

Consideración de errores y dificultades en propuestas didácticas diseñadas por maestros en formación

Consideration of errors and difficulties in teaching proposals designed by preservice primary teachers

CARMEN GLORIA AGUAYO-ARRIAGADA,¹ LINA MARÍA CECILIA GÁMIZ²
Y ANA B. MONTORO²

¹Universidad de Almería, ²Universidad de Granada

Resumen

A pesar de las diferencias existentes entre los distintos modelos de conocimiento del profesor desarrollados desde la Didáctica de la Matemática, en todos ellos se destaca la importancia de conocer posibles errores y dificultades en contenidos matemáticos para diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar dichos obstáculos. En este capítulo exploramos el sentido que dan estudiantes para maestro de Primaria a las nociones de *error* y *dificultad*, examinando en qué medida y de qué modo son tomados en cuenta en el diseño de unidades didácticas. El estudio nos aporta información sobre el grado en que son capaces de integrar lo aprendido, apreciándose que en general toman en cuenta las limitaciones de aprendizaje en la elaboración de la programación, si bien suelen aplicar un tratamiento superficial al reflejarlas en el planteamiento de las actividades.

Palabras clave: formación de maestros, errores y dificultades, unidades didácticas, educación matemática, educación primaria

Abstract

Despite the differences among different models of teacher knowledge developed from the Didactics of Mathematics, all of them highlight the importance of knowing possible errors and difficulties in mathematical content when designing teaching proposals that allow overcoming these obstacles. In this chapter we explore the meaning of the terms *error* and *difficulty* given by

preservice primary school teachers, examining to what extent and in what way they are considered in the planning of teaching units. The study provides us with information on the extent to which preservice teachers are capable of integrating what they have learned. In general, they take into account the learning limitations while designing teaching proposals, although they tend to make a superficial application of them on task planning.

Keywords: teacher training, errors and difficulties, learning proposals, mathematics education, primary education

1. Introducción

Existe un consenso generalizado en la comunidad de educadores matemáticos sobre la importancia de considerar los errores y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes como parte integrante y relevante del proceso educativo, si bien se han adoptado perspectivas diferentes en su concepción y tratamiento, bajo la influencia de enfoques teóricos diversos (Rico, 1998; Flores, 2001). Asimismo, en los distintos modelos de conocimiento del profesor desarrollados desde la Didáctica de la Matemática se destaca, salvando las diferencias entre ellos, la relevancia de conocer posibles errores y dificultades en contenidos matemáticos para diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar tales obstáculos (Ball *et al.*, 2008; Carrillo-Yáñez *et al.*, 2018).

El estudio que presentamos se encuadra en una investigación más amplia que analiza el diseño de unidades didácticas por parte de un grupo de maestros y maestras en formación, cuyo punto de partida es una tesis doctoral (Aguayo-Arriagada, 2018) de la que derivan trabajos posteriores que inciden en determinados aspectos de la planificación, como los objetivos de aprendizaje (Aguayo-Arriagada *et al.*, 2018) o la fenomenología de los problemas planteados (Aguayo-Arriagada y Flores, 2020). Nos proponemos ahora indagar en los trabajos realizados por los estudiantes para profundizar en el sentido que los futuros profesores atribuyen a los errores y dificultades en el momento de programar la práctica docente. Pretendemos, de este modo, valorar la efectividad de la enseñanza recibida y de las herramientas de planificación aportadas, así como las posibles carencias que puedan ponerse de manifiesto, en lo que se refiere al foco de interés de los errores y dificultades en matemáticas.

2. La formación de profesores de matemáticas en la Universidad de Granada

Nuestro trabajo se enmarca en la formación inicial de profesores de matemáticas y se contextualiza en el Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, en el que el Departamento de Didáctica de la Matemática se hace cargo de las materias propias del área. Es necesario mencionar que, durante muchos años, los doctores Pablo Flores e Isidoro Segovia han venido desempeñando un papel protagonista en este departamento, realizando aportaciones muy valiosas tanto en docencia como en investigación. Una muestra de ello son los manuales que sirven de base a las asignaturas y que apoyan la tarea docente del profesorado, en los que ellos han participado como coordinadores y/o coautores (Segovia y Rico, 2011; Flores y Rico, 2015; Castro, 2001), y que son relevantes para esta investigación, porque marcan las pautas de enseñanza y evaluación en los aspectos que se analizan.

Por otro lado, cabe destacar las numerosas tesis dirigidas por ellos, de las que varias se enmarcan en la línea de Formación del profesorado de matemáticas y han abordado de algún modo la evaluación de las materias que conforman el programa destinado a los futuros maestros y maestras de Primaria. Entre ellas se encuentran las tesis doctorales de dos de las autoras de este capítulo, una de ellas centrada en la asignatura de primer curso (Cecilia, 2016) y otra en la correspondiente al tercer curso (Aguayo-Arriagada, 2018), siendo esta última tesis precursora del presente trabajo.

El modelo formativo que sustenta este trabajo es el propuesto por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», al que pertenecen los profesores mencionados. Para preparar a los futuros docentes, nos situamos en un enfoque funcional de las matemáticas escolares apoyado en el constructivismo social como teoría de aprendizaje (Lupiáñez y Rico, 2015), así como en un enfoque funcional de la propia formación inicial de los maestros (Gómez y González, 2008). El planteamiento metodológico que se promueve en las materias correspondientes al área de Didáctica de la Matemática se fundamenta en el análisis didáctico (Rico *et al.*, 2013) como instrumento de formación del profesorado de matemáticas, si bien

este planteamiento coexiste en la misma universidad con otras posturas teóricas (Godino *et al.*, 2007).

En cuanto a la distribución de las asignaturas en el programa formativo, en el primer año de carrera se imparte Bases Matemáticas para la Educación Primaria, donde se enfatiza en el contenido matemático. En el segundo año se continúa con Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria, siendo aquí donde se profundiza en los aspectos cognitivos, relacionados con el aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades y errores. Finalmente, en el tercer año se aborda Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, donde los futuros maestros integran los elementos estudiados en los años anteriores en el diseño de unidades didácticas sobre un determinado contenido matemático, que realizan de manera grupal. La investigación realizada se centra en analizar unidades didácticas elaboradas por estudiantes en esta última asignatura.

3. El papel de los errores y dificultades en la formación de maestros de Educación Primaria

El marco conceptual que debemos considerar atiende tanto a los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas como a su relación con la formación inicial de profesores y específicamente con la competencia de planificación de los estudiantes para maestro, particularizada en la integración de errores y dificultades en el diseño de unidades didácticas.

3.1. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

En el aprendizaje de las matemáticas se presentan diversas dificultades de procedencia y naturaleza variada que dan lugar a errores en la comprensión y en las producciones de los alumnos (Rico, 2001).

En matemáticas las dificultades de aprendizaje apuntan a enunciados generales que se van puntualizando de distintas formas sobre los temas de estudio (González *et al.*, 2010). Existen diferentes tipos de dificultades que han sido clasificadas por los

expertos. Atendiendo a su origen, pueden estar asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos o a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Todas estas dificultades se manifiestan en los alumnos en forma de errores (Socas, 1997).

En palabras de Lupiáñez y Rico (2015), el error:

[...] es un dato empírico que muestra un desconocimiento o un conocimiento inadecuado sobre un contenido que tiene un alumno o un grupo de alumnos (p. 54)

Por tanto, es una conducta observable que puede aportar información sobre las dificultades que han podido provocarlo. Por otro lado, el conocer dificultades de aprendizaje permite apreciar e interpretar los errores, que son manifestaciones más concretas que se producen en las respuestas que dan los alumnos a las tareas (Rico, 1998).

Centrándonos en las dificultades debidas a la complejidad de los conceptos matemáticos, la experiencia muestra que algunos de ellos suelen resultar más difíciles de comprender o requieren más tiempo para su asimilación. La investigación ha generado un amplio conocimiento sobre los errores más frecuentes relativos a algunos conceptos básicos que conviene tener en cuenta en la planificación de la enseñanza, incluyendo actividades mediante las que detectarlos, controlarlos y corregirlos (Lupiáñez y Rico, 2015).

En todo planteamiento de enseñanza subyace una concepción de aprendizaje que influye en la interpretación que se hace del error. Desde el punto de vista del conductismo, hay que evitar los errores, puesto que no permiten desarrollar la conducta deseada, y habrá que poner los medios para prevenirlos o corregirlos. Sin embargo, cuando se concibe el aprendizaje como un cambio de estructuras, los errores de los aprendices son indicadores de la forma en que han comprendido la tarea, es decir, son muestras externas de la estructura mental que se ha formado el alumno que los comete (Flores, 2001). Desde esta última perspectiva, defendida por las teorías cognitivas, se asigna una función didáctica al error, que juega un papel importante en el aprendizaje y debe ser considerado en la planificación, en la eva-

luación y también como motivación y como medio para mejorar la comprensión (Rico, 2001).

3.2. Dificultades y errores en la formación inicial de profesores de matemáticas

Los expertos distinguen dos componentes fundamentales que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas: el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, tal como los denomina Rico (2015). Ambas componentes se interrelacionan en los diferentes elementos que conforman lo que un futuro docente necesita saber para enseñar matemáticas. Así, el modo en que se contemplan los errores y dificultades en la formación inicial de profesores de matemáticas y, en particular, de los maestros y maestras de Primaria, debe abarcar conocimientos de aprendizaje y enseñanza para utilizarlos de manera adecuada en la planificación, desarrollo y evaluación de la acción didáctica, pero también se requiere que el estudiante para maestro acredite un dominio suficiente de su conocimiento sobre el contenido matemático, de modo que él mismo pueda enfrentarse con éxito a las principales dificultades y errores de las matemáticas elementales.

En lo que se refiere al conocimiento didáctico, de valor incuestionable para la capacitación de los futuros docentes es la previsión y el tratamiento de dificultades y errores de aprendizaje. Como exponen Fernández-Plaza *et al.* (2019), hay marcos recientes centrados en competencias profesionales del profesor que propugnan la relevancia de que se fomente el desarrollo de una competencia específica centrada en la consideración de errores en los programas de formación de profesores, aunando diversos aspectos dentro de ella. En este sentido, Heinrichs y Kaiser (2018) concretan la competencia de diagnóstico del profesor para tratar errores que pueden presentar los escolares cuando están aprendiendo matemáticas estableciendo dos capacidades distintas: detectar las razones por las cuales se comete el error y desarrollar estrategias para gestionarlos.

Algunas investigaciones se han preocupado por detectar en qué errores inciden los maestros en formación, obteniendo información sobre el conocimiento del contenido matemático de

los estudiantes y sus posibles carencias (De Castro *et al.*, 2004; Rodríguez *et al.*, 2016). Otros estudios abordan la competencia de diagnóstico, centrándose en si los futuros profesores pueden identificar errores de escolares y cómo lo hacen (Fernández-Plaza *et al.*, 2019; Şahin *et al.*, 2016). Nuestro trabajo incide en la dimensión de planificación, analizando el papel de los errores y dificultades con relación a esta competencia.

3.3. Integración de errores y dificultades en la planificación de la enseñanza

Si percibimos la formación inicial desde una perspectiva funcional, es decir, integrando el conocimiento, habilidades y actitudes de los estudiantes para maestro en la acción que se lleva a cabo en el contexto de aprendizaje de las matemáticas en las aulas de Educación Primaria, el conocimiento de los futuros maestros se puede desarrollar a partir del análisis y la descripción de las actividades necesarias para planificar, gestionar y evaluar una lección de matemática (Gómez y González, 2008). Según Rico (2015), la planificación requiere delimitar y precisar los contenidos y sus significados, prever el tipo de aprendizaje que se quiere alcanzar, diseñar un plan de actuación para el logro de los aprendizajes esperados y establecer un sistema de evaluación sobre el alcance de dichos logros. Por consiguiente, el conocimiento didáctico sobre un contenido escolar consta de estos cuatro elementos, que pueden ser organizados mediante el enfoque del análisis didáctico (Rico *et al.*, 2013), en el que nos posicionamos.

El análisis didáctico, que constituye tanto una herramienta para la planificación como un modelo de formación, propugna que los dominios de conocimiento matemático y conocimiento didáctico están estrechamente vinculados y se ponen en juego al desarrollar cada una de las dimensiones que contempla: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación. Estas dimensiones permiten al profesor organizar su actividad de enseñanza sobre un tema matemático, facilitándole, así, el diseño de unidades didácticas. El análisis de contenido conforma la revisión y organización de los conceptos y procedimientos de un contenido matemático escolar, el modo en que se pueden representar y la organización de los fenómenos y problemas a los que

puede dar respuesta. El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje de un tema matemático y sirve para concretar las expectativas sobre ese aprendizaje, las limitaciones que pueden interferir en él y las tareas que se puedan considerar como generadoras de oportunidades de aprendizaje. El análisis de instrucción es el momento en el que el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que se llevarán a cabo, delimitando también los materiales y recursos, así como la gestión del aula, todo esto concretado en la programación. Finalmente, el análisis de evaluación se lleva a cabo una vez se implemente la unidad didáctica, pudiendo obtener información para generar modificaciones en ella (Aguayo-Arriagada, 2018).

En lo que concierne a este trabajo, en un primer momento interesa profundizar en la fase del análisis cognitivo, que es donde los errores y dificultades juegan un papel relevante para la planificación posterior. En esta fase se establecen, una vez realizado el análisis de contenido, las expectativas que el profesor se plantea respecto al aprendizaje de los alumnos, pero también se han de tener en cuenta las posibles *limitaciones de aprendizaje*, es decir, aquellas situaciones que pueden limitar o entorpecer el aprendizaje de los alumnos al trabajar con el contenido matemático en cuestión. Estas limitaciones se concretan en las posibles dificultades que pueden surgir y qué errores pueden ocasionar. A partir de aquí comienza el proceso de búsqueda o de creación de tareas que constituyan oportunidades de aprendizaje, en coherencia con las expectativas planteadas y considerando errores y dificultades frecuentes para ayudar a superarlos.

En la siguiente fase, el análisis de instrucción, es donde se integran las limitaciones de aprendizaje que los alumnos han buscado y seleccionado para diseñar la propuesta didáctica, teniendo en cuenta esta información para programar de manera coherente y eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje, de modo que pueda contribuir a salvar esas limitaciones mediante una adecuada secuencia de tareas.

En definitiva, el conocimiento de errores y dificultades forma parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y han de ser considerados en la planificación de diferentes maneras, como apuntan Lupiáñez y Rico (2015):

El estudio de los errores y dificultades proporciona esquemas para organizar los contenidos. Una determinada secuencia de tareas puede facilitar la superación de dificultades o evitar errores específicos. También la selección de una forma de representación o de un ejemplo concreto puede contribuir a superar esas limitaciones.

También el estudio de errores ayuda a establecer objetivos, en cuanto que estos marcan algunas limitaciones que deben superarse mediante una organización correcta de contenidos. Igualmente, el conocimiento de los errores y las dificultades proporciona orientaciones para diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos, que les exijan revisar sus conocimientos previos y superar las limitaciones conceptuales. (p. 55)

4. Consideración de errores y dificultades en unidades didácticas diseñadas por estudiantes

Como avanzábamos anteriormente, nos proponemos explorar el sentido y uso que dan estudiantes para maestro de Primaria a los errores y dificultades como organizadores de la enseñanza, concretándose el objetivo de la investigación en describir en qué medida y de qué modo son tomadas en cuenta las limitaciones de aprendizaje en la planificación de unidades didácticas por parte de los futuros profesores.

4.1. Metodología de la investigación

Este estudio es de carácter exploratorio, cualitativo y descriptivo, y usa el análisis de contenido para examinar los trabajos escritos del alumnado.

Sujetos de estudio

El estudio se realizó en una clase con 71 estudiantes matriculados en la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria, a los que se propuso trabajar en equipo, quedando conformados 18 grupos, 17 de cuatro integrantes cada uno y uno de tres. En la primera clase se proponía a cada grupo un contenido matemático y el nivel educativo en el que debían plantearlo, para que posteriormente en las clases

prácticas fueran trabajando el análisis didáctico (contenido y cognitivo) del tema asignado. El trabajo final consistía en la planificación de una unidad didáctica, donde se les pedía que, de los análisis de contenido y cognitivo trabajados previamente, seleccionaran contenidos, objetivos y limitaciones concretos para afrontar el diseño de la unidad didáctica de su tema en el nivel que les correspondía. Teniendo definidos estos elementos, se dedicaban a la selección de materiales didácticos y tareas matemáticas para elaborar cada una de las sesiones de su unidad didáctica.

El sentido multiplicativo es fuente de errores frecuentes en el alumnado de Primaria (Alsina *et al.*, 1996), debido al grado de abstracción y complejidad que supone para estas edades. En particular, hay acuerdo en afirmar que la división implica mayores dificultades frente al resto de las operaciones básicas, lo cual conlleva una variedad de errores en los escolares (Anghileri, 2001). Por este motivo, para este estudio decidimos escoger aquellos grupos que centraron las unidades didácticas en la división de números naturales, conformando una muestra intencional y por disponibilidad.

Los seis grupos de estudiantes seleccionados como muestra, identificados con los códigos G1 a G6, diseñaron sus propuestas didácticas en diferentes cursos de Educación Primaria, abarcando los tres ciclos: dos grupos (G1 y G2) trabajaron la iniciación a la división en segundo curso, dos grupos (G3 y G4) plantearon su unidad didáctica en tercero, un grupo (G5) en cuarto y otro (G6) en quinto curso.

VARIABLES DE ANÁLISIS

Siguiendo las fases del análisis didáctico, los estudiantes deben hacer un análisis de contenido del tema matemático asignado antes de diseñar su programación. Luego deben desarrollar el análisis cognitivo investigando, entre otras cosas, cuáles son las dificultades y errores que pueden presentarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para lo que pueden utilizar fuentes sugeridas o hacer una búsqueda autónoma de información. Por último, con el análisis de instrucción plantean la unidad didáctica considerando los análisis anteriores.

Teniendo en cuenta el proceso descrito, distinguimos dos dimensiones secuenciales que se refieren a las dos fases en las que

el alumnado maneja el conocimiento sobre errores y dificultades: análisis cognitivo y análisis de instrucción. Puesto que nuestro interés se centra en analizar las producciones finales, es decir, las unidades didácticas ya elaboradas, en la primera dimensión nos limitamos a hacer una comparación entre el análisis cognitivo que realizaron en un trabajo anterior y el modo en que lo integran en la planificación de la unidad didáctica propiamente dicha, con objeto de observar si hacen cambios o progresan de algún modo en el proceso de elaboración.

Respecto a la segunda dimensión, para evaluar la presencia y tratamiento de las limitaciones de aprendizaje en las programaciones realizadas construimos una serie de variables a modo de ítems que aplicamos a cada uno de los trabajos. Excepto una, todas las variables son dicotómicas, si bien en algunas de ellas se matizan después cualitativamente las diferencias entre las respuestas. Tanto las variables como la interpretación de las categorías asociadas (cumplimiento o no cumplimiento del ítem, excepto la segunda, que tiene sus propias categorías) se definieron por triangulación de investigadoras, estableciéndose tal como a continuación se describen:

- Variable «Error vs. dificultad». Consideramos que los estudiantes cumplen con este ítem si hacen algún tipo de distinción entre dificultades y errores cuando incluyen el listado de limitaciones de aprendizaje referentes a los contenidos trabajados en la unidad didáctica, sin hacer juicio de valor sobre si la distinción es más o menos acertada, aunque en el momento de analizar cada trabajo se matizan algunos detalles.
- Variable «Fuentes». Observamos si para elaborar el listado de errores y dificultades utilizan las fuentes bibliográficas sugeridas por el profesor o bien hacen una búsqueda autónoma, usualmente a través de Internet, y seleccionan otras fuentes, tomando así contacto con artículos de investigación u otro tipo de publicaciones. En este caso, se sugirió como fuente principal de información el manual usado como guía de la asignatura, concretamente, el capítulo de Flores *et al.* (2015). Las tres categorías definidas para esta variable se han denominado como sigue: «Recomendadas», «Internet», «Recomendadas e Internet», en alusión a las fuentes utilizadas.

- Variable «Contenido y nivel educativo». Otro aspecto que se analizó de las producciones fue la relación con los contenidos y con el curso asignado. Se observó si la selección de limitaciones de aprendizaje era acorde a los conceptos y procedimientos del contenido trabajado (*división*), así como al nivel educativo que le correspondía a cada grupo, considerando que el ítem se cumplía cuando se satisfacían de manera aceptable estas dos condiciones. No obstante, se han hecho comentarios cuando se ha visto la necesidad de precisar estos aspectos.
- Variable «Sesiones». Con esta variable pretendemos identificar si los grupos contemplan las limitaciones de aprendizaje de manera explícita en la secuencia de tareas, es decir, para valorar su cumplimiento nos limitamos a constatar si seleccionan y describen algunas de las dificultades y errores para cada una de las sesiones de la unidad didáctica. Con todo, vemos conveniente analizar si establecen implícitamente esa relación entre las limitaciones y las tareas que proponen, observando si de algún modo se refleja la intención de trabajarlas en el desarrollo de la sesión.
- Variable «Justificación». Por último, apreciamos si en las conclusiones de los trabajos escritos se justifica la relevancia y el tratamiento que dan a los errores y dificultades en el diseño de la unidad didáctica. Se considera que se cumple este ítem cuando aluden de algún modo a esa justificación, independiente de la profundidad de sus comentarios, aunque realizamos matizaciones en caso necesario.

Utilizando estas variables como criterios, los documentos fueron analizados de manera independiente por las tres autoras del artículo, discutiendo los resultados en aquellos casos en los que hubo desacuerdos y llegando a un consenso final.

4.2. Resultados

Al comparar la unidad didáctica con el análisis cognitivo previo, se puede observar que los grupos G1, G3, G4, y G5 no hacen cambios, presentando las mismas dificultades y errores en ambos trabajos. En cambio, el grupo G2 presenta una tabla bastante amplia sobre diferentes dificultades y errores asociados a la divi-

sión en el análisis cognitivo y en la unidad didáctica hace una selección de las relacionadas con su nivel educativo. El grupo G6 es el que presenta cambios más significativos, incluyendo en la unidad didáctica, además de los errores propuestos en el primer trabajo, dificultades, distinguiendo entre ambos aspectos.

Centrándonos en el análisis del trabajo final (unidad didáctica), encontramos que todos los grupos relacionan adecuadamente las dificultades y errores propuestos con los contenidos que pretenden trabajar en el nivel educativo asignado. El único caso en el que se puede apreciar que algunas de las dificultades y errores no se corresponden con lo que se trabaja en el curso es el del grupo G2, ya que establecen como dificultad la concepción de que el dividendo es siempre mayor que el divisor, aspecto que no aparece hasta introducir la división con decimales. Así lo subraya este grupo:

Dificultades:

Diferente papel que desempeñan los términos *dividendo* y *divisor* de las operaciones de la división. (L1)

Errores:

Los alumnos memorizan que el dividendo siempre es el número mayor y el divisor el número menor.

En contraste, ninguno de los grupos al inicio de cada sesión hace una selección entre sus dificultades y/o errores para poder abordarlos con las tareas planteadas. Se centran en mencionar solamente los contenidos, los objetivos específicos y los materiales o recursos necesarios. No obstante, cuando se analizan las tareas de cada sesión, en ocasiones se aprecia que sí contemplan de algún modo las limitaciones de aprendizaje. Todos los grupos inician algunas de sus sesiones proponiendo actividades con material manipulativo, lo que favorece que los escolares entiendan los significados de la división o comprendan el mecanismo del algoritmo, permitiendo superar algunas dificultades y evitar errores asociados a ellas. Una muestra de esto se puede apreciar cuando el grupo G6, en la primera sesión de su unidad didáctica, pide a los alumnos que resuelvan un problema utilizando el material multibase, planteándolo de la siguiente manera:

Una vez que saben representar los números vamos a plantear lo siguiente utilizando el material multibase en grupos de 4:

- Una floristería quiere hacer ramos de una docena de rosas con 252 rosas que tiene en la tienda. ¿Cuántos ramos de rosas harán? ¿Sobran rosas?

Sin embargo, en pocas ocasiones se observa de manera clara y explícita la intención de crear conflicto cognitivo, por ejemplo, para incidir sobre algún error frecuente de los que incluyen en su análisis cognitivo.

En el resto de las variables a analizar, se pueden observar diferencias más significativas entre los grupos, existiendo una mayor variabilidad en el cumplimiento de los ítems (tabla 1). Comentaremos los resultados obtenidos para cada uno de los grupos de trabajo.

Tabla 1. Resultados de las variables por grupo.

Grupos/ Variables	Error vs. dificultad	Fuentes	Justificación
G1	Sí	Recomendadas e Internet	Sí
G2	Sí	Recomendadas e Internet	Sí
G3	Sí	Recomendadas	Sí
G4	Sí	Recomendadas e Internet	
G5		Recomendadas	
G6	Sí	Internet	

En el caso del grupo G1, encontramos que diferencian entre dificultades y errores, pero se centran más en explicar la dificultad que en delimitar los errores específicos que están asociados a dicha dificultad. Por ejemplo, en un caso mencionan como error:

El alumno presenta dificultades para asociar el concepto de *mitad* con la división entre 2.

En esta situación, podemos observar que se utiliza el término *dificultad*, pero aluden a errores. Un aspecto a destacar de este grupo es que, para cada dificultad y error, incluye un ejemplo

(«Ejemplo: un alumno sabe repartir 8 lápices entre 2 estuches, pero no sabe que esto es la mitad»). Se basan tanto en las dificultades señaladas en el libro de texto recomendado como en otras fuentes de Internet. Finalmente, en las conclusiones justifican exclusivamente las dificultades asociadas al lenguaje matemático, diciendo que utilizan «un lenguaje sencillo y entendible para que no los lleve a error».

El grupo G2 presenta una tabla de limitaciones, diferenciando entre dificultades y errores. Al igual que el grupo G1, todo lo que se expone es extraído del libro de texto sugerido. En las conclusiones justifican que las dificultades y errores son tomados en cuenta, pero no se refieren a ninguno de ellos ni explican cómo se han abordado, indicando que «cada una de las tareas que hemos propuesto se ha realizado para superar las limitaciones y errores que puedan tener los alumnos y alumnas a estas edades y en este tema».

El grupo G3 establece la diferenciación entre dificultades y errores y, si bien se inspiran en el libro de texto, consultan, además, otras fuentes, agregando dificultades más específicas para su contenido y nivel educativo, como son: dificultad al introducir el nuevo procedimiento, dificultad en la realización del algoritmo de la caja, dificultad de comprensión e identificación de los términos y dificultad en el verbo de acción para realizar la operación. También hacen alusión a algunos errores asociados a cada una de las dificultades; por ejemplo, relacionan el «Error en la realización de la operación de derecha a izquierda (tanto en el cociente como en el divisor)» con dificultades en la realización del algoritmo de la caja. En las conclusiones vuelven a mencionar las dificultades y luego afirman:

Nuestra unidad es adecuada, ya que presenta gran coherencia entre los objetivos, los contenidos, las dificultades, las representaciones y las tareas.

El grupo G4 organiza las dificultades en dos categorías, relativas a la división y relativas a la resolución de problemas, diferenciando las dificultades y errores para cada una de ellas. Aunque extraen información del libro de texto, añaden una clasificación bastante detallada de las dificultades, tanto para la división como para los problemas, asociando para cada una de estas un

error y ampliando la información del manual mediante la consulta de otras fuentes de Internet. Este grupo no hace ningún tipo de justificación de sus dificultades y errores en las conclusiones.

Dificultad:

1. Dificultad de comprensión lectora matemática.

Error:

El principal error a destacar es que el verbo *repartir* se convierte en un referente de la división que no siempre corresponde.

El grupo G5 comienza mencionando que «lo primero que tenemos que diferenciar es el concepto de *error* con el de *dificultad*». Sin embargo, presentan un listado de dificultades con la clasificación propuesta en el manual recomendado sin hacer alusión a errores, por lo cual reflejan la diferencia más de nombre que de concepto. No se hace ningún tipo de justificación de las dificultades planteadas.

3. c) Dificultades relacionadas con la enseñanza.

- Los alumnos son capaces de memorizar fácilmente el algoritmo de la división, pero no llegan a comprender el significado de dicho procedimiento ni a identificar los problemas los cuales se han de resolver mediante dicho algoritmo.
- Confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos.
- Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor.

Finalmente, el grupo G6 hace la distinción entre dificultades y errores de aprendizaje, pero no asocia cada uno de los errores a una dificultad específica, es decir, presenta ambas como elementos independientes. Las dificultades están más relacionadas con la resolución de problemas:

La dificultad de elegir la operación adecuada para resolver un problema simple de división varía de una categoría semántica a otra.

Por su parte, los errores son específicos del algoritmo de la división:

Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente.

En la tabla 1 podemos observar que este es el único grupo que no utiliza la fuente recomendada. Al igual que los dos grupos anteriores, tampoco justifica el tratamiento de dificultades y errores en las conclusiones de su trabajo.

5. Discusión y reflexiones finales

La comparación entre el análisis cognitivo previo y el trabajo final, primera dimensión considerada en el estudio, muestra que solo dos grupos logran generar cambios a lo largo del proceso formativo, apreciándose una preocupación por delimitar en la unidad didáctica cuáles eran las dificultades y errores que tomarían en cuenta específicamente para el desarrollo de sus sesiones. Esto indica que aplican adecuadamente las herramientas aportadas por el profesorado para llevar a cabo su unidad didáctica, siendo conscientes de que la planificación es un proceso complejo que incluye varios aspectos y fases que deben ser consideradas.

Respecto a la segunda dimensión, relativa al análisis de instrucción, las observaciones realizadas muestran que la mayoría de los grupos integran los errores y dificultades en diferentes partes de la unidad didáctica, si bien se aprecia un tratamiento no explícito, superficial o no siempre adecuado en el momento de plantear las tareas para el alumnado. La experiencia en la formación inicial de maestros permite constatar que incluso algunos de ellos no han llegado a dominar por completo ciertos aspectos del sentido multiplicativo y de la división, tal como se detecta en alguno de los trabajos analizados, y esto puede influir en que no les resulte fácil integrar los errores y dificultades en las tareas de un modo consciente y en profundidad.

Casi todos los grupos (cinco de seis) hacen la distinción entre dificultades y errores, situación que favorece a los futuros maestros a la hora de planificar. Tener claridad sobre limitaciones de aprendizaje permite hacer una planificación más cuidadosa para afrontarlas en la enseñanza.

Poder establecer cuáles son las dificultades y errores que pueden surgir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un conte-

nido matemático específico conlleva que los futuros maestros tengan un acercamiento a investigaciones sobre matemática y su didáctica. En general, los grupos se basan en el libro de texto de referencia para elaborar su listado de limitaciones de aprendizaje, pero también acuden a otras fuentes, realizando una búsqueda autónoma. No obstante, hemos apreciado que no siempre elaboran de manera personal la información buscada.

La relación que se establece entre el contenido trabajado en la unidad didáctica y los errores y dificultades planteados para los diferentes niveles educativos podríamos decir que, en general, es coherente. Sin embargo, no se detecta claramente la conexión entre las limitaciones de aprendizaje y la secuencia de tareas programadas, ya que ninguno de los grupos hace mención en el inicio de cada sesión de las dificultades y errores concretas que se podrían abordar en ella. Un factor que ha podido influir en este hecho es que no se les demandaba explícitamente que asociaran las limitaciones a cada una de las tareas, siendo ellos los que debían tomar decisiones al respecto.

En cambio, al analizar las tareas propuestas, hemos visto que algunas sí se relacionan con las dificultades y errores en cierta medida, aunque no con la profundidad que sería deseable. Si bien es cierto que los grupos hacen uso de material manipulativo para facilitar el aprendizaje y ayudar a la superación de dificultades, no tienen en cuenta otros aspectos importantes que podrían enriquecer las tareas en ese sentido, como el planteamiento de conflictos cognitivos que presten atención a los errores más frecuentes, tal como sugieren Lupiáñez y Rico (2015).

Finalmente, un aspecto que nos interesaba analizar era la capacidad de los futuros maestros de justificar el porqué y para qué de las dificultades y errores considerados en su programación. Hemos podido observar que la mitad de los grupos hacían alusión a este aspecto en las conclusiones, si bien argumentaban de manera muy general la forma en la que habían contemplado las limitaciones de aprendizaje, o simplemente aludían a ellas.

A modo de reflexión, la consideración de estos aspectos para analizar los trabajos de los estudiantes nos da pistas sobre el grado de comprensión y de aplicación que muestran sobre dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas a la hora de programar la acción didáctica. Conscientes de la complejidad que supone este tema para la mayoría de ellos, sobre todo por la

profundización requerida en la conceptualización de las propias matemáticas, pero también por la necesidad de dominar planteamientos didácticos que promuevan realmente la significatividad de lo aprendido, la información que obtenemos mediante el análisis de las unidades didácticas realizadas creemos que resulta útil para modificar y enriquecer la formación inicial de los futuros docentes, teniendo en cuenta las limitaciones observadas. Es decir, partiendo de los criterios que, como formadores de profesores, utilizamos para dar valor a sus competencias de planificación, podemos detectar posibles carencias, dificultades de comprensión, creencias erróneas, confusiones u omisiones relacionadas, en este caso, con la consideración de dificultades y errores en el aprendizaje matemático, para así poder reconducir y mejorar nuestra propia práctica docente. De algún modo, este estudio muestra coherencia con la exigencia que, a los estudiantes, a su vez, se les plantea para desempeñar su futura profesión con calidad: «es importante considerar los posibles errores y dificultades de los alumnos ante el aprendizaje para poder planificar la enseñanza de manera más efectiva».

Creemos que una contribución añadida de este estudio ha sido la necesidad de organizar y delimitar el tópico de errores y dificultades dentro del programa completo de formación de los futuros docentes, explicitando y haciendo hincapié en las relaciones que se establecen entre las asignaturas de los diferentes cursos. Esto nos ha llevado a reflexionar sobre la importancia de la coordinación entre el profesorado, tanto en el aspecto trabajado como en otros, para asegurar un tratamiento global, secuenciado y coherente de las competencias a desarrollar a lo largo de la formación universitaria.

6. Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del proyecto PGC2018-095765-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España.

7. Referencias

- Aguayo-Arriagada, C. G. (2018). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de primaria* [tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Aguayo-Arriagada, C. G y Flores, P. (2020). Fenomenología de los problemas de división que proponen futuros maestros de Primaria. En: Castro-Rodríguez, E., Castro, E., Flores, P. y Segovia, S. (coords.). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 41-60). Pirámide.
- Aguayo-Arriagada, C. G., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema*, 32(62), 990-1011.
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Graó.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27(1), 85-103.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Castro, E. (ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis.
- Cecilia, L. M. (2016). *Calidad y competencias en la formación inicial de profesores: evaluación de un programa de Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. [tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En: Castro, E. y De la Torre, E. (eds.) *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). Universidad da Coruña.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En: Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina,

- Á. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. inicial-final). SEIEM.
- Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-59). Síntesis.
- Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Pirámide.
- Flores, P., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 205-230). Pirámide.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The international Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Comunicación presentada en el Topic Study Group 27 del ICME 11.
- González, M. J., Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Análisis cognitivo. Apuntes de MAD*. [documento no publicado]. Universidad de los Andes.
- Heinrichs, H. y Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students' errors: Fostering diagnostic competence in error situations. En: Leuders, T., Philipp, K. y Leuders, J. (eds.). *Diagnostic competence of mathematics teachers* (pp. 79-94). Springer.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Pirámide.
- Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (eds.). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.
- Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Síntesis.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Comares.
- Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En: Macías, J. A., Jiménez, A., González, J. L., Sánchez, M. T., Hernández, P., Fernández, C., Ruiz, F. J., Fernández, T. y Berciano, A. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 635). SEIEM.

- Şahin, O., Gökkurt, B. y Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551.
- Segovia, I. y Rico, L. (coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En: Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-15). Horsori.