15

Evaluando la comprensión de la estimación en medida: una propuesta desde el modelo OMIUM

Assessing understanding of estimation in measurement: a proposal from the OMIUM model

Verónica A. Quintanilla y Jesús Gallardo
Universidad de Málaga

Resumen
En este trabajo abordamos la problemática de la evaluación de la estimación en medida desde la perspectiva de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas (OMIUM). El modelo incluye un método cualitativo para evaluar la comprensión de los estudiantes a partir de los distintos usos dados al conocimiento matemático. Lo aplicamos en un estudio empírico con maestros en formación, enfrentados a una tarea cuya resolución requiere estimar la medida de una superficie irregular. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto el empleo amplio y variado, en un mismo episodio, de conocimientos, relaciones y estrategias vinculadas con la estimación. Como conclusión, sugerimos centrar la evaluación en los aspectos positivos de la comprensión de los estudiantes, a través de los usos apropiados y pertinentes que estos hacen del conocimiento matemático.

Palabras clave: comprensión, estimación, evaluación, maestros en formación, medida

Abstract
In this paper we address the problem of assessing estimation in measurement from the perspective of an operative model for interpreting understanding in mathematics (OMIUM). The model includes a qualitative method for assessing students' understanding based on the different uses given to mathematical knowledge. We applied it in an empirical study with pre-service teachers, confronted with a task whose resolution requires estimating the measure of an irregular surface. The results obtained show the wide and varied use, in the

same episode, of knowledge, relations and strategies related to estimation. In conclusion, we suggest focusing the assessment on the positive aspects of understanding, through the appropriate and relevant uses of mathematical knowledge.

Keywords: assessment, estimation, understanding, measurement, pre-service teachers

1. Introducción

Una de las principales dificultades asociadas con la estimación en medida está relacionada con su evaluación en el aula de matemáticas. Hace más de una década, Segovia y Castro (2009) concretaban esta dificultad a través del siguiente interrogante: «¿Cuál es la forma más adecuada de evaluar las producciones de los alumnos en estimación?» (p. 522). Algunos años antes, Frías *et al.* (2001) ya advertían sobre lo inapropiado que resulta utilizar el error cometido al estimar como criterio de evaluación y, como alternativa para evaluar el desempeño de los escolares, proponían explorar otras relaciones cuantitativas entre la medida real de la magnitud y el valor aproximado dado en la estimación. En este trabajo, retomamos esta cuestión para abordarla, de manera complementaria, desde una perspectiva cualitativa. En concreto, presentamos una propuesta de evaluación basada en la caracterización de la comprensión de los estudiantes a partir de los distintos conocimientos, relaciones y estrategias que utilizan cuando realizan estimaciones en actividades de medida.

En los últimos años, venimos trabajando en un modelo operativo (*Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics [OMIUM]*) para abordar en la práctica la complejidad de los procesos interpretativos involucrados en la comprensión en matemáticas (Gallardo *et al.*, 2013; 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016; 2019; Quintanilla y Gallardo, 2021). El modelo incorpora un método específico para observar e interpretar la comprensión a través de los usos del conocimiento matemático. En este trabajo aplicamos dicho método en un estudio empírico con maestros en formación involucrados en la resolución de una actividad de estimación de la medida de una superficie irregular. La evaluación realizada desde esta perspectiva nos permite delimitar lo que los estudiantes comprenden y cómo lo comprenden al estimar, a través de lo que son capaces de hacer con el conocimiento matemático. También identificamos en cada caso posibilidades concretas de mejora para la comprensión de la estimación en medida.

2. Comprensión de la estimación en medida

En términos genéricos, la estimación en medida suele asumirse como la valoración del resultado de una medición sin ayuda de instrumentos (Segovia y Castro, 2009). Su aprendizaje con comprensión está íntimamente vinculado con el desarrollo del sentido de la medida, al poner en juego distintos conocimientos, procesos y propiedades básicas involucradas en la acción de medir, como la identificación de la magnitud y sus características, la selección de unidades, el uso de referentes o la aplicación de estrategias como la comparación o la descomposición/recomposición (Segovia y De Castro, 2013; Moreno *et al.*, 2015).

La importancia de garantizar una enseñanza para la comprensión de la estimación en los distintos niveles educativos suele justificarse por razones prácticas y formativas. Por una parte, la estimación posee un evidente valor práctico para los estudiantes, pues les permite responder con el uso del conocimiento matemático a ciertas necesidades del mundo real. En particular, facilita los procesos de medición en la vida cotidiana mediante la construcción de relaciones entre los objetos del entorno y las distintas unidades de medida (Moreno *et al.*, 2015; Segovia y De Castro, 2013). La estimación también contribuye a la formación de los estudiantes, al tratarse de un proceso que requiere el uso del razonamiento y la comunicación matemática, el dominio en la aplicación de estrategias fundamentales de medida y una capacidad para conectar ámbitos como la geometría y la aritmética.

La evaluación de la comprensión de los escolares al estimar en medida puede enfocarse hacia las maneras insuficientes o incorrectas de utilizar el conocimiento matemático y a la caracterización de los distintos tipos de errores cometidos. La percepción equivocada de la magnitud, el empleo de unidades no adecuadas, la conversión incorrecta de unidades de medida o la ausencia de unidades de medida para expresar el resultado son algunos de los errores frecuentes entre los estudiantes. Sin embargo, esta evaluación, así planteada, puede ampliarse si dirigimos la atención hacia los modos pertinentes de uso de los principales conocimientos matemáticos que intervienen en la estimación en medida. Si adoptamos este punto de vista positivo, trabajos como los de Segovia y Castro (2009) y Segovia y De Castro (2013) nos ayudan a identificar los distintos aspectos relacionados con el propio proceso de estimación, que también pueden ser considerados para la evaluación como indicadores favorables de la comprensión de los estudiantes. Algunos de estos aspectos representativos son los siguientes: *a*) identificar situaciones problemáticas en las que no es posible realizar, o bien no requieren, una medida exacta para su resolución; *b*) reconocer que la estimación es un procedimiento por el que se obtienen valores aproximados; *c*) determinar el orden de magnitud correcto y seleccionar unidades de medida adecuadas; *d*) aceptar y reformular diferentes estrategias de estimación; *e*) valorar posibles resultados y refinar valores aproximados distintos; *f*) decidir cuándo una estimación es aceptable. Además, tal como subrayan estos mismos autores, estos últimos aspectos están vinculados con la precisión al estimar, la cual depende de la propia magnitud y de la forma y posición en la que se presenta el objeto a medir. También depende de quién realiza la estimación, mejorando con la edad y la práctica. En nuestra propuesta de evaluación, tomaremos en consideración estos aspectos reseñados relacionados con la actividad de estimar como referencia para poner en valor lo que los estudiantes comprenden acerca de la estimación en medida, a partir de los distintos usos dados al conocimiento matemático en la resolución de una tarea concreta de estimación.

3. Un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas

En esta sección, exponemos una breve síntesis de las principales bases teórico-metodológicas que configuran nuestro modelo para la interpretación de la comprensión en matemáticas, provenientes de las cuatro dimensiones relacionadas que dicho modelo exhibe en la actualidad (fenómeno-epistemológica, hermenéutica, socioafectiva y ética).

3.1. Bases teóricas

Consideramos que la comprensión del conocimiento matemático demanda unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla. No obstante, la complejidad relativa al funcionamiento cognitivo aconseja adoptar un enfoque funcional en el estudio de la comprensión. En lugar de aclarar su naturaleza interna, nos parece más operativo destinar esfuerzos a explorar las condiciones que posibilitan la comprensión, a través de los requerimientos impuestos por la resolución de las situaciones problemáticas vinculadas a los distintos conocimientos matemáticos puestos en uso.

En el OMIUM apostamos por esta funcionalidad al reconocer que la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento como medio de resolución. En este sentido, los estudiantes manifiestan una cierta comprensión en relación con un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo que deciden voluntariamente abordar, elaboran y emiten a su satisfacción respuestas adaptadas donde hacen un uso significativo (libre, consciente e intencional) de este conocimiento. Esto conlleva analizar la situación, interpretar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta donde tiene cabida el empleo del conocimiento matemático en cuestión, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de esta a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Así pues, concebimos la comprensión en matemáticas como una actividad intelectual que capacita al individuo para elaborar respuestas observables, adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización registrable e interpretable del conocimiento matemático. El aprendizaje surge como consecuencia de esta comprensión, ligada a la funcionalidad del conocimiento matemático. Por ello, afirmamos que un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en aquellas situaciones en las que tenga sentido y contribuya como medio de resolución (Gallardo *et al.*, 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016).

Esta visión funcional de la comprensión incorpora un punto de vista particular sobre el propio conocimiento matemático. Por una parte, los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo y son los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del individuo. Por otra parte, las situaciones matemáticas demandan la identificación de aquellos conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear en ellas, en alguna de sus formas posibles, como medio de resolución, así como la decisión sobre cuál conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente. La consideración conjunta de ambos aspectos nos permite percibir una relación de conocimientos matemáticos y situaciones asociadas, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento-conocimiento) y fenomenológicos (conocimiento-situación) (Gallardo *et al.*, 2013, 2014).

3.2. Bases metodológicas

El OMIUM incluye un método cíclico para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, denominado *círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas* (Gallardo y Quintanilla, 2019; Quintanilla y Gallardo, 2021), constituido por cuatro planos por los que el intérprete/evaluador debe transitar. En el *plano cognitivo*, ubicamos a la comprensión matemática, como actividad intelectual del estudiante que le capacita para elaborar respuestas que involucran el uso de conocimientos matemáticos específicos. En el *plano semiótico* registramos en diferentes sistemas de representación las diversas evidencias observables de la actividad matemática realizada por el alumno. La capacidad para elaborar respuestas que involucran el uso de conocimientos matemáticos específicos se muestra a través de distintos registros externos que son los depositarios de los rastros genuinos de comprensión del estudiante. La identificación de dichos rastros por parte del intérprete se lleva a cabo en este primer plano. A continuación, la interpretación prosigue en el *plano fenómeno-epistemológico*, centrada en la caracterización de los usos del conocimiento matemático identificados en los registros previos y puestos en juego por el estudiante durante la experiencia matemática. Aquí buscamos referencias externas centradas en el actuar, más allá del registro observable literal. Para ello, nos servimos de análisis fenómeno-epistemológicos del propio conocimiento matemático objeto de comprensión o de la situación problemática planteada. Finalmente, en el *plano dialógico* el estudiante recupera su papel protagónico involucrándose de manera directa y real junto con el intérprete en los procesos interpretativos de su propia comprensión matemática. Este, por su parte, comparte sus hallazgos con aquel, en términos de discrepancias, posibles obstáculos o incongruencias identificadas en los planos interpretativos previos. La interpretación requiere ahora la elaboración de nuevas narrativas personales por parte del alumno. Este plano ofrece un entorno común propicio para el discurso, la discusión crítica y el intercambio necesario con el que buscamos alcanzar en última instancia el consentimiento con el otro (Gallardo y Quintanilla, 2016, 2019).

4. Metodología

En la práctica, contrastamos la idoneidad de nuestro modelo interpretativo realizando un estudio empírico cualitativo donde aplicamos el círculo hermenéutico en el ámbito de la medida con maestros en formación.

4.1. Muestra y contexto de aula

En la investigación participaron 20 estudiantes voluntarios de cuarto curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Málaga, que cursaban la asignatura Didáctica de la Medida durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2017-2018. Estos participantes organizados en parejas configuran la muestra del estudio empírico realizado. Es la propia investigadora principal de la investigación la que ejerció de profesora de la asignatura. Los alumnos de la muestra participaron en las diferentes actividades planteadas en su aula ordinaria, en el horario habitual de clase y con el resto de los compañeros del grupo. El estudio transcurrió a lo largo de nueve semanas, entre los meses de marzo y mayo de 2018, durante las dos horas semanales de práctica de la asignatura.

4.2. Tarea matemática

Se plantearon a las parejas cinco tareas del ámbito de la medida en forma de práctica de aula. La selección se efectuó tomando cada tarea representativa de las distintas fases por las que transita el proceso de fundamentación matemática de la medida de magnitudes, según la propuesta de González y Gómez (2011) adoptada en la asignatura. En esencia, este proceso requiere identificación de magnitudes, conservación y comparación de cantidades de magnitud, elección de unidades de medida, cuantificación y uso de instrumentos de medida, y aritmetización. Son tareas no equivalentes cuya resolución conjunta nos permite caracterizar la comprensión de la medida que poseen los maestros en formación. En este trabajo, ilustramos la aplicación de nuestra propuesta interpretativa en el estudio empírico realizado a partir de los registros generados por tres parejas diferentes al resolver una de las tareas empleadas, centrada en la estimación de medida de superficie (figura 1).

¿Cuánto mide la superficie de la mano?

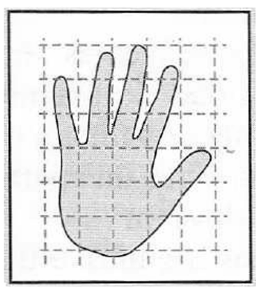

Figura 1. Tarea de estimación de medida de una superficie irregular (González y Gómez, 2011, p. 370).

La resolución de la tarea permite el uso de procesos básicos de medida. Una opción podría ser considerar la cuadrícula como intermediario, identificar el cuadrado como unidad de medida, iterar dicha unidad para pavimentar la superficie de la mano y relacionar el número de unidades empleadas en la medida con el área total de la superficie. También cabe la posibilidad de emplear estrategias que conjugan la comparación con procesos de descomposición/recomposición de la mano en partes que se asemejen a polígonos regulares (p. ej.: cuadrados o rectángulos). En todo caso, el resultado del proceso de medición será una aproximación, teniendo en cuenta las líneas curvas que delimitan la forma irregular de la figura.

4.3. Fases e instrumentos

La interpretación de la comprensión de cada pareja de maestros se desarrolla en dos fases consecutivas en las que empleamos diferentes instrumentos de recogida de datos.

- Fase 1: resolución conjunta de tareas. Cada pareja resuelve las distintas tareas planteadas de manera colaborativa, procurando buscar estrategias, procedimientos y resultados comunes. En esta fase, caracterizamos los usos dados a los conocimientos matemáticos desplegados durante la resolución de las tareas (planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo hermenéutico). También identificamos información relevante sobre el desempeño matemático del alumno obtenida de modo aún insuficiente, posibles obstáculos o incoherencias o posibilidades inesperadas de resolución. Toda la actividad matemática desarrollada se graba en audio y vídeo. El registro observable generado se compone de producciones escritas y diálogo transcrito.
- Fase 2: búsqueda del consentimiento con el otro. Se lleva a cabo de forma individual una entrevista conversacional en la que se solicita a cada estudiante una narrativa verbal sobre los conocimientos matemáticos empleados durante la resolución de las tareas. La investigadora, por su parte, comparte sus hallazgos a partir de los resultados obtenidos en la fase anterior y presenta una interpretación de la actividad matemática del alumno con el propósito de alcanzar el consentimiento con él en lo relativo a los usos dados a los conocimientos matemáticos (plano dialógico). Cada entrevista realizada se graba en audio y su transcripción genera el segundo de los registros escritos empleados en la obtención de datos.

4.4. Análisis e interpretación de datos

En los planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo buscamos identificar rastros de la comprensión matemática desplegada por los participantes y, con base en ellos, describir los usos dados a los diferentes conocimientos matemáticos puestos en juego. Para esta labor, utilizamos como referencia el análisis fenómeno-epistemológico previo aplicado sobre la tarea, donde explicitamos los conocimientos, relaciones y estrategias fundamentales que pueden intervenir en su resolución (tabla 1). Lo hacemos tomando en consideración la información específica sobre comprensión de la estimación en medida reseñada en los antecedentes descritos en el trabajo. En el plano dialógico del círculo, por su parte, contrastamos la actividad matemática de los protagonistas durante el episodio, establecemos sus relaciones con los usos dados al conocimiento matemático y estructuramos las conclusiones sobre su comprensión en torno a la estimación.

Tabla 1. Análisis fenómeno-epistemológico de la tarea de estimación.

Conocimientos matemáticos	Atributos medibles, magnitud superficie, orden de magnitud, área como cantidad de superficie, unidad de superficie (cuadrado), submúltiplos de la unidad, referente (figura geométrica), valor aproximado, precisión.
Relaciones	Medida y geometría, medida y aritmética, área y superficie, superficie de distintas figuras geométricas básicas (equivalencia), líneas rectas y curvas, distintas unidades de medida, unidad y figura, unidad y referentes (presentes y ausentes), valor numérico de la medida y unidad utilizada.
Estrategias	Comparar superficies, seleccionar unidades de medida, iterar unidades, pavimentar superficies con una unidad, descomponer/recomponer, modificar la figura, utilizar referentes, emplear fórmulas, cuantificar, acotar el resultado entre valores, aproximar, valorar la idoneidad del resultado, compensar y refinar la medida obtenida, reformular y considerar otras estrategias de estimación.

5. Resultados

Las parejas de maestros en formación se enfrentaron de manera conjunta a la resolución de la tarea de estimación de la superficie de la mano. En cada episodio, los registros obtenidos nos proporcionaron distintas evidencias sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, a partir de los cuales caracterizamos la comprensión de los estudiantes.

5.1. Sobre la comprensión de E1 y E2

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

La estrategia de medida de esta pareja se basa en comparar la cantidad a estimar con un referente ausente aproximadamente igual. En este caso, los alumnos buscan circunscribir la mano en un pentágono (sobreestimación), cuya área les parece más fácil calcular y, de este modo, aportar al menos un valor aproximado de la medida exacta de la superficie (figura 2).

Al inicio de la resolución, E1 sugiere a su compañero utilizar la simetría que ella percibe al observar y trazar líneas imaginarias sobre la superficie de su propia mano. E2, mientras tanto, reconoce que pavimentar la superficie tomando como unidad de medida el cuadrado de la cuadrícula no resulta una estrategia efectiva para aplicar en la mano, argumentando que, debido a su contorno curvo e irregular, no podrá completar trozos de la figura con el cuadrado.

E1: Podemos decir que la mano tiene una simetría [observa su mano].

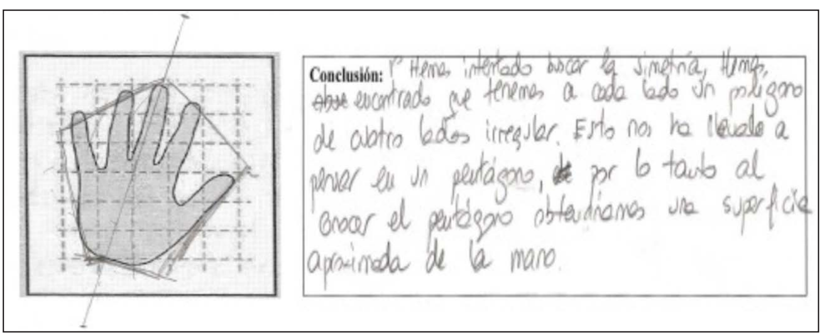

Figura 2. Registro escrito de E1 y E2.

E2: Tenemos nuestros cuadraditos, pero al ser irregular ya no es como antes. Aquí, es que no podemos hacer eso. Aunque tú digas, meto un pedazo aquí, ya nos está quedando un cachito vacío.

E1 pretende generar, a partir de su simetría (equivocada), polígonos de área aproximada a la de la superficie de la mano. Aunque E2 duda sobre cuánto puede ayudar realmente esta estrategia en la búsqueda de una solución, finalmente expresa su acuerdo con su compañera sobre la pertinencia de aplicarla. Convenida la elección del pentágono como referente, ambos estudiantes reconocen que solo podrán obtener una aproximación del valor exacto de la medida de la superficie.

E1: Creo que podríamos ejecutar simetría.
E2: Pero estamos en las mismas. Haces una simetría y ahora cómo calculamos esto [risas]. ¡Es que es irregular!
E1: Una vez que hemos hecho la simetría, podríamos hacer... a lo mejor... un polígono de cuatro lados irregular.
E2: Tenemos un pentágono. Ahora, que sea un pentágono regular, no. Regular creo que no es, ni en broma, vamos. Sabemos que el resultado que nos da no es exacto, ya que hay partes que se encuentran dentro del polígono que no tienen...
E1: Que no está rellenada la mano.
E2: Y, por lo tanto, lo que tenemos es una aproximación. Yo creo que una... exactitud no se puede obtener. Creo.

Finalmente, acuerdan estimar la medida de la superficie de la mano a través de un procedimiento indirecto, aunque no llegan a desarrollar en la práctica el cálculo del área de los cuadriláteros irregulares trazados ni del pentágono asociado (p. ej.: mediante el uso de fórmulas conocidas) y tampoco proporcionan una solución numérica a la tarea.

E1: Esa es la conclusión final a la que hemos llegado. Una vez que hemos buscado la simetría, hemos visto que ya teníamos un polígono de cuatro lados irregular, a cada lado. Esto nos ha llevado a ver que podíamos observar un pentágono...
E2: Y ya obtendríamos una superficie aproximada de la mano, por lo tanto, al conocer el pentágono.

En la tabla 2 resumimos los principales resultados obtenidos sobre la comprensión de la estimación por parte de E1 y E2 tras el recorrido por los planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo.

Tabla 2. Interpretación de la comprensión de E1 y E2

Conocimientos matemáticos	Superficie, unidad de superficie, cuadrilátero, pentágono.
Relaciones	Medida y geometría, unidad y referente, figuras geométricas básicas.
Estrategias	Comparar con referentes ausentes aproximados, medir de forma indirecta, uso de analogías, descomponer, reformular la estimación.

Plano dialógico

En la fase de búsqueda de consentimiento con E1 y E2, obtenemos confirmación sobre la pertinencia de utilizar la estrategia de pavimentar la figura a partir de la cuadrícula base. Inicialmente, los contornos curvos de la mano disuadieron a E1 de considerar la estrategia de recubrir la figura descomponiendo/recomponiendo con el cuadrado unidad. No obstante, en esta segunda fase ambos reconocen esta opción como forma válida de obtener un valor aproximado de la medida exacta de la superficie, aunque, por su complejidad, no la llevan a la práctica.

I: [Tras sugerirle pavimentar la superficie de la mano usando la cuadrícula y tomando el cuadrado como unidad] ¿Crees que esta estrategia pudo haber funcionado?

E1: Sí, pero en aproximación. Porque no rellenamos el cuadrado entero. Este medio y medio, podemos hacerlo así y hubiéramos puesto tantos cuadrados. Dándole a cada cuadrado el valor de uno.

E2: Sí. Metiéndolo en una cuadrícula, sí. Claro, este metido en la cuadrícula, contando los cuadraditos... sí. Podría tener la medida. Porque es verdad que aquí sería aproximadamente medio triángulo, aquí... ¡ufff! Claro, es que también hay partes que no tenemos ni uno ni medio. No tengo ni medio ni uno...

En relación con la aproximación, la pareja otorga validez a las respuestas aproximadas al estimar la medida de superficies irregulares. Reconocen que la posible medida resultante no es exacta, pero sí adecuada. Aun así, al no proporcionar una solución concreta al problema, no sienten la necesidad de valorar la idoneidad de la precisión en la estimación realizada ni comprobar la coherencia del resultado obtenido.

E1: No se podían dar medidas exactas, porque una mano es irregular. Entonces, aquí tenemos que trabajar con la aproximación.
I: Si das una respuesta aproximada, ¿es correcta?
E2: Claro. Al medir puede dar una aproximación de lo que mide el área de la mano. Se da la aproximación y puedes despreciar algo.

5.2. Sobre la comprensión de E3 y E4

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

Esta pareja utiliza como estrategia principal la comparación de la cantidad a estimar con un referente presente aproximadamente igual. Encierran la mano en un rectángulo inicial, que trazan usando la cuadrícula base, y calculan su área de manera indirecta mediante la correspondiente fórmula. Repiten el proceso con un segundo rectángulo, buscando mayor precisión en la estimación (figura 3).

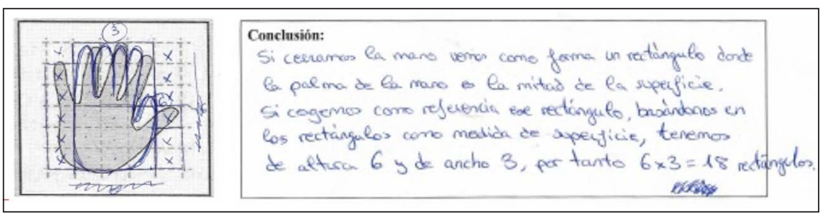

Figura 3. Registro escrito de E3 y E4.

El contorno irregular de la mano motivó que E3 y E4 descartaran de inicio la estrategia de medición directa por descomposición/recomposición de la figura y pavimentación con el cuadrado unidad, que ya habían utilizado con éxito en la resolución de tareas previas. Como alternativa, las estudiantes inician la resolución trazando un rectángulo de dimensiones 5 × 6 y tomando el cuadrado de la cuadrícula como unidad de superficie. Calculan su área de manera exacta mediante la fórmula conocida (base × altura). Al mismo tiempo, cuentan y marcan los cuadrados que consideran vacíos y restan su área del valor total obtenido para el rectángulo.

E3: Mira: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. 30 menos 6, 24. A ver, estas de aquí eran cinco, ¿no? Y esto de aquí es 6, ¿no? Entonces, sí. Es 6, ya está [cuadrados sin parte de la mano].
E4: 5 por 6 serían 30 cuadraditos [rectángulo que contiene la mano] y si le quitamos este, este y este, porque es como que le sobra mucho, pues serían 30 menos 6, 24.

Tras esta primera aproximación, E3 y E4 centran la atención en la cuestión de la precisión de la estimación realizada. Reconocen que la medida no puede ser exacta y discuten sobre la pertinencia del valor obtenido como aproximación de la superficie a partir de la cuadrícula.

E3: Pero nosotras estamos cogiendo como referencia los rectángulos, cuando podemos coger otros, ¿no?
E4: ¿Qué vas a coger? ¿Triángulos? Es que como está la cuadrícula, vamos a usar la cuadrícula.
E3: ¿Tiene que ser exacto?
E4: No lo puedes saber exacto. Más o menos a ojo, puedes tomar como referencia los cuadrados, pero no puedes saber con... Tú coges tu mano y no puedes calcular...
E3: Sí, pero es que, al ser redondo, no van a encajar.
E4: 24 cuadraditos.

A pesar del convencimiento de E4, las dudas planteadas por E3 sobre lo realizado hasta ahora abre nuevas posibilidades en la resolución de la tarea. Al percibir que el movimiento de la mano es una transformación que deja invariante a la superficie, proponen un nuevo rectángulo como referente para circunscribir la mano, ahora cerrada, de una manera más ajustada. El cálculo del área de este segundo rectángulo, también a través de la fórmula y con el cuadrado como unidad, genera otra medida aproximada, aunque más precisa, de la superficie de la mano.

E3: Es que no me convence, soy muy cabezona. Es que si tú coges estos dedos, si los cierras, si tú coges y la cierras [la mano], esto mide lo mismo que esto. Sería... 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Serían 6 cuadrados metiendo dos dedos en cada fila, ¿no? Ahora mismo, aquí serían 6 cuadraditos.

E4: Mira, yo voy a hacer el rectángulo entero, ¿vale? Sería este rectángulo entero lo que ocuparía la mano cerrada completamente con el dedo pulgar. El dedo pulgar, cuando tú lo cierras, se subiría aquí. O sea, si pongo la mano recta, entonces entraría dentro de esto, con la mano cerrada y el pulgar, de manera que el pulgar esté pegado al índice y el dedo meñique estaría dentro del rectángulo.

E3: Pues este rectángulo.

E4: Sería la superficie.

E3: Sería: 1, 2, 3 [base] y 1, 2, 3, 4, 5 y 6 [altura]. 3 por 6, 18.

En la tabla 3 exponemos las principales evidencias de comprensión manifestadas por E3 y E4 durante la resolución de la tarea.

Tabla 3. Interpretación de la comprensión de E3 y E4.

Conocimientos matemáticos	Magnitud superficie, área como cantidad de superficie, unidad de medida de superficie, comparación de unidades, figuras geométricas básicas (cuadrado y rectángulo), fórmula del área del rectángulo, precisión.
Relaciones	Área y superficie, figuras geométricas básicas, unidad y referente, transformaciones invariantes de la medida.
Estrategias	Comparar con referentes presentes, elegir la unidad, modificar la figura, aproximar, emplear fórmulas, cuantificar, refinar la medida.

Plano dialógico

En esta ocasión, buscamos el consentimiento con E3 y E4 en lo relativo a su opción de plantear un nuevo proceso de medición para alcanzar mayor precisión en la estimación. También dialogamos sobre la razón por la que buscan esta precisión, que parece estar relacionada con una creencia escolar sobre la necesidad de proporcionar respuestas exactas. En sus explicaciones, encontramos indicios de una falta de reconocimiento de la aproximación como valor legítimo de medida.

E3: No estaba de acuerdo con E4, porque ella me decía de quitar los cuadraditos estos que son los que sobran. Pero es que aquí también lo cubre un poquito. Yo me miraba mi mano y miraba el papel. En un momento, dije: ¡anda! La superficie no va a cambiar y me imaginé un rectángulo, quitando, cortando.

E4: Cuando ella dijo: si cerramos la mano, todo este espacio desaparecería. Yo dije: vale, llevas razón [risas]. Ya lo pensamos así y lo reducimos. Por eso, creo que pusimos 24 cuadrados y al final se quedó en 18. Y lo que es el total, pienso que sería más exacto dentro de lo inexacto que es eso [risas].

I: ¿Es una medida aproximada?

E4: Sí. Totalmente aproximada.

I: ¿Eso es bueno o malo?

E4: Por lo general, siempre que nos han preguntado de pequeñas, tienes que decir la respuesta que es, a menos que te digan «aproxima». Entonces, cuando te preguntan algo, tienes que decir la verdad absoluta. Porque si aproximas, es como que pierde credibilidad lo que estás diciendo.

5.3. Sobre la comprensión de E5 y E6

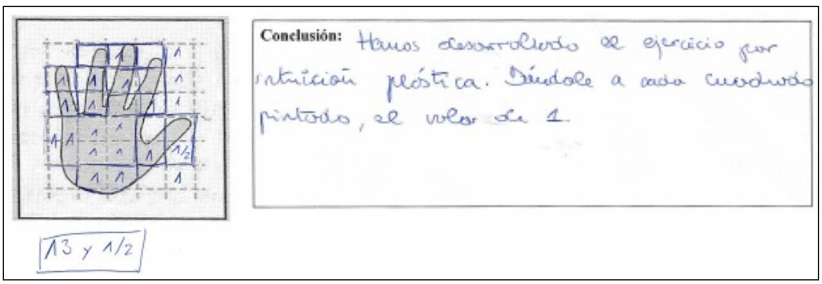

Figura 4. Registro escrito de E5 y E6.

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

Esta pareja estima la superficie empleando como estrategia principal la descomposición/recomposición de la figura en partes diferentes. En concreto, los estudiantes recubren la mano completando cuadrados a ojo, que usan como unidad de superficie, y proporcionan como resultado aproximado el número total de cuadrados completados (figura 5).

Como primera aproximación a la resolución de la tarea, E5 plantea restar al área del cuadrado total que delimita la figura, el de la superficie exterior de la mano, constituida por cuadrados sin partes de mano (estrategia de comparación con referentes presentes). Sin embargo, de inmediato desvían la atención hacia la estrategia sugerida por E6 de completar la figura con el cuadrado unidad, componiendo/recomponiendo partes diferentes de la figura (dedos, palma...).

E5: Creo que tiene que ver algo con contar también el área de fuera y luego la restamos con la de dentro, algo así. O sea, la superficie de fuera. O sea, cuál es el total y cuánto ocupa cada parte. Es un poco complicado, porque aquí tenemos esto...
E6: Ya... Aquí, si te pones a buscar alguno que sea parecido, por ejemplo, este hueco de aquí, ¿no? Intentar buscar algún trozo que entre aquí. Que, por ejemplo, podría ser este, fácilmente. Este dedo sí entra aquí. Más o menos, aproximadamente, ¿sabes?

A partir de aquí, E5 y E6 van trazando cuadrados y rectángulos (uniendo cuadrados) sobre la cuadrícula base, en horizontal y vertical. Etiquetan con 1 las partes conjuntas que perciben como cuadrados completos. Esta labor la llevan a cabo visualmente, de manera imprecisa y siempre aproximada (lo que ellos denominan «por intuición plástica»).

E5: Ya por ahí hay algo... Por ejemplo, mira toda esta parte, de aquí a aquí, en teoría, tiene que ser la misma. Estos dos cuadrados tienen que ser exactamente iguales.
E6: O sea, que serían la mitad y sería un cuadrado completo.
E5: Claro. Mira, esta parte de la mano. Esto es uno. O sea, son dos.
E6: Vale, sí. Porque aquí también le falta un trocito.
E5: Claro. Más o menos por ahí se puede sacar eso.
E6: Mira, el dedo, por ejemplo. Este cuadrado lo puedes llenar con este trocito.
E5: Sí. Porque también aquí le falta un poco. Y aquí otro poco. Por eso sería un cuadrado solo.

E5 y E6 concluyen la resolución asignando 1/2 al área del extremo del pulgar y sumando todos los cuadrados completos que logran etiquetar. Obtienen como medida final 13,5 cuadrados unidad.

E5: Mira, por ejemplo, con estos tres dedos de arriba. Lo que serían las yemas de los tres dedos de arriba. Los tres cuadrados, ¿ves? Se podría rellenar un cuadrado entero.

E6: Sí.

E5: Falta la yema del dedo gordo, esa es la que puede ser medio cuadrado.

E6: Puede ser medio. Entonces, en total tendríamos uno... Sí, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, doce, trece. Trece y medio. Es que otra forma...

En la tabla 4 caracterizamos la comprensión de E5 y E6 por los principales usos dados a los conocimientos matemáticos, relaciones y estrategias durante la resolución.

Tabla 4. Interpretación de la comprensión de E5 y E6.

Conocimientos matemáticos	Superficie, orden de magnitud, unidad de superficie, submúltiplos de la unidad, área, valor aproximado.
Relaciones	Área y superficie, figuras geométricas básicas, unidad y figura, valor numérico de la medida y unidad utilizada.
Estrategias	Aproximar, descomponer/recomponer la figura en partes diferentes, comparar superficies, cuantificar, sumar partes, reformular la estimación.

Plano dialógico

En este caso, la búsqueda de consentimiento gira en torno a la estrategia de estimación empleada por E5 y E6, así como a la principal dificultad encontrada en la tarea. Confirman su opción de descomponer/recomponer la figura con el uso del cuadrado unidad y ya no vuelven a mencionar la primera alternativa descartada al inicio de la resolución. La forma irregular de la mano los lleva a aplicar su proceso de manera aproximada y, aunque perciben defectos al completar la unidad, no se preocupan por explorar posibles reajustes o refinamientos que mejoren la precisión del valor logrado en la medida de la superficie.

I: Utilizaste la estrategia de elegir una unidad y contar cuántas caben en la superficie, ¿no?

E6: Sí, básicamente. Estos cuatro de aquí estaban completos. Ahora, si juntábamos estos dos, como nos sobraba aquí un cachito, lo podíamos poner aquí y aquí y ya teníamos otros dos cuadrados. Después, aquí y aquí, teníamos que había medio y medio, pues uno. Con eso, al fin del mundo íbamos nosotros.

E5: Al ser una mano, no cubre espacios de los cuadrados que a lo mejor son distintos. Entonces, a la hora de darle valor 1 a un cuadrado para rellenar un cuadrado, si te fijas en el dedo gordo, es muy complicado rellenar ese espacio. ¿Con qué lo rellenas? Nosotros decíamos: pues con ese y este con este. Así, más o menos, se saca uno. Y luego, intentar sacar la mayoría de 1 posibles para llegar al final, que era lo que te pedía: la superficie. Sí, completando a la unidad.

6. Discusión y conclusión

El estudio realizado nos ha aportado diversas evidencias favorables de la comprensión que poseen tres parejas de maestros en formación sobre la estimación en medida, a través de los distintos usos dados a conocimientos matemáticos, relaciones y estrategias de resolución a lo largo del episodio descrito. En concreto, E1 y E2 identifican la superficie como magnitud, deciden utilizar la estimación cuando reconocen que no es posible hacer una medida exacta, descomponen la figura en partes que se asemejan a polígonos de áreas conocidas (cuadriláteros y pentágono), plantean, pese a que no efectúan, el cálculo del área de estos referentes, reconocen sin desarrollar otras posibles estrategias de medida y asumen el resultado de la medición como una aproximación, pero sin valorar su precisión. Por su parte, E3 y E4 muestran tener comprensión sobre conceptos involucrados en la medida de magnitudes, como los de *superficie*, *unidad de medida*, *área del rectángulo* o *valor aproximado*, entre otros. Al estimar, también ponen en juego distintas relaciones y procesos básicos, como la comparación con figuras geométricas básicas, la elección de una unidad de medida pertinente, invariantes de la medida de superficie, el cálculo de áreas con fórmulas simples o la diferencia entre medida exacta y aproximada. Finalmente, E5 y E6 también evidencian comprensión sobre distintos aspectos vinculados con la estimación en medida, como el reconocimiento de la magnitud superficie, la elección y uso de una unidad coherente con la medida a realizar, la aplicación de una estrategia específica usual en la medición de superficies curvas o el aporte de un resultado concreto, al menos aproximado, del valor final de la medida.

Conscientes de la dificultad que supone alcanzar objetividad en la evaluación y de las limitaciones que conlleva valorar la estimación con base en el error, desde la perspectiva del modelo OMIUM proponemos, como alternativa, extender la consideración del desempeño matemático de los escolares y orientar los esfuerzos hacia la búsqueda de interpretaciones más justas, que reconozcan lo que el estudiante comprende a través de lo que es capaz de hacer con el conocimiento matemático. Sugerimos evaluar la comprensión de los estudiantes en términos de los usos pertinentes dados a los diferentes conocimientos y procesos involucrados en la estimación en medida. En los trabajos de Segovia y Castro (2009) y Segovia y De Castro (2013) hemos encontrado una referencia útil para identificar y caracterizar tales usos, que dependen de las particularidades de las situaciones de medida abordadas. En la riqueza y complejidad relativa a la estimación en medida que detallan estos trabajos, también encontramos razones para legitimar el desarrollo de propuestas de evaluación como la nuestra, centrada en los aspectos positivos de la comprensión en matemáticas.

7. Referencias

Frías, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 477-502). Síntesis.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 625-648. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(1), 97-122. https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, *25*(2), 5-32.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 319-336. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158

González, M. J., Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En: Segovia, I. y Rico, L. (coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 351-373). Pirámide.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (2021). Contribución del círculo hermenéutico de la comprensión al desarrollo de una interpretación ética en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *35*(69), 289-313. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(7), 499-536. http://dx.doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1359

Segovia, I. y De Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En: Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-49). Comares.