesional del profesor en ejercicio, en nuestro caso que enseña matemáticas, hablamos de desarrollo profesional del profesor.

La investigación colaborativa en la formación del profesorado en ejercicio consiste en un grupo de profesores investigando conjuntamente sobre la práctica. Esto supone embarcarse en un proceso cíclico de formulación de cuestiones, diseño, experimentación y análisis. El grupo consensua los objetivos y une sus esfuerzos para alcanzarlos. Un grupo colaborativo de estas características puede ser entendido como una "comunidad de indagación" (Jaworski, 2003), donde sus miembros aprenden sobre la enseñanza a través de la indagación sobre la misma.

En los grupos de investigación colaborativa de profesores en ocasiones se integran otros profesionales relacionados con la enseñanza, como formadores de profesores e investigadores. Esto permite relacionar la teoría con la práctica, de modo que las reflexiones del grupo se pueden nutrir de forma más natural de resultados teóricos de la investigación, pudiendo ganar en profundidad, y, por otro lado, los formadores e investigadores se acercan a situaciones reales de aula. A continuación, vamos a mostrar un ejemplo de un grupo de investigación colaborativa constituido por profesores e investigadores, para reflexionar después sobre las posibilidades de la investigación colaborativa para el desarrollo profesional del profesor en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Un grupo de investigación colaborativa para aprender sobre la gestión de las tareas matemáticas

En este apartado vamos a mostrar la actividad de un grupo de profesores y formadores de profesores que venimos desarrollando investigación colaborativa desde hace algo más de dos décadas, compuesto por maestras de Educación Infantil y Educación Primaria, profesores de Secundaria, estudiantes para maestro y formadores de profesores que son a su vez investigadores en Educación Matemática. Este trabajo muestra resultados del Proyecto *Resolución de problemas de matemáticas a partir de la formulación de problemas y el planteamiento de cuestiones* (PIV 037-19), financiado por la Junta de Andalucía en su convocatoria de Proyectos Educativos.

La finalidad compartida del grupo es promover el desarrollo profesional de todos sus miembros a través de la reflexión sobre la resolución de problemas en el aula de matemáticas. Además, nos interesa relacionar la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos, de modo que nuestra mirada, tanto como profesores como formadores, pueda tener una cierta panorámica. Por eso, para hacer operativa la finalidad del grupo, en cada proyecto, de dos años de duración, nos centramos en un contenido matemático y nos valemos de herramientas teóricas que apoyen nuestra reflexión.

Por ejemplo, nos planteamos seguir indagando sobre la gestión por parte del profesor de la resolución de problemas en el aula. Para concretar el análisis de dicha gestión, nos valimos de la idea de "demanda cognitiva" de una tarea. Atendiendo a dicha demanda se pueden diferenciar tareas de distintos niveles (Smith y Stein, 1998; Arce et al., 2019) (Tabla 5).

Tabla 5. Tareas de diferente nivel de demanda cognitiva

Memorización	• Reproducción de definiciones, hechos o fórmulas aprendidas • Con propósito claro, sin ambigüedades • No existe conexión con los conceptos o significados subyacentes
Procedimientos sin conexión	• Algorítmicas, reclaman claramente la utilización de un procedimiento • Énfasis en la respuesta correcta, más que en la comprensión • No solicitan explicaciones, si acaso la descripción del procedimiento
Procedimientos con conexión	• Centradas en la comprensión de conceptos e ideas matemáticas • Sugieren pautas explícita o implícitamente, procedimientos generales conectados con el significado de un concepto o sus representaciones • Requieren establecer relaciones con ideas conceptuales subyacentes
Producir matemáticas	• Requieren de un pensamiento complejo y de autorregulación • No sugieren camino a seguir • Comprensión y exploración de conceptos, procesos y relaciones matemáticas

En el contexto de investigación colaborativa para apoyar el desarrollo profesional que describimos estamos interesados en el diseño, implementación y gestión de tareas de alta demanda cognitiva, que permiten *producir matemáticas* (último nivel de la Tabla 1) y que identificamos con la resolución de problemas, al enfrentarse el alumno a una situación no familiar que requiere la aplicación significativa (no mecánica) de conocimiento matemático. Además, basándonos en lecturas sobre la gestión de tareas de alta demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), diseñamos en el grupo una guía que nos permitiera orientar y analizar dicha gestión. En esta se diferencian dos momentos de reflexión:

- En la fase de planificación de la tarea, identificamos su finalidad y conocimientos previos requeridos, su demanda cognitiva, así como las dificultades que prevemos y ayudas que mantengan la alta demanda cognitiva.
- Tras la implementación de la tarea, reflexionamos sobre la gestión del profesor, la tarea y sus resultados. En relación con la implementación nos preguntamos, entre otras cuestiones:
  ¿Se han proporcionado ayudas que mantengan la demanda cognitiva de la tarea?
  ¿Se presentan resoluciones de distinto nivel?
  ¿Se pone el énfasis en las resoluciones y no sólo en los resultados?
  ¿Se pide a los alumnos que expliquen y justifiquen sus ideas?
  ¿Se establecen conexiones entre los contenidos que surgen y previos?
- Finalmente, estudiamos si los estudiantes han hecho matemáticas y si se ha mantenido o no la demanda cognitiva de la tarea y por qué.

Con el objetivo de seguir profundizando en nuestra comprensión del uso de tareas de alta demanda cognitiva y su gestión, en el proyecto PIV 037-19 diseñamos conjuntamente una sesión para introducir la idea de par e impar como una propiedad numérica, a través de la observación de regularidades, en primero de Educación Primaria (la mostramos parcialmente en la Figura 9), que fue implementada durante el primer trimestre.

En el análisis previo de la tarea, esperábamos que los alumnos establecieran conjeturas, argumentaran si eran ciertas o no, o las refutaran. En ese sentido, discutimos la demanda cognitiva de la tarea, concluyendo que se situaba entre los dos niveles de mayor demanda cognitiva. Por un lado, propicia la comprensión y exploración de conceptos, procesos y relaciones matemáticas, y que los estudiantes conjeturen y argumenten (propio de "producir matemáticas"). Por otro lado, en algunas partes (sobre todo las dos primeras) sugiere procedimientos generales conectados con el significado de la idea de paridad y sus representaciones. La discusión en el grupo de la demanda cognitiva de la tarea puso en juego las concepciones e imágenes de la enseñanza de la matemática de sus miembros. Así, hay diferencias iniciales entre situarla claramente en el último nivel o ver elementos del penúltimo. Esta diversidad permite la reconsideración de las concepciones y un posible avance de las mismas.

NUMEROS PARES E IMPARES "Recoger, guardar y ordenar"

Primera parte (por parejas)
Cada pareja tendrá que guardar en dos cajas primero 10 objetos, luego, 9; 8; 7; 6; 5, 4; 3; 2 y 1. Dispondrán de una plantilla para registrar el resultado de cada reparto.
Puesta en común y registro en un mural (dos columnas: Números/Sí-No). A continuación, la maestra preguntará a los niños ¿qué pasa con el 11?, ¿y con el 12?

Segunda parte: ¿qué ocurre con otros números?
A cada niño se le da una tarjeta con un número (del 1 al 24) que debe decidir si se puede repartir en dos grupos iguales poniendo una etiqueta de SÍ (en rojo) o de No (en azul). Una vez colocadas las etiquetas se dispondrán ordenados del 1 al 24 en círculo y se les pedirá qué observan.
La maestra colocará en el centro del círculo la tabla del 0 al 99 y rodeará los pares hasta el 24. Preguntará si hay que rodear o no otros números: ¿y el 35, y el 64? Pedirá números que se puedan repartir en dos partes iguales y que no.

Figura 9. Tarea para 1º de Educación Primaria

Tras observar la implementación, discutimos sobre la gestión por parte de la maestra, observando el vídeo de la implementación y seleccionando fragmentos que ilustren nuestras reflexiones. Así, en la implementación de la primera parte de la tarea, observamos que desde la primera actividad algunos niños establecían conjeturas. Es el caso del final de la puesta en común de la primera parte de la tarea, cuando la maestra cuestionaba sobre el 11 y el 12.

> E1: En el 10 le ponemos 1 y nos da 6 para él y 5 para mí. Y cuando pone dos más (o sea, 1 más) sería... 1 para él y otro para mí.
> M: Voy a intentar escribir lo que dice para aclararme. ¿En el diez qué pasaría?
> E1: Si al diez le sumamos uno da (10+1) da once (10+1=11). Y así no podría ser, porque quedan 6 para él y 5 para mí.
> M: ¿Ahora qué?
> E1: Si al once le ponemos uno (11+1=12), entonces sería uno para él y otro para mí.
> M: ¿Entonces sería qué?
> E1: Sería 6 para cada uno.
> M: Pues si es verdad...Muy bien. ¿Os parece? (pregunta al resto).

En la segunda parte de la tarea, cuando la maestra iba rodeando sobre la tabla del 0 al 9 (con 0 a 9 en la primera fila, 10 a 19 en la segunda…) los números pares del 1 al 24, un alumno observaba:

> E2: Ahí pasa como allí, debajo del 2, 12, toda la fila del 2 es Sí.
> M: ¿Y por qué crees tú eso?
> E2: Porque si pone debajo del 2 un 12 y es Sí, entonces tiene que ser
> M: ¿Alguien está de acuerdo?

El análisis conjunto de la sesión nos permitió identificar preguntas que suponen ayudas heurísticas (“y entonces qué” y “por qué”), que cuestionan sin aportar respuestas y ponen el énfasis en los procesos y argumentaciones, más que en los resultados. La maestra (a raíz del último diálogo reproducido) propicia que se relacione la situación actual (de pares e impares) con los números amigos (misma unidad) y familiares (misma decena), contenido que se ha trabajado previamente. La sesión observada nos permitió cuestionarnos si se presentaban resoluciones de diferentes niveles y cómo lo potenciaba la maestra, concluyendo que se presentaban sobre todo gracias al clima de participación que se propiciaba. En general, se mantiene la demanda cognitiva de la tarea cuando los alumnos en su mayor parte argumentan por qué un número es par o impar y, algunos generan conjeturas sobre regularidades. Identificamos como cuestiones de indagación futuras: cómo favorecer la presentación de resoluciones de alto nivel y el progreso hacia estas.

La investigación colaborativa como instrumento para desarrollo profesional

La formulación de cuestiones sobre la práctica, el diseño, la implementación y el análisis se nutren de las diferencias formativas y personales. En el diseño, la experiencia de los profesores y en particular del que implementará la actividad es primordial. En la implementación, las características de la práctica de cada profesor, que personaliza el diseño compartido, nos permiten reflexiones diferentes y crearnos distintas imágenes de la práctica. En el diseño de instrumentos de análisis de la práctica, los investigadores aportan elementos teóricos. Además, es fundamental el trabajo colaborativo. Así, por ejemplo, para la implementación, la maestra observada contaba con sugerencias de preguntas concretas (e.g. ¿qué pasa con el 11?), de recursos (la tabla del 0 al 99), de dificultades previstas que son fruto de la interacción entre los miembros.

El ejemplo anterior muestra una vía de formación continua del profesorado en relación con la enseñanza de las matemáticas. Apreciamos que se está produciendo desarrollo profesional porque comprendemos mejor en qué consiste una tarea matemática demandante y cómo podemos gestionarla, porque somos más conscientes de cuál es para nosotros la finalidad de la enseñanza de la matemática y de nuestra propia práctica y su mejora.

La formulación de cuestiones problemáticas relacionadas con la práctica de la enseñanza de la matemática, la inclusión de la planificación de tareas, la anticipación de sus resultados, su gestión y la reflexión sobre su implementación nos parecen elementos privilegiados en cualquier proceso de formación continua para la enseñanza de las matemáticas. Además, permite profundizar en el conocimiento matemático y sobre su enseñanza y aprendizaje.

La propuesta anterior podría trasladarse a entornos colaborativos de desarrollo profesional a mayor escala; por ejemplo, a un centro escolar. Estos grupos colaborativos podrían estar constituidos solo por profesores o por profesores con el asesoramiento de especialistas. La clave en este sentido puede estar en que el grupo colaborativo busque y construya (o adapte) herramientas para la reflexión. Si estas herramientas se fundamentan en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pueden posibilitar reflexiones más precisas y profundas. Es el caso de las caracterizaciones de tareas de diferentes niveles de demanda cognitiva y de las cuestiones para el análisis de la gestión de las tareas ejemplificados en el apartado anterior.

Es posible, además, que la investigación colaborativa aúne el desarrollo profesional de profesores en ejercicio con el de profesores en formación inicial. Es el caso del grupo colaborativo con el que hemos ejemplificado, en el que se integran estudiantes para maestro. Esto permite que los futuros profesores aprendan a problematizar la práctica, se establezcan puentes entre la formación académica y la práctica de aula, y tomen conciencia de la necesidad de formarse durante toda su trayectoria profesional.

C.2. Uso combinado de Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica

El diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) se basa en la suposición, observada en diversas investigaciones (Breda, 2020), de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que diseñar y/o valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos ciclos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CID. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas para enseñar los CID, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de los Lesson Study (LS), que es una aproximación al desarrollo profesional del profesor en el que un grupo de profesores colaboran para estudiar el contenido, la enseñanza y cómo los estudiantes piensan durante la clase, en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión aunque poco pautada y muy amplia orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por tanto, es de esperar que, en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CID para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de LS van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CID (Hummes et al., 2019; Hummes et al., 2020). Dicho de otra manera, la metodología LS se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores, lo cual da pie a la ampliación del LS con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y Criterios de Idoneidad Didáctica (de la misma manera en la que se ha descrito en el apartado anterior A.3)

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CID también parten de la suposición de que éstos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en los LS no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología LS puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de enseñanza de los CID, esta última puede ser una ampliación de la metodología LS para generar una pauta para organizar la reflexión del profesor.

En Hummes et al. (2019) se analiza en qué medida un ciclo formativo basado en el LS y los CID promueve la reflexión de profesores brasileños de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas. En particular, se buscaba desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica. Para ello, se diseñó e implementó un ciclo formativo que combinaba ambas metodologías. La estructura del ciclo formativo que permite combinar el LS con los CID es la siguiente: 1) Primera etapa: Lesson Study (LS); 2) Segunda etapa: Hacer observar a los participantes que en la fase del LS han usado de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID; 3) Tercera etapa: Enseñanza de los CID y 4) Cuarta etapa: Uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase del LS, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en el LS.

Parte D- cuestiones transversales: dominio afectivo

Un aspecto que condiciona tanto la formación inicial como la calidad de la práctica de los docentes de matemáticas es el relacionado con los afectos que éstos experimentan hacia la materia. Desde hace varias décadas se viene investigando el alcance e impacto de los afectos negativos que algunos estudiantes para maestro experimentan al estudiar matemáticas. Cuando los niños empiezan su escolarización en los centros de Educación Infantil, su actitud hacia la matemática es positiva (Hidalgo et al., 2005), sin embargo, a lo largo de su trayectoria en Educación Primaria y Secundaria muchos de ellos desarrollan una actitud negativa hacia la materia (Mato, 2010). Esta actitud negativa condiciona en gran manera su desempeño y le lleva, incluso, a evitar su estudio (Ashcraft, 2002), llegando a condicionar sus oportunidades de futuro (Pérez-Tyteca, 2012). Una de las causas que se han reportado como principales en el desarrollo de este tipo de respuestas afectivas negativas es el modo en el que sus docentes les han enseñado matemáticas (Uusimaki y Nason, 2004). Peker (2016) concluye que una actitud negativa por parte de los maestros hacia las matemáticas interfiere en el desarrollo de competencias docentes fundamentales y puede transmitirse a sus alumnos, dificultando su aprendizaje y provocando en ellos apatía, desasosiego, miedo o angustia. Por este motivo es fundamental que los docentes de matemáticas posean una actitud positiva tanto hacia las matemáticas como hacia su enseñanza.

Son numerosos los trabajos que han analizado las actitudes hacia las matemáticas de los maestros en formación. A nivel nacional, algunos de ellos han comprobado que estos estudiantes conforman uno de los colectivos con mayor ansiedad hacia las matemáticas (Pérez-Tyteca, 2012). Por ello resulta fundamental incluir los aspectos afectivos en los planes de formación inicial. En este sentido, se han llevado a cabo algunas experiencias concretas con futuros maestros que se han mostrado efectivas para mejorar las actitudes hacia las matemáticas cuando los sujetos actúan como aprendices (Caballero et. al., 2016).

Respecto de las investigaciones sobre la actitud de los docentes cuando enseñan matemáticas, no existen tantos trabajos. Algunos de ellos han comprobado que, ante una situación improvisada de enseñanza en primaria, los futuros maestros se sienten inseguros, nerviosos, incómodos e incapaces de darle solución, pero pese a ello, consideran que serán buenos docentes de matemáticas (Pérez-Tyteca et al., 2012). Otras investigaciones indican que muchos futuros maestros dudan de su capacidad de enseñar y afirman que se sentirán inseguros cuando den clase de matemáticas, lo que refuerza la idea de que es primordial detectar e intervenir este tipo de ansiedad (Caballero et al., 2016; Peker, 2016). En esta línea, algunas investigaciones están proponiendo escalas para identificar fuentes de estrés y emociones en el profesorado de matemáticas de secundaria como una manera de proporcionar conocimiento de la dimensión afectiva y actitudinal (Gómez del Amo, 2017).

Una consecuencia de la información que aporta las investigaciones en este ámbito es la necesidad de abordar los aspectos afectivos en los planes de formación inicial de los docentes de matemáticas, así como acompañar sus emociones y actitudes cuando pasan a la práctica real. Esta labor es fundamental para mejorar la calidad de la enseñanza y conseguir formar maestros y profesores de Educación Secundaria seguros, capaces y que disfruten enseñando matemáticas.

Algunas ideas finales

La investigación en Didáctica de la Matemática proporciona evidencias basadas en la investigación y desarrollo que permiten materializar propuestas de formación docente basadas en un marco de competencias profesionales docentes. Dos ideas son claves en este proceso. Por una parte, la identificación de diferentes prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemáticas (como ejemplos de competencias profesionales docentes específicas): interpretar respuestas de estudiantes para tomar decisiones de acción, analizar tareas como favorecedoras de oportunidades de aprendizaje, planificar la enseñanza, reflexionar para rediseñar las propuestas didácticas, etc. Por otra, la identificación del conocimiento que se activa en la realización de estas prácticas profesionales específicas que se considera conocimiento profesional que debe poseer un docente de matemáticas y que procede de las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Este conocimiento es el que puede orientar la práctica profesional del profesor: conocimiento sobre trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, conocimiento sobre las oportunidades de aprendizaje que proporcionan las tareas matemáticas, y el papel de las oportunidades que se pueden generar a partir de la identificación de los errores y dificultades y considerando las expectativas de aprendizaje; y conocimiento sobre criterios de idoneidad para analizar la enseñanza de las matemáticas para proponer rediseños. La sinergia entre la noción de prácticas profesionales específicas y conocimiento que las articula es el núcleo sobre el que se apoya la noción de competencia profesional docente sobre el que se puede articular la formación inicial y la iniciación a la docencia basada en el aprendizaje en la práctica.

De esta manera se da respuesta a dos demandas en las propuestas realizadas para la formación docente articulada a través de un modelo de competencias profesionales docentes. Por una parte, centradas en describir, interpretar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (procesos orientados por la teoría), y en segundo lugar, en proporcionar criterios y referencias a ser usadas para orientar los procesos de razonamiento que deben apoyar la práctica de enseñar matemáticas. Esta sinergia entre prácticas profesionales específicas y los conocimientos que apoyan dichas prácticas, no puede olvidar la dimensión afectiva que puede condicionar el desarrollo de las competencias docentes profesionales. Los descriptores de la sinergia entre competencia específica y conocimiento especializado generado por las investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el aprendizaje y práctica de los maestros y profesores de matemáticas nos están proporcionando en estos momentos información necesaria sobre los niveles de desarrollo competencial.

Las propuestas de entornos de aprendizaje, ciclos formativos y propuestas de tipologías de tareas en los programas de formación, nos permiten asumir que se están proporcionando los mimbres para poder urdir propuestas de programas de formación docente (inicial y continua) tanto para maestros como para profesores de Educación Secundaria que pueden permitir formar a los docentes que nuestra sociedad necesita en estos momentos. Finalmente, las propuestas de desarrollo profesional inciden en la idea de la reflexión sobre la propia práctica (Lesson Study y contextos de investigaciones colaborativas) y en el necesario uso de referencias teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática para organizar la reflexión.

Reconocimientos

Las aportaciones de Ceneida Fernández, Mar Moreno y Patricia Perez-Tyteca se han realizado con el apoyo del proyecto PID2020-116514GB-I00. La aportación de José Luis Lupiáñez y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo se ha realizado con el apoyo del proyecto PID2021-128261NB-I00. La aportación de Nuria Climent se ha realizado con el apoyo del proyecto RTI2018-096547-B-100. La aportación de Adrian Breda, Alicia Sánchez y Vicenç Font se ha realizado don el apoyo del proyecto PGC2018-098603-B-I00.

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.

Badillo. E., Climent, N., Fernández, C. y Gónzalez, M.T. (Eds.), (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Prácticas de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T. y Llinares, S. (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. From university-based activities to classroom practice. En G. M. Lloyd y O. Chapman (Eds), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3. Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 343-366). Brill/Sense.

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Mathematics Teachers Engaging with representations of practice. *ICME-13 Monographs. A Dynamically Evolving Field.* Springer.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-91). SEIEM.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V. y Hiebert, J. (2017). Clarifying the impact of educational research on learning opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 230-236.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I. y Flores-Medrano, E. (coord.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primari*a. Paraninfo.

Carroll, J. B. (1963). A model of school learning. *Teachers College Record, 64*(8), 723–733.

Castro, E. (coord.)(2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Síntesis

Chamorro, M.C. (coord.). (2003). *Didáctica de la Matemática para Primaria.* Pearson-Prentice Hall

Clarke, M. y Gregory, K. (2003). Projects: tracking practices, opportunities to learn, and achievement in mathematics: An international perspective from TIMSS. *Journal of Mathematics Teacher, 96*(7), 526.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32(*1), 5-8.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80..

Fernández, C. y Choy, B. H. (2019). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, Teaching, Psychological, and social perspectives. En S. Llinares, y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Second Edition) (pp. 337-360). Brill/Sense.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 39-61.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia. I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). SEIEM.

Floden, R. (2002). The measurement of opportunity to learn. En A. C. Porter y A. Gamoran (Eds.), *Methodological Advances in Cross-National Surveys of Educational Achievement* (pp. 231–266). National Academy Press.

Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 177-193). Pirámide.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Múñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). SEIEM.

Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, *10*(2), 1-23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., J., Vanegas, Y., Ferreres, S., Carvajal, S. y Adán, M. (2012). Funciones**.** En V. Font, J. Giménez, V. Larios y J. F. Zorrilla (Eds.), *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (133-210). Publicaciones de la Universitat de Barcelona.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 11*, 111-132.

GIDIMAT-UA (2021). Aprendiendo a ser maestro: Algunas perspectivas desde la Educación matemática. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *10*(1), 45-62.

Goméz del Amo, R. (2017). *Fuentes de estrés y emociones en el profesorado de matemáticas de secundaria.*

Validación de una escala de elaboración propia. Tesis doctoral inédita, Universdidad de Extremadura, https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/208663/TDUEX_2017_Gomez_del_Amo.pdf?sequence=1

Gorgorio, N., Albarracin, Ll., Laine, A. y Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the Access criteria? *LUMAT General Issues, 9*(1), 174-207, https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1468

Hidalgo, S. Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: Relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática, 17*(2), 89-116.

Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2019). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de *Lesson Study*. En. A. Richit, J, P. da Ponte y E. S. Gómez (Eds.), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores*. Livraria da Física.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). SEIEM.

Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Praxis y Saber: Maestría en Educación,11*(26), e10667. https://dx.doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-Learning Partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 249–282.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195-204). PME.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, vol. 24,* nº 1, 185-205.

Lo, J. y Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics, 27*(2), 145-164.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Mason, J. (2002). *Reseraching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge.

Mato, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación, 18* (1), 19-32.

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 17*(3), 305-322.

McLaughlin, M. W. y Shepard, L. A. (1995). *Improving education through standards-based reform*. The Nacional Academy of Education.

Peker, M. (2016). Mathematics teaching anxiety and self-efficacy beliefs toward mathematics teaching: A path analysis. *Educational Research and Reviews, 11*(3), 97-104.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de elección de carreras* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Pérez-Tyteca, P., Gómez, B. y Monje, J. (2012). Reacciones afectivas de futuros maestros al enfrentarse como docentes a la resolución improvisada de un problema aritmético de porcentajes. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 159-167). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 51-66.

Praetorius, A. K. y Charalambous, C.Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. *ZDM Mathematics Education,* 50, 535–553. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0

Raizen, S. A y Jones, L. V. (1985). *Indicators of precollege education in science and mathematics: A preliminary review*. National Academy Press.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (pp. 69-88). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Oportunidades para el aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 209-224). Pirámide.

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers creativity. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

Scherff, L. y Piazza, C. L. (2008). Why Now, More Than Ever, We Need to Talk About Opportunity to Learn. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, *52*(4), 343–352.

Schmidt, W., Cogan, L. y Solorio, M. L. (2017). The Missing Link—Incorporating Opportunity to Learn in Educational Research Analyses. In JW. Son, T. Watanabe y JJ. Lo (Eds.), *What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education* (pp. 411-418). Springer, Cham.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stevens, F. I. y Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. National Center for Education Statistics.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. Michigan State University.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*, 315-327.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344-350.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-75.

Uusimaki, L. y Nason, R. (2004). Causes underlying pre-service teachers' negative beliefs and anxieties about mathematics. En In M. Høines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Bergen University College.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer Academic Publishers.

Williams, D., Cudd, M., Hollebrands, K. y Lee, H. (2020). Beginning high school teachers' organization of students for learning and methods for teaching Mathematics. *PNA, 15*(1), 51-68.