5

Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre las tareas de enseñanza

Reflection of Future Teachers of Mathematics on Teaching Tasks

María Teresa Castellanos Sánchez[1] y Antonio Moreno[2]
[1]Universidad de los Llanos, [2]Universidad de Granada

Resumen
El capítulo estudia la reflexión de futuros profesores de Matemáticas (FPM) durante la realización del Prácticum; se conjetura que el análisis reflexivo posibilita en el FPM transformar los aspectos inconscientes de la enseñanza, en conscientes. A través de un experimento de enseñanza los FPM enfrentan un problema profesional referido a la enseñanza del álgebra, profundizan en dicho problema a través del diseño, implementación y análisis reflexivo de las tareas matemáticas para una clase. Siguiendo el estudio de caso, se examina el proceso formativo y las producciones. Los resultados muestran que las tareas iniciales sufrieron modificaciones y cobraron sentido para la práctica docente producto de los procesos de reflexión. De este modo, los FPM incorporan nuevos elementos a su actuación incrementando en sus conocimientos profesionales.

Palabras clave: formación de profesores, profesor reflexivo, experimento de enseñanza

Abstract
The chapter studies the reflection of Future Teachers of Mathematics (FPM) during the realization of the Practicum; it is conjectured that reflexive analysis makes it possible in the FPM to transform the unconscious aspects of teaching into conscious ones. Through a teaching experiment the FPM face a professional problem related to the teaching of algebra, deepen that problem through the design, implementation and reflective analysis of the mathemati-

cal tasks for a class. Following the case study, the training process and productions are examined. The results show that the initial tasks underwent modifications and made sense for teaching practice as a result of the reflection processes. In this way, the FPM incorporate new elements into their performance by increasing their professional knowledge.

Keywords: teacher training, reflective teacher, teaching experiment

1. Referentes teóricos

La investigación sobre la formación y el aprendizaje de los profesores de Matemáticas ubica la reflexión como uno de los aspectos importantes para aproximar la teoría y la práctica (Kieran *et al.*, 2013); otros investigadores discuten la pertinencia de estos constructos (conocimiento profesional y reflexión) en relación con el desarrollo profesional (Lin y Rowland, 2016) y consideran la reflexión clave para el desarrollo de los sistemas educativos y un desafío para lograr una educación matemática de calidad. De aquí la importancia de promover la reflexión en Futuro Profesor de Matemáticas (FPM) e incorporar conocimiento profesional para otorgar sentido al Prácticum (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017). Nos planteamos, por tanto, el siguiente problema: ¿cómo promover en futuros profesores de Matemáticas procesos de reflexión durante las prácticas? y ¿cómo planean y transforman sus tareas de enseñanza como consecuencia de esta reflexión?

1.1. La reflexión del profesor sobre su práctica

La reflexión docente se considera un elemento fundamental en el desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica. Siguiendo los planteamientos de Schön (1992) y Dewey (1989), se considera que la reflexión implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones que en ellas están implicadas y la toma en consideración de las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas; El FPM es gestor del proceso de reflexión, quien identifica y asume un problema de la práctica, lo afronta a través de la revisión de sus creencias, para estar en disposición de entenderlo y replantearse alternativas para asumirlo (Flores, 2007). En este sentido, y dado que la única experiencia que tienen los FPM con la enseñanza es la que le proporciona el prácticum, para comprender el proceso de reflexión que revelan los FPM se usa la descripción crítica de la experiencia, haciendo la reconstrucción analítica del proceso formativo en el contexto; se examina la evolución y características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas.

Desde la postura cognitiva, la cual aborda la reflexión como un proceso y un fin, identificamos en varios autores rasgos comunes que permiten caracterizar ese proceso (Dewey, 1989; Schön, 1992; Perrenoud, 2004; Zeichner, 1993; Flores, 2007). Las principales etapas identificadas por los autores mencionados anteriormente son: *a*) problematización de los hechos de la realidad; *b*) distanciamiento de la realidad; *c*) toma de conciencia de los propios y nuevos conceptos, y *d*) las decisiones para la nueva actuación.

La principal característica de la reflexión en todas estas posturas es su fin: en la formación inicial se encamina a la comprensión de la práctica docente (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017). Entendemos los problemas profesionales como las cuestiones que enfrenta el profesor; son origen de cuestionamientos y dilemas de la práctica docente y los focos de reflexión en torno a tareas profesionales; es la dificultad que no puede resolverse automáticamente, sino que requiere de la reflexión para transformar en conscientes, los aspectos inconscientes de la enseñanza (Castellanos *et al.*, 2017).

1.2. Enfoque realista para la formación de profesores

Para abarcar la relación entre conocimiento teórico y práctico, nos posicionamos en la perspectiva formativa del enfoque realista, que promueve la reflexión para acercar dichos campos. Según Melief *et al.* (2010), este modelo de formación permite a los profesores fundamentar los problemas surgidos en la práctica desde la teoría. En este sentido el profesor es generador de situaciones de aprendizaje escolar a partir de la realidad de su práctica. Los principios de este enfoque (tabla 1) apuestan de manera implícita a la reconstrucción del conocimiento profesional.

Tabla 1. Principios de la formación de profesores en el enfoque realista.

Principio 1:	El punto de partida son las cuestiones que emergen de la práctica
Principio 2:	La formación pretende fomentar la reflexión sistemática
Principio 3:	El aprendizaje es un proceso social e interactivo
Principio 4:	Tres niveles en el aprendizaje: representación, esquema y teoría
Principio 5:	Autonomía y construcción de la competencia profesional

Korthagen *et al.* (2001) defienden el aprendizaje reflexivo en la formación de profesores para: *a*) conocer diversas maneras de actuar en la práctica; *b*) saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente; y *c*) reflexionar sobre ello sistemáticamente. Desde esta perspectiva, el aprendizaje reflexivo se constituye en el principio general de la formación de profesores, surgido del enfoque realista. A partir de este replanteamiento, las habilidades reflexivas son ahora consideradas como esenciales por su papel en la adquisición de habilidades lectivas y en la reformulación del conocimiento, la práctica y la experiencia humana. La reflexión sistemática se concreta a través de la puesta en marcha de un ciclo de reflexión inscrito en el modelo ALaCT (Korthagen *et al.*, 2001), buscando la alternancia entre «acción» y «reflexión». Su notación se identifica con las siglas de las iniciales de su definición (*Action, Looking back on the action, awareness of essential aspects, Creating alternative methods of action y Trial*). A continuación, describimos las cinco etapas que hemos equiparado con acciones para llevar a cabo la reflexión:

- Acción o experiencia: se identifica y analiza una problemática, exhibiendo los hechos conflictivos y de duda. La fase A se inicia con la descripción y el planteamiento de una situación que problematiza los hechos observados en la práctica; pretende dar sentido al objeto de reflexión concretando en una cuestión.
- Mirar hacia atrás en la acción: consiste en esbozar una «imagen» de los acontecimientos que han dado lugar a la problemática. En la fase L se examinan y exteriorizan creencias, lo cual conduce a la mirada distante de la realidad.

- Conocer puntos importantes o esenciales: tomar conciencia de la acción. En la fase a, se resaltan elementos importantes de la situación que conducen a la concienciación del conocimiento y a profundizar el objeto de la problemática.
- Crear, buscar y preparar alternativas para acción: significa proponer una solución a la problemática, fruto de las fases anteriores. En la fase C se buscan estrategias para reformular el plan de acción para eventos posteriores.
- Comprobar en una nueva situación: aplicar la solución en una nueva situación. En esta fase T se inicia un nuevo ciclo a partir de la aplicación de nuevas alternativas.

1.3. Las tareas matemáticas para la instrucción

Entendemos una tarea como un segmento de actividad de clase que se dedica al desarrollo de un concepto matemático en particular (Stein y Smith, 1998). En tal sentido una tarea podría estar compuesta por varios problemas relacionados (ejercicios o sentencias) o podría ser un solo problema complejo. Las tareas involucran todas las actividades llevadas a cabo por los FPM con escolares para el desarrollo de la lección.

Un aspecto a considerar es el grado en que una tarea es auténtica. Newmann *et al.* (2007) definen una tarea auténtica como aquella que se considera significativa, valiosa, y digna del esfuerzo, es decir, tareas que conectan la lección con el mundo real del escolar y que involucran las preocupaciones del docente; en tal sentido la tarea se entiende como un todo desde el diseño a la implementación y el rediseño. La tarea en sí misma se convierte en problema profesional del FPM, proporcionando oportunidades para desarrollar sus conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza.

En la literatura se identifican varios aspectos que debe considerar el profesor de Matemáticas al seleccionar, diseñar o modificar tareas. Según Moreno y Ramírez (2016) se atiende a las variables de tarea (contenido, complejidad y situaciones); componentes de la tarea (meta, formulación, temporización) y funciones de la tarea (diagnóstico, auto/regulación, síntesis). Al igual que otros investigadores coincidimos en la necesidad del análisis reflexivo acerca de la formulación de la tarea (Liljedahl *et al.*, 2007); este análisis reflexivo ilumina cualquier rediseño que puede ser beneficioso para las futuras lecciones. El ciclo reflexivo ALaCT ha sido configurado para promover en la formación inicial de profesores de Matemáticas el diseño iterativo de tareas (Castellanos *et al.* 2018, p. 4). De este modo, los FPM: *a*) problematizan hechos de la práctica y diseñan las tareas para abordar la situación problema (fase A); *b*) toman distancia de sus creencias, sometiendo la tarea al juicio (fase L); *c*) toman consciencia de los aspectos relevantes de la aplicación bajo la mirada de expertos (fase a); *d*) establecen decisiones para el rediseño de la tarea, la modifican o ajustan (fase C), y *e*) prueban las alternativas en futuras lecciones (fase T).

2. Metodología de la investigación

Se configura un experimento de enseñanza siguiendo el modelo de Korthagen *et al.* (2001) con el propósito de identificar y describir los aspectos de la reflexión que manifiestan FPM durante el prácticum. Para el desarrollo de esta materia se le pide a los FPM que realicen un análisis didáctico del tema a desarrollar en las aulas de Secundaria. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesorado debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Rico y Moreno, 2016). A su vez, se puede subdividir en cuatro análisis complementarios: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

Siguiendo el paradigma cualitativo, se procesan los datos del estudio mediante un análisis de contenido. Siguiendo el estudio de caso (Stake, 1998), se examina el proceso formativo y las producciones de Juan, un FPM que ha cubierto las fases del proceso reflexivo y al que denominaremos con este pseudónimo. Juan es un estudiante que se prepara para ser profesor de Secundaria y que está realizando el prácticum del último año de su Licenciatura. Eligió álgebra como unidad didáctica de sus prácticas. Para cada fase del ciclo se espera que el FPM realice unas acciones reflexivas (tabla 2) que son motivadas a partir de unas preguntas orientadoras (Castellanos *et al.*, 2018).

Tabla 2. Acciones reflexivas en fases del ciclo ALaCT.

Fases		Acción reflexiva	Preguntas orientadoras
A	Partir de la acción o experiencia	Problematización. Describir hechos y contexto. Definir la problemática.	¿Cuáles fueron los acontecimientos? ¿Cuál es el contexto del conflicto? ¿Qué inquietud quiero abordar?
L	Mirar hacia atrás en la acción	Distanciamiento. Identificar creencias y examinar los supuestos y fundamentos la problemática.	¿Cuáles son las razones que originan los hechos? ¿Qué cree sobre la problemática? ¿Qué significa la problemática y cómo la define? ¿Qué puntos de vista tiene?
a	Tomar conciencia de aspectos importantes	Toma de consciencia. Analizar conceptos que definen la problemática.	¿Cómo se define y en qué consiste la problemática? ¿Cómo abordar la problemática desde otros puntos de vista?
C	Crear alternativas para la acción	Decisiones. Evaluar solución la situación. Buscar estrategia.	¿Qué alternativas de acción hay? ¿Cuál es una posible solución a la situación?
T	Comprobar la nueva situación	Probar en una nueva situación (otro ciclo).	¿Cuál es la pregunta que reformula el conflicto inicial?

Para comprender el proceso de reflexión que revelan los FPM, se usa la descripción crítica de la experiencia, haciendo la reconstrucción analítica del proceso formativo en el contexto; se examina la evolución y características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas. Las categorías objeto de análisis son: variables de tarea; componentes de la tarea y funciones de la tarea. Dichas categorías se manifiestan como producto del proceso reflexivo y dan evidencia del conocimiento usado por los FPM al abordar las problemáticas de la práctica docente (Castellanos *et al.*, 2017). Las categorías de análisis se describen en el informe por episodios; las interpretaciones se ilustran con extractos de las producciones de los FPM (marcadas entre comillas).

3. Ciclo reflexivo sobre las tareas para el aprendizaje

El reactivo del ciclo de reflexión lo constituyó la selección y el diseño de tareas para una clase de Álgebra escolar, en coherencia con la problemática abordada en términos del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006). El proceso reflexivo se cubrió acorde a las fases ALaCT (figura 1) a través de ciclos iterativos. A continuación, discutimos los resultados del proceso reflexivo que realiza Juan cuando rediseña e implementa una clase ajustando las tareas escolares para enseñar la factorización y la transformación de expresiones de la forma $(a+b)^2$.

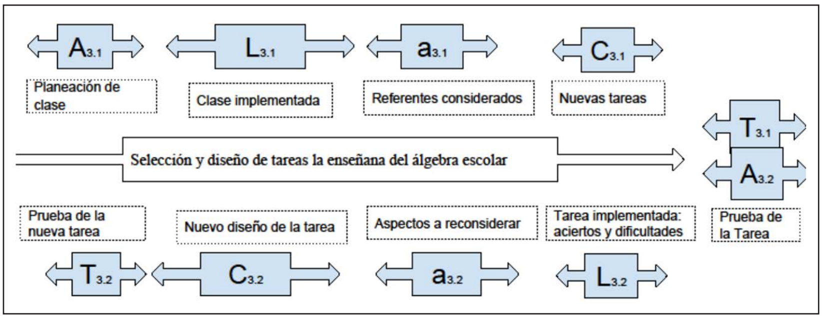


Figura 1. Trayectoria formativa para promover ciclos reflexivos.

En el análisis del ciclo reflexivo interpretamos las situaciones problemáticas que identifican y formulan los FPM a partir de la planeación y puesta en marcha de una clase para el plan de aula. Examinamos los ajustes que las tareas escolares sufren en su diseño; nos centramos a lo largo del ciclo ALaCT en las variables de tarea, funciones y componentes que han sufrido cambio, producto de las acciones reflexivas.

3.1. Fase A: partir de la acción o experiencia

Episodio 1. Juan expone situaciones conflictivas que surgen de su práctica al planear una clase de álgebra (figura 1). Las cuestiones son referidas al diseño de tareas y a su coherencia con el propósito de la instrucción. Juan identifica la problemática y describe dos fenómenos del ámbito didáctico que le inquietan: el sentido estructural que dan los alumnos a las tareas de factorización y las dificultades del aprendizaje:

> ¿Cuál es la situación problema?
>
> Se sienten inhábiles para dar sentido a los conceptos, no reconocen una estructura interna familiar, involucrada en la expresión dada. Me explico: $m^2 + 6m + 9$ tiene la estructura interna de un binomio cuadrado, o sea $(m+3)^2$.
>
> No logran ver cómo (o por qué) trasformar esta expresión.
>
> Mi afán está en la factorización de TCP, el sentido estructural que dan los jóvenes, prepararlos para el desempeño alto y que entiendan lo que hacen y por qué proceden así.

Juan ha identificado como foco de inquietud la factorización de un trinomio cuadrado perfecto (TCP). Para esto, los alumnos deben reconocer la identidad notable involucrada en las expresiones algebraicas de la forma TCP. Juan identificó dificultades de los escolares para «comprender la estructura interna de la expresión dada y reconocer en ella, una estructura familiar».[1] El FPM identifica esta problemática como un hecho que tiene fundamento en el primer descriptor del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006). La primera versión de la tarea que Juan creó para su clase (figura 2) son ejercicios con una formulación instrumental, en contexto puramente matemático, dejando claras las instrucciones y los datos.

Juan esperaba lograr la conexión de conceptos, usando algunas preguntas con las que podría obtener variadas estrategias de solución y su justificación. La tarea, con instrucciones guiadas, pretende llegar a una solución determinada de antemano, que busca «reconocer las relaciones entre los términos de la expresión» y su simplificación, para «ayudar a dar sentido a la estructura (interna) de dichas expresiones». Interpretamos que Juan diseña tareas que consideran las dificultades de aprendizaje de

1. Estructura familiar: referida a los «casos de factorización» o fórmulas que indican cómo, dada la estructura externa específica del polinomio, se establece el procedimiento para expresarlo como producto de dos o más factores. En esta ocasión arrancan de las identidades notables basadas en cuadrados de un binomio.

PRUEBA	◎	TALLER:	◎	LECTURA:	◎	EVALUACIÓN:	◎	GLOBAL:	◎	GUIA TALLER	●
OBJETIVO: Identificar los conocimientos sobre simplificación de fracciones algebraicas.											
RECOMENDACIONES: Lea detenidamente y siga las instrucciones indicadas.											
VALORACION DE LA EVALUACION: VALORACION CADA PUNTO: 2.0 Vo.Bo. Jefe Area:											

1. Observe con atención las siguientes expresiones algebraicas. ¿Qué puede decir de ellas, de su forma?
   - $m^2 + m + m + 1$
   - $a^2 + 3a + 3a + 9$
   - $x^2 + (2)(4x) + 16$
2. Observe el segundo y tercer término de cada expresión ¿Qué puede decir de estos términos? ¿Qué relación guardan con el primer término? ¿Qué relación guardan con el cuarto?
3. Analizar la expresión $x^2 + (2)(4x) + 16$. Observe el tercer termino ¿Qué puede decir? ¿Qué relación guarda con el segundo y con el primero?

Figura 2. Tarea diseñada por Juan en la fase A

los escolares. Se centra en tareas para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización. La tabla 4 sintetiza el análisis de la fase A al problematizar la práctica en términos de la planeación de tareas para la enseñanza de la factorización.

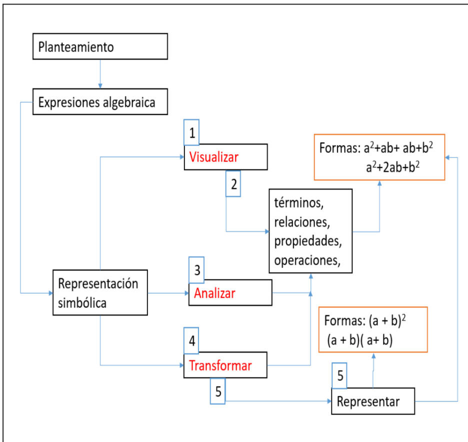
Tabla 4. Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A.

Formulación de la problemática	Análisis de las tareas
Sujetos: jóvenes de 8.º grado (13-14) años. Objeto: factorización de un TCP. Origen: dificultad para reconocer una estructura familiar (identidad notable). Acción: orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización. El déficit del FPM, necesidad de actuación. Cuestión: ¿cómo involucrar a estudiantes en el sentido estructural que conlleva la factorización? Percepción de la solución: existen acciones para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización.	Reconoce dificultades asociadas a tratamiento y reconocimiento de la estructura interna de TCP. Considera las relaciones conceptuales y procedimentales del contenido necesarias en la organización cognitiva de las tareas. Reconoce la simplificación de fracciones algebraicas como un contexto que da sentido a la factorización. Valora las dificultades asociadas a la conexión de procedimientos y relaciones como oportunidad para el diseño de tareas. Explicita las expectativas de aprendizaje involucradas en la tarea.

3.2. Fase L: mirar hacia atrás en la acción

Episodio 2. Juan pone en marcha las tareas planeadas y, posteriormente, reconstruye la clase (figura 1), a fin de explicitar los fundamentos de sus acciones. Analizamos la clase e interpretamos las razones que ofrecen para justificar la problemática.

Juan resalta aspectos examinados en su lección (figura 3); centró su actuación en los errores de los escolares, los cuales involucran el sentido que los escolares dan a la estructura de una expresión algebraica. Las precisiones que Juan logra al explicitar la realidad que ocurre en su lección le permiten, como señala Flores (2007), distanciarse de sus presupuestos iniciales. Mirar hacia atrás en la acción conduce a resaltar la coherencia con los objetivos del aprendizaje, precisando la noción de actividad algebraica (generacional y global) y las variables de tareas (situaciones y complejidad). Juan percibió la visión relacional del cálculo aritmético en la comprensión de las estructuras internas de las expresiones algebraicas; consideró necesario trabajar los TCP más allá de las actividades algebraicas de tipo transformacional (p. ej.: generalizar las expresiones algebraicas interpretando las relaciones que se definen en una expresión aritmética)



Mirar hacia atrás en la acción

- La comprensión de la expresión algebraica» requiere de tareas para «alejar el proceso algorítmico» [1 y 2]
- Visualizar y analizar la estructura (interna y externa) de la expresión algebraica [2 y 3], requiere tareas que consideren la expresión algebraica como un todo. (significado dual del álgebra: objeto-proceso) [4].
- Las tareas que involucran el cálculo aritmético y el uso de estructuras aritméticas pueden conducir a la comprensión semántica del TCP [4y5],

Figura 3. Ruta de la lección examinada por Juan en la fase L.

En síntesis, el FPM reconoce que las tareas deberían plantear un reto al escolar, demandando el uso de conceptos en otros escenarios diferentes a los inicialmente aprendidos (tabla 5). Al igual que Thanheiser *et al.* (2016), al examinar Juan lo que significan las tareas bien diseñadas, reconoce sus propias concepciones y dificultades conceptuales.

Tabla 5. Síntesis de las dimensiones de análisis en la fase L.

***JUAN Nueva Cuestión:* ¿Cómo implicar la estructura interna de expresiones aritméticas en tareas para promover el sentido estructural?**
Reconoce en la teoría los descriptores del sentido estructural para la formulación de las tareas.
Explicita algunas variables de tarea (complejidad, contenido).
Identifica la actividad algebraica implicada en la formulación de tareas.
Reconoce en la simplificación de fracciones algebraicas un contexto que da sentido a la factorización.
Da organización cognitiva a la secuencia de tareas.

3.3. Fase a: conocimiento de puntos importantes o esenciales

Episodio 3. Siguiendo la trayectoria formativa (figura 1), se guía la confrontación entre pares y formadores, con el propósito de analizar los aspectos importantes de las tareas. Juan y sus compañeros de práctica ponen en común hechos relevantes de la lección y confrontaron sus perspectivas para abordar la enseñanza del $(a+b)^2$. La figura 4 resalta los aspectos importantes considerados en la discusión por los FPM para la solución otorgada por los escolares a la tarea.

Para los FPM, es relevante la «relación entre los sistemas de representación, aludiendo a la comprensión de las trasformaciones sintácticas que se definen en $(a\pm b)^2$»; resaltan la pertinencia de las distintas estrategias y las limitaciones de los alumnos en la retroalimentación y formalización conceptual. Los FPM compararon sus posturas y llegaron a acuerdos, resaltando la intención de «abandonar el diseño de tareas con tendencia tradicional» basadas en el «manejo algorítmico de ejercicios». Ellos toman conciencia sobre las tareas de modo funcional, en tanto que recono-

Demanda: Establecer la equivalencia entre los miembros de una estructura familiar del tipo TCP (caso/identidad) **Solución:** Reconocer relaciones aditivas y multiplicativas en una estructura aritmética para demostrar la identidad. **Discusión:** Relevancia al tratamiento aritmético (relaciones que sustentan las operaciones) para establecer las equivalencias entre los miembros de una identidad **Interesante:** Acudir la estructura aritmética para demostrar la igualdad y las relaciones internas del TCP. Otorgar sentido a la estrategia para reconocer una estructura familiar (caso/identidad). Reconocer relaciones internas entre los términos. Contextualizar conceptos que dan sentido al aprendizaje (cuadrado perfecto) **IMPORTANTE:** Usar las relaciones aritméticas (aditivas multiplicativas) para generar (o demostrar) la estructura interna de los TCP y posteriormente, su reconocimiento. Los jóvenes factorizan cuando comprenden que las expresiones algebraicas que cumplen con la estructura del binomio cuadrado son equivalentes antes y después de ser factorizados. Lo esencial, usar las estructuras aritméticas para deducir las identidades notables en la factorización del TCP (factorización).	En la expresión $25 + (2)(3)(b) + b^2$ Escribían que era un TCP. Algunos establecieron la equivalencia $(5+b)^2 = (5+b)\,(5+b)$. Sin ningún raciocinio, pero logran establecer la estructura multiplicativa asociada con dos factores (binomios) En las expresiones: $25+30+9 = (5+3)^2$ $25 + (2)\,(15) + 9 = (5+3)\,(5+3)$ buscaban la equivalencia, pero no expresaban de manera general la relación entre 30 y los otros términos. En algunos casos identificaban los términos que son cuadrados perfectos, sin lograr los factores de 30 en términos de 3 y 5. Pocos comprendían la estructura interna que define los TCP. Muchos, eran hábiles al realizar productos notables, pero no identifican las relaciones entre los términos que lo determinan la expresión $36a^2 + 12ab + b^2$ y, la expresión $(b + 6a)\,(6a + b)$. son equivalentes. Porque: el orden de los términos internos no altera el significado, pero en número si da

Figura 4. Análisis de aspectos importantes de la tarea implementada en fase A.

cen «la importancia de las situaciones problema para abordar el contenido». La tabla 6 muestra un extracto de la síntesis y conexión conceptual de la puesta en común. Los FPM resaltaron tres ámbitos importantes: *a*) el sistema de representación simbólico de $(a\pm b)^2$ y su vinculación con la aritmética; *b*) la fenomenología del $(a\pm b)^2$ y la conexión con la noción de equivalencia, y *c*) la relación de los campos procedimental y conceptual con el sentido estructural.

Tabla 6. Conexiones y síntesis conceptual resultado de la puesta en común.

Síntesis
Incluir las representaciones como meta en la tarea: favorecer la representación del concepto *binomio cuadrado* y la comprensión de las operaciones que se emplean para factorizar el TCP.
Involucrar tareas de autorregulación con expresiones numéricas y buscar la percepción de la estructura de TCP.
Prever la simplificación de fracciones algebraicas y la solución de ecuaciones cuadráticas para dar sentido a la factorización.
Aprovechar estructuras (internas y externas) de expresiones aritméticas para trabajar la noción estructural de equivalencia de las expresiones con el binomio cuadrado usando problemas.

Referentes y aspectos a consultar
Aspectos a profundizar.
Profundizar en tareas que promuevan habilidades para el reconocimiento de la estructura interna de una estructura familiar en su forma simple (identidad notable).
Consultar el sentido estructural, que traten la equivalencia de las identidades notables.
Referentes concretados y elegidos.
Descriptores del sentido estructural explicitados en Vega-Castro (2013).
Características y actividad algebraica (generacional, transformacional, global) (Kieran, 2004).

Producto de la puesta en común, los FPM aprecian aspectos relevantes de los componentes de la tarea para conducir a posibles transformaciones: «la gestión de la enseñanza, la función de los sistemas de representación en el propósito de la tarea y la contextualización de la tarea». Juan y sus compañeros ubicaron como punto de convergencia para afrontar la problemática «la resolución de situaciones contextualizadas».

3.4. Fase C: crear, buscar y preparar alternativas para la acción

Episodio 4. Siguiendo el experimento (figura 1), Juan, de forma consciente, presenta el nuevo diseño de la tarea para afrontar su problemática en una nueva lección.

Rediseña la tarea con el objetivo de «interpretar conceptualmente la factorización del TCP». La meta de la tarea era «reconocer en la estructura interna de los TCP una estructura familiar –identidad notable–». Interpretamos que Juan se inclinó por poner de manifiesto la reversibilidad del producto de dos binomios, mostrando «la factorización de los TCP como proceso que se trata de deshacer la multiplicación».

Juan rediseñó la primera parte de la tarea como una sentencia de ejercicios, basados en el estudio de Vega-Castro (2013), involucrando las estrategias de «verificar equivalencias, completar expresiones conservando la estructura» (figura 5). La alternativa para la nueva lección recurrió, además, al cálculo aritmético para reconocer patrones relacionales y generalizar la estructura de los TCP. Para Juan es pertinente usar expresiones aritméticas con estructuras semejantes a las estructuras algebraicas generales del TCP. Estimó necesario a tal fin, promover procesos reiterativos de relación entre dichas representaciones (simbólica y numérica). El propósito de la tarea es establecer las relaciones aritméticas y multiplicativas entre los términos del *TCP* y *factorizar*, es decir, superar la visión procedimental con los términos extremos. El alumno debe conocer la identidad e identificar cada objeto particular de la estructura con los objetos generales de la regla a usar. Juan precisó que «la expresión aritmética debe ser usada en dos vías: para conducir al análisis estructural y al análisis operatorio». Justificó esta apreciación aludiendo a «los eficientes cálculos usados por jóvenes y los argumentos equivocados aportados al demostrar la equivalencia entre expresiones»

I). Complete la siguiente tabla:

a	b	a+ b	$(a + b)^2$	a^2	$2\cdot a\cdot b$	b^2	$a^2 + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
1	3							
2	4							
0	-2							
-1	2							

Observando los resultados de la tabla verificamos que la expresión algebraica equivalente a **$(a + b)^2$** es

Figura 5. Nueva alternativa para la acción. Parte 1 en fase C.

Según la segunda parte de la tarea (figura 6), Juan considera pertinente usar los recursos tecnológicos; a tal fin valoró el tipo de tarea, dando protagonismo a «las tareas abiertas», que demandan la argumentación y permiten profundizar en los descriptores del sentido estructural para incluirlos en la formulación, con el propósito lograr la «percepción de patrones relacionales (equivalencias) y su generalización en una estructura familiar».

Para Juan la tarea da respuesta al problema del sentido que tiene aprender las transformaciones sintácticas implicadas en las expresiones algebraicas, resaltando, además, las habilidades para percibir las identidades notables y anticipar las transformaciones que son apropiadas y eficientes al factorizar. Para Juan, «se puede dar sentido a la factorización desde la actividad de tipo transformacional en el contexto de las Matemáticas y de otras Ciencias», lo cual requiere de «la comprensión de las estructuras algebraicas y aritméticas».

Deducir la expresión estándar del trinomio (x^2 +bx +c)

Identificar la relación entre los parámetros (a, b y c)

Trata con los parámetros en la extensión polinómica de $(a+b)^2$, asignando diferentes valores para a y b.

Puedes usar la tabla de la parte uno para establecer tus comentarios y argumentaciones

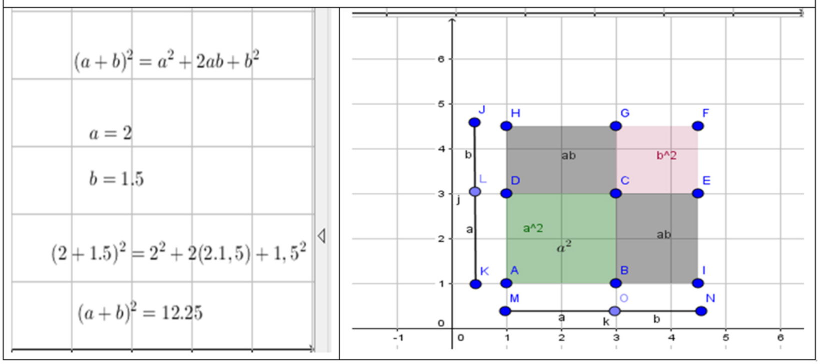


Figura 6. Nueva alternativa para la acción. Parte 2 en fase C.

3.5. Fase T: comprobar en una nueva situación

Episodio 5. Juan se dispone a implementar la tarea creada en la fase anterior. Destacamos la disposición del FPM para implementar una nueva lección y su responsabilidad para motivar a los escolares en el estudio de la factorización.

Juan se inclinó por la concepción del álgebra como «aprendizaje de las estructuras y como aritmética generalizada». Destacamos su disposición para conducir a los escolares en la autorregulación de conocimientos previos, en relación con la generalización de los nuevos. Resaltamos la toma de consciencia sobre la pertinencia de promover la actividad algebraica de meta-nivel (figura 6). Interpretamos la intención del FPM de alejarse del enfoque instrumentalista presente en el plan del aula de su clase, proponiendo el reconocimiento de las similitudes entre objetos y métodos. Juan logró ver que «el problema depende por lo menos parcialmente de las tareas», aclarando que estas, «deben tener propósitos claros, es decir, contribuir al aprendizaje del contenido». Reconoció necesario trascender la reproducción de los algoritmos, conscientemente aboga por la «comprensión de la dualidad objeto-proceso involucrada en definición de expresiones algebraicas» (figura 6, izquierda).

El propósito de la tarea:

- **Percibir** la expresión como unidad (objeto TCP).
- **Reconocer** en la expresión dada; la estructura interna de una expresión familiar más simple (SS_1 y afinando la idea de proceso).
- **Valorar técnicas** para establecer la equivalencia entre las expresiones.
- **Usar eficiente** y correctamente técnicas y operaciones algebraicas al factorizar (SS_3 Sentido estructural).
- **Hallar** generalizaciones a partir de situaciones particulares.
- **Exhibir** el desempeño del sentido estructural.

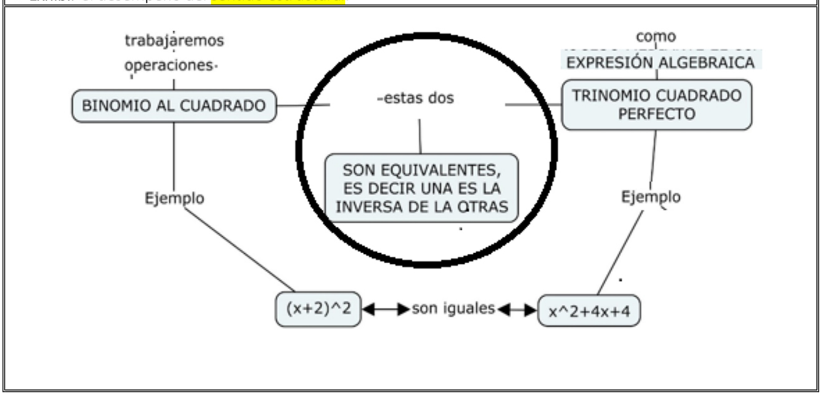


Figura 7. Situación descrita por Juan en el nuevo episodio de clase fase T.

3.6. Síntesis y nuevo ciclo reflexivo

La mirada retrospectiva a las fases del ciclo reflexivo permitió que los FPM valoraran todas las dimensiones y variables de tarea; contemplaran situaciones que puedan ser familiares a los escolares, dando protagonismo a «la solución de problemas». Finalmente, resaltaron la «pertinencia de las representaciones usadas (simbólica y grafica) en la formulación» y consideraron adecuada la demanda cognitiva de la tarea.

Juan y el colectivo de práctica examinaron la tarea puesta en marcha y concluyen con relación a los diferentes aspectos que caracterizan la problemática, tales como las limitaciones del aprendizaje (p. ej.: reconocer la equivalencia entre expresiones algebraicas), la gestión del contenido y la comunicación (p. ej.: dar significado a la variable como número generalizado) y la necesidad de involucrar situaciones para dar sentido al concepto.

Los FPM consideraron importantes «las componentes de la tarea» entre ellas: la formulación de la tarea, el modo de incluir el contenido y el uso de los sistemas de representación, examinaron las tareas para estudiar su coherencia y complejidad; se detuvieron en la contribución de la tarea a las expectativas de aprendizaje

Los FPM identificaron la necesidad de seguir abordando tareas que involucren seleccionar o reconocer procedimientos para transformar eficientemente las expresiones en función de su equivalencia. Para Juan, el estudiante debe comprender el cómo y cuándo usar un contenido; saber para qué y por qué transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes; debe aprender y usar reglas de factorización, pero, sobre todo debe interpretar expresiones en términos del contexto, y debe usarlas para resolver problemas.

4. Conclusiones

El ciclo reflexivo y el diseño iterativo de las tareas matemáticas para la instrucción permiten al FPM entender cómo usar los datos recogidos durante la ejecución y analizarlos después para informar y proponer rediseño de nuevas tareas. Además, favorece la profundización del conocimiento del contenido matemático y otorga sentido a la práctica docente. Coincidiendo con otras investigaciones (Liljedahl *et al.*, 2007), consideramos que al iterar el diseño se aumenta la autenticidad de las tareas. Coincidimos en que, con la recopilación y análisis en cada fase reflexiva se promueve la comprensión de la práctica y el desarrollo profesional de los FPM, así la reflexión favorece el rediseño de tareas.

Los resultados del análisis respecto a las componentes de la tarea revelan que la formulación de la tarea atraviesa por tres grandes momentos a consecuencia de los procesos reflexivos asumidos por el FPM. En el primero, la tarea se formula en contextos matemáticos, sin involucrar situaciones o problemas contextualizados para conducir la comprensión del contenido. El segundo momento, que es posterior a la puesta en común entre pares (fase L), produce nuevas formulaciones, en las que el contenido se aborda a través de situaciones contextualizadas (representadas usando la geometría) y exhibiendo las demandas cognitivas al escolar. El tercer momento se da en la fase a, y en él se aprecia la importancia por formular tareas que involucren los contenidos a partir de la solución de situaciones reales, no solo contextualizadas. Con ello interpretamos que se produce una identificación de que la responsabilidad profesional explícita del FPM, tiene que llevarlo a introducir el contenido de manera funcional (resolución de problemas), sin haber podido constatar fielmente esta intuición.

Otro aspecto de especial importancia en los resultados son las variables de tarea: hemos podido evidenciar que los FPM inicialmente plantearon tareas cerradas y que solo involucraban demandas cognitivas de reproducción. Con el pasar de los procesos reflexivos y la precisión lograda en el análisis cognitivo las adaptaron de manera progresiva a demandas superiores. Los FPM valoran los aportes externos y deciden asumir algunos como referencia. En el caso analizado, los descriptores del sentido estructural interpretados en el estudio de Vega-Castro (2013), fueron asumidos para observar el desempeño de escolares al resolver tareas sobre la factorización, sin considerarlos para planear la enseñanza.

Como hemos podido observar y evidenciar, pese a que los FPM, al iniciar el ciclo reflexivo habían realizado el análisis de contenido, al diseñar las tareas solo se mostraron algunos de los elementos que integran la estructura conceptual del contenido. Hubo que esperar algunas fases del ciclo reflexivo y haber profundizado en los descriptores del sentido estructural, para que se replantearan la necesidad del razonamiento de tipo inductivo (inferir la generalización de estructuras numéricas) y el figurativo (representar superficies cuadradas) en especial, para formular tareas que demandan la comprensión de la estructura interna y externa al factorizar, habilidad considerada fundamental en el desempeño del sentido estructural (Vega-Castro, 2013).

5. Referencias

Blanco-Álvarez, H. y Castellanos, M. (2017). La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. En: Vier Munhoz, A. y Giongo, I. M. (eds.). *Observatório da educação III: práticas pedagógicas na educação básica* (pp. 7-18). Criação Humana.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflections on future mathematics teachers about professional issues related to the teaching of school algebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 408-429.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Reflexión en el prácticum: Un experimento de enseñanza con estudiantes colombianos. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 22*(1), 413-439.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Paidós.

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA, 1*(4), 139-158.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En: Novotná, J. (ed.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 305-312). Faculty of Education, Charles University in Prague.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education.* Lawrence Erlbaum Associates Kieran, Krainer y Shaughnessy [2013].

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The *Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. En: Clements, M. K. (ed.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 361-392). Springer New York.

Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007) Entretejiendo Matemáticas y pedagogía en el diseño de tareas: una historia de una tarea. *J. Math Teacher Educ., 10*, 239-249.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En: Gutierrez, Á., Leder, G. C. y Boero, P. (ed.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Sense.

Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. y Van Rijswijk, M. (2010). Aprender de la práctica. En: Esteve, O., Melief, K. y Alsina, A. (eds.). *Creando mi profesión: una propuesta para el desarrollo del profesorado* (pp. 39-64). Octaedro.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En: Rico, L y Moreno, A. (coord.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-254). Pirámide.

Newmann, F. M., King, M. B. y Carmichael, D. L. (2007). *Authentic instruction and assessment: Common standards for rigor and relevance in teaching academic subjects*. Des Moines, Iowa: Department of Education. Google Scholar.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Graó.

Rico, L. y Moreno, A. (coords.) (2016). *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria*. Pirámide.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de caso*. Morata.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A. *et al.* (2016) Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *J. Math Teacher Educ 19*, 123-14. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9334-7

Vega-Castro, D. C. (2013). *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de pedagogía*, *220*, 44-49.