18

La enseñanza de la función logarítmica como inversa de la función exponencial: un estudio de caso

The teaching of the logarithmic function as the inverse of the exponential function: A case analysis

Jeannette Vargas Hernández[1] y María Teresa González Astudillo[2]
[1]Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Bogotá, Colombia
[2]Universidad de Salamanca

Resumen
En este documento se presenta cómo un profesor, a través de su práctica, modela la función logarítmica como inversa de la función exponencial. El análisis de la práctica del profesor se realiza desde una perspectiva sociocultural y la teoría APOE mostrando que el mecanismo de reversión se modela con otros mecanismos de construcción, como la interiorización, la desencapsulación y la coordinación. Para ello se utilizan diferentes registros como el simbólico o el gráfico y se realiza tanto de una forma global, con la función genérica $y = a^x$, como local, con funciones particulares como $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$. Los métodos utilizados para realizar la inversión también son variados: deshacer, cambiar las variables y despejar, componer una función y su inversa o realizar la simétrica de la gráfica de la función.

Palabras clave: función logarítmica, APOE, función inversa, práctica del profesor, mecanismos de construcción

Abstract
In this document we present how a teacher, during his practice, model the logarithmic function as inverse of the exponential function. The analysis of the teacher practice is done from a sociocultural perspective and APOS theory showing that the reverse mechanism is modelized joint with other mechanisms such as the interiorization, the desencapsulation and the coordination. For this, other forms of representations were considered such as the symbolic or the graphical ones and this is done with the generic function $y = a^x$, and

other functions as $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$. The processes used for the inversion varied: undoing, swapping the variables x and y and solving for y, composing the function with its inverse to get the identity or to flipping the graph of the function in the line $y = x$.

Keywords: logarithmic function, APOS, inverse function, teacher practice, construction mechanism

1. Introducción

En general, en la enseñanza se plantea la función logarítmica como inversa de la función exponencial. Esto implica, por un lado, que el estudiante debe haber adquirido una comprensión adecuada de la función exponencial y, por otro, que domina la construcción de funciones inversas, lo que, en principio no resulta sencillo, como señalan algunas investigaciones (Breen *et al.*, 2015). Pettersson *et al.* (2013) han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la noción de función como pares ordenados en lugar de como una regla, lo que es esencial para comprender el proceso de inversión. Carlson *et al.* (2010) consideran que los estudiantes que no son capaces de concebir una función como un proceso (sino que tiene una concepción acción) tienen grandes dificultades para invertir funciones. Además, cometen errores al determinar cuál es la función inversa de otra, puesto que no utilizan las propiedades de la función inversa, como la condición de que la función a invertir sea inyectiva y se limitan a realizar ciertos cálculos para obtener la respuesta (Even, 1992). En general, la función inversa se enseña de una forma algorítmica, rutinaria, memorística y carente de sentido (Wilson *et al.*, 2011).

Carlson y Oehrtman (2005) han categorizado tres métodos diferentes para obtener una función inversa de otra: una algebraica (intercambiar x e y, y despejar y), una geométrica (la reflexión sobre la recta $y = x$) y una procesual en el sentido de deshacer. Además, Vidakovic (1996) menciona el cálculo de la inversa de una función partiendo de dicha función y buscando el proceso que compuesto con ella dé la función identidad.

En cuanto al primer método, Wilson, *et al.* (2011) consideran que el intercambio entre las variables es confuso para los estudiantes y puede conducir a una ausencia de significado de la función inversa, dado que no se tiene en cuenta que el dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y viceversa. Esto, además, es de vital importancia cuando las unidades en las que se miden la variable dependiente y la independiente son diferentes. Por otro lado, este intercambio implica el cambio de significado entre las variables (Carlson y Oehrtman, 2005; Philips, 2015) y cuestiones relativas a la notación, como que $f^{-1}(x)$ es la inversa de $f(x)$ no ayudan a adquirir una comprensión adecuada de este concepto.

En cuanto a la aproximación geométrica, Attorps *et al.* (2013), en un estudio sobre el uso de GeoGebra para la enseñanza de la función inversa, mostraron que los estudiantes lograron una concepción intuitiva, pero no llegaron a comprender en su totalidad por qué se debe realizar una reflexión en torno a la recta x = y. Sin embargo, aquellos estudiantes que logran una comprensión de la función inversa enfatizan en la condición de que debe ser una función uno a uno (Bayazit y Gray, 2004).

En cuanto al último método Bayacit y Gray (2004), basando sus estudios en la teoría APOE, determinaron que los estudiantes conocen la función inversa como una acción (Cottrill *et al.*, 1996) si invierten el proceso de una función paso a paso y lo conocen como un proceso (Breidenbach *et al.*, 1992) si utilizan la función inversa en situaciones que no involucran sustituir en una fórmula. Como conclusión, se estableció que los estudiantes deben realizar tareas no solo procedimentales, sino aquellas que estén más centradas en el aspecto conceptual de la función inversa para que lleguen a adquirir dicho concepto.

Para comprender el proceso de construcción de la función inversa, Vidakovic (1996) presentó una descomposición genética considerando que los estudiantes deben adquirir de forma jerárquica los esquemas de función, composición de funciones y, finalmente, función inversa y señalando que los estudiantes han adquirido el concepto si son capaces de coordinar estos tres esquemas. Aun así, Brown y Reynolds (2007) y Kimani y Masingila (2006) han probado que los estudiantes son capaces de determinar la expresión analítica de la función inversa, pero no usan la noción de composición de funciones, ni son capaces de relacionar los resultados con la composición de funciones.

Todas las investigaciones anteriores se centran en los aspectos cognitivos relativos al aprendizaje de la función inversa. Sin embargo, se han realizado pocas investigaciones sobre la enseñanza, más concretamente de la función logarítmica como inversa de la exponencial. En este capítulo se presenta una investigación cuyo objetivo es establecer cómo el profesor modela la enseñanza de la función logarítmica a la luz de la herramienta analítica modelación de mecanismos de construcción desde una perspectiva sociocultural y la teoría APOE, identificando si, en las clases, la modelación potencia el mecanismo de reversión desde la función exponencial para la construcción de la función logaritmo.

2. Marco teórico

Esta investigación recurre al constructo «modelación de un mecanismo de construcción» (García *et al.*, 2012) como una herramienta para examinar la práctica del profesor a través de las tareas que propone y el uso de los instrumentos de la práctica tales como los registros de representación y los elementos matemáticos de un concepto.

Este constructo lleva implícito una postura frente a la construcción del conocimiento matemático enmarcada en la teoría APOE (Dubinsky, 1991), según la cual, para comprender un concepto de matemática avanzada, los estudiantes construyen estructuras mentales denominadas: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. Dichas estructuras están ligadas a la noción de abstracción reflexiva de Piaget y vienen determinadas por mecanismos mentales como la interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, reversión y tematización.

En la teoría APOE, se parte de la idea de que la comprensión matemática de un concepto se inicia con la manipulación de un objeto físico o mental para formar acciones, de manera que la repetición de esas manipulaciones permita que sean interiorizadas para formar procesos, los cuales pueden ser encapsulados para formar objetos. Se pueden coordinar dos o más procesos, lo que faculta para construir un nuevo proceso o un objeto, o bien, construir procesos nuevos a partir de procesos existentes mediante el mecanismo de reversión. Cuando un estudiante es capaz de revertir los pasos de una transformación matemática se produce un progreso significativo en su conocimiento matemático (Dubinsky, 1996). Los objetos pueden ser *desencapsulados* revirtiendo el proceso por el cual fueron formados. Finalmente, acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas (Dubinsky y McDonald, 2001).

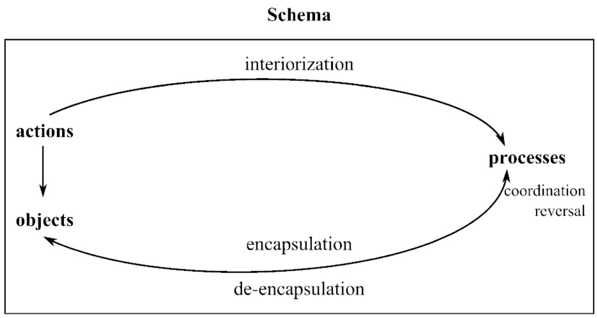

Figura 1. Proceso de construcción de un concepto. Fuente: Arnon *et al.* (2014, p. 18).

Por otro lado, la modelación de un mecanismo de construcción parte de que la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de una perspectiva sociocultural y se reconoce que la práctica docente es una actividad mediada por el uso de ciertos «instrumentos» (Llinares, 2000) y, por lo tanto, permiten caracterizarla. Esta perspectiva asume que:

> [...] los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática. (Llinares, 2000, p. 115)

De ahí que la justificación del uso de los instrumentos en esa práctica se interpreta a la luz de una perspectiva cognitiva (Vargas, 2017).

Sin embargo, es necesario tener presente que el análisis que se realiza mediante este constructo se refiere a la construcción de un conocimiento mediante la interacción entre un profesor y los estudiantes, siendo la clase un colectivo y no refiriéndose en ningún caso a un estudiante concreto.

3. Metodología

Esta investigación tiene una aproximación interpretativa, ya que pretende establecer, sin juzgar, el significado que subyace a las acciones realizadas por un profesor (tareas, usos de los elementos matemáticos del concepto y sistemas de representación) y sus justificaciones. Para ello, se realizó un estudio de caso, de una práctica ordinaria, con un profesor de una universidad de Bogotá (Colombia), Felipe (pseudónimo), que impartía una asignatura de Precálculo,[1] común a todos los estudiantes de primer semestre universitario en diversos pregrados.[2]

La enseñanza de la función logarítmica se realizó con posterioridad a la de la función exponencial y como función inversa de esta última. Se llevó a cabo en dos sesiones de clase de noventa minutos de duración cada una. Durante las sesiones de clase el profesor planteaba algunos ejercicios o ejemplos a los estudiantes a modo de tareas para resolver juntamente con ellos, de forma que guiaran las explicaciones teóricas necesarias para comprender el concepto.

Para la recogida de datos, se utilizaron tres instrumentos: una entrevista inicial al profesor, las videograbaciones de cada una de las sesiones de clase y entrevistas posteriores a cada sesión de aula al profesor. La entrevista inicial consistió en una entrevista estructurada sobre sus datos biográficos y su formación académica. En cada una de las entrevistas posteriores a cada clase, se revisaba la grabación de dicha sesión y se discutía con el docente acerca de sus propósitos, las modificaciones realizadas respecto de la planificación inicial y se contrastaba con el análisis realizado por el investigador. Se contó, además, con la planificación del profesor de cada una de las sesiones. Todas las grabaciones fueron transcritas y junto con el resto de los datos pasaron a formar parte de una unidad hermenéutica creada con el *software* ATLAS.ti (Vargas, 2017).

El análisis se realizó en tres etapas. Inicialmente se identificaron los segmentos de las clases en los que se modelaba el mecanismo de reversión. En una segunda etapa, para cada uno de esos segmentos, se identificaron los registros de representación utilizados y otros conceptos matemáticos usados por el profesor durante la enseñanza y se contrastó con las respuestas del profesor en las entrevistas.

1. La asignatura de Precálculo en Colombia se identifica con aquellos cursos previos al estudio del Análisis Matemático.

2. La denominación Pregrado corresponde a licenciatura o grado en la estructura de la educación europea.

En la tercera etapa, se fueron identificando otros mecanismos de construcción (aparte de la reversión) que el docente modelaba para que sus estudiantes construyeran el concepto de *función logarítmica* como función inversa de la función exponencial.

Los segmentos de clase están determinados, además, en función de varios parámetros que permiten establecer dónde se inicia un segmento y dónde termina: identificación de la tarea a realizar, registro de representación utilizado, conceptos matemáticos asociados y otros mecanismos de construcción involucrados.

Este análisis se realizó mediante la triangulación de todos los datos recogidos: vídeo y audio de clase, entrevistas con el docente, planificación del docente y triangulación de investigadores que trabajaron a partir de la misma unidad hermenéutica segmentando cada clase individualmente, asignando mecanismos y discutiendo las coincidencias acerca de la modelación que los investigadores extraen de las tareas e intenciones aportadas por el profesor.

Finalmente, se realizó el informe de las observaciones, análisis e inferencias sobre el conjunto de datos mediante viñetas (Vargas, 2017). Este recurso permitió organizar la información y poder entrelazar, en un mismo documento, las evidencias y el análisis de datos sobre la modelación del mecanismo de reversión identificado en la práctica y, de esta forma, la viñeta se usa para establecer y mostrar la modelación del mecanismo de inversión en la práctica del docente.

Se entiende en esta investigación por práctica ordinaria, aquella en donde el investigador no interviene ni en la preparación ni en el manejo las clases (Hersant y Perrin-Glorian, 2005).

4. Resultados

El análisis de dos de las sesiones de clase grabadas se corresponde a la introducción que realiza el profesor de la función logarítmica como inversa de la función exponencial, que ya se ha trabajado previamente con los estudiantes. El mecanismo de reversión se modela en estas dos sesiones juntamente con otros mecanismos como la interiorización, la coordinación o la encapsulación. Por ello, la descripción de los resultados se ha dividido en tres viñetas que se corresponden con los mecanismos identificados.

En los diálogos escogidos para mostrar la modelación del mecanismo de reversión se ha utilizado la P para identificar al profesor, una E para un estudiante y la I para el investigador en las entrevistas.

4.1. Viñeta 1: el logaritmo como operación mediante el mecanismo de interiorización de acciones

En esta viñeta, el profesor parte de una situación relativa al interés compuesto que es lo que se ha trabajado anteriormente con los estudiantes para construir el concepto de *función exponencial*. Por medio de diversas acciones con la operación exponencial y, variando la base de la potencia, el profesor modela el mecanismo de interiorización de acciones en procesos.

La tarea inicial que se plantea a los alumnos es: «¿En cuánto tiempo se tiene un capital de $2.300.000, cuando se invierten $2.000.000 a una tasa de interés del 2 por ciento anuales compuestos?».

El profesor procede a guiar a los estudiantes con varias preguntas con el objetivo de escribir la ecuación a la que conduce el enunciado de la tarea. La colaboración de todos los alumnos hace que lleguen a la ecuación:

$$2.300.000 = 2.000.000\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12t}$$

Como el profesor considera la ecuación anterior muy elaborada, empieza con una ecuación más sencilla: $2^x = 8$.

P: Entonces escribamos una parecida [va escribiendo en el tablero 2 elevado a *x* igual 8]. ¿En qué se parece a la anterior, Juan Camilo?
E: Que está elevada a una potencia.
P: ¿Y qué más?
E: Que el número que no se sabe está en el exponente.
...
P: Entonces, fíjense... que cuando a mí me preguntan por el exponente... ¿qué cosa es, Camilo? ¿Tú te acuerdas del colegio?
E. Logaritmo.

El profesor plantea preguntas para caracterizar la ecuación y potenciar la interiorización de acciones. Primero se centra en la identificación de la posición en la cual se encuentra la incógnita y la interpretación del logaritmo de un número como el valor del exponente en una potencia, es decir, está ligado a la operación inversa.

A continuación, se cambia de base y, en lugar de utilizar la base 2, utiliza la base 10. El profesor modela con los alumnos el mecanismo de reversión para diversas potencias enteras de 10.

P: Logaritmo en base 10 de 10000. Vamos pensando, no lo digan todavía... ¿Carlos?
E: Cuatro.
P: Cuatro. Ustedes qué dicen.
E: Sí.
P: Lo comprobamos. Diez por diez, cien, por diez, mil, por diez, diez mil. Era cuatro [lo escribe en el tablero].
...
P: Ahora pensemos en valores que no son potencias de diez. Por ejemplo, logaritmo de 45. Si uno fuera buscar el logaritmo de 45 y empieza a mirar diez, entonces uno dice 10 por 10 es cien. Se pasó, entonces uno dice debe ser un número que está entre...
E: Uno y dos.

En esta viñeta se puede comprobar cómo el profesor utiliza la operación de la exponencial variando la base (2 y 10) para modelar la interiorización de acciones y construir la operación logaritmo. Esto no se hace exclusivamente con exponentes enteros, sino que aprovecha la tabla de los logaritmos de la unidad seguida de ceros para establecer la escala logarítmica y poder determinar la parte entera del logaritmo decimal de un número que no es una potencia de 10.

4.2. Viñeta 2: la función logarítmica como desencapsulación del objeto función exponencial

Al tratamiento del logaritmo como operación le sigue la construcción de la función logarítmica. Sin embargo, en el desarrollo de estas tareas, el profesor retorna en varias oportunidades a la operación logaritmo. El centro de atención recae en algunos puntos de la representación gráfica de la función exponencial, con lo cual está favoreciendo la desencapsulación de esta función.

En este contexto se plantea una nueva tarea que consiste en *calcular el logaritmo natural de un número decimal: 0,1.* Para ello, el profesor recurre a la función exponencial $y = 10^x$ y pregunta por la forma de la gráfica de dicha función, por lo cual está favoreciendo la desencapsulación del objeto función exponencial (en su representación gráfica) en un proceso de asignación de valores.

E: Logaritmo en base 10 de 0,1.
P: Veamos. Si yo tengo 10 elevado a la cero da uno y diez a la uno da 10. El número no está entre 1 y 10. Ese está entre el cero y el uno... ¿Se acuerdan cuál era la gráfica de la función *y* igual a 10 elevado a la *x*? Recordemos la gráfica.

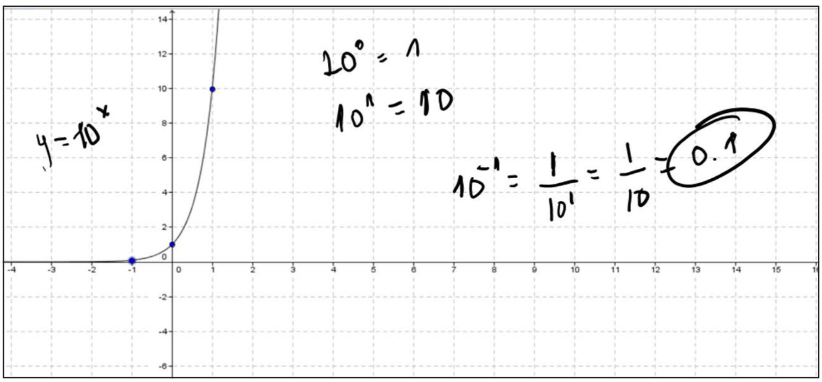

Figura 2. Imagen de la gráfica de $y = 10^x$ en el tablero.

P: Entonces ¿cómo ir bajando el exponente? Estos números ¿cómo son? [señala en el eje valores negativos]. Por ejemplo, este es ¿cuál?
E: Menos 1.
P: Menos 1. Y ¿cuánto es el 10 a la menos 1?
E: Un décimo. Cero coma uno.
P: Si yo le pregunto, dígame diez elevado a qué número me da cero como uno, usted ¿qué número me diría?
E: Menos 1.

Continúa de la misma forma para otros valores decimales como 0,01 para llegar a la conclusión de que $log_{10}10^x = x$.

En esta segunda viñeta se modela el mecanismo de reversión a partir de la representación gráfica de la función $y = 10^x$, desencapsulando el objeto función exponencial en un proceso para determinar el logaritmo de números decimales, encontrando que el resultado es un número negativo. Es importante resaltar la insistencia que el profesor muestra en cuanto a que la función debe ser uno a uno (Bayazit y Gray, 2004) lo que se modela mediante la coordinación de los procesos función exponencial y función cuadrática con la que se compara.

P: ¿Qué quiere decir que se una función uno a uno, Nicolás?
E: Que cuando trazamos líneas.
P: Que cuando la cortamos con líneas horizontales la intersecta en un solo punto.
E: Que para cada valor de x le corresponde solo uno en y.
P: Ustedes ¿qué opinan de lo que dice Carlos? ¿Será suficiente con lo que él dice? Por ejemplo, esta función. [Escribe en el tablero f de x igual a x al cuadrado, y realiza la gráfica.]

4.3. Viñeta 3: el objeto función logarítmica coordinando la inversión de diversas funciones

Para propiciar la construcción del objeto función inversa general, el profesor procede primero con tareas de construcción de varios procesos de funciones inversas particulares: una función cuadrática, una lineal y una exponencial. Para ello utiliza diferentes métodos tanto en el registro gráfico como en el simbólico y lo ejemplifica para funciones conocidas como *funciones lineales* o *cuadráticas*, para luego coordinar estos procesos con la función exponencial. Eso se realiza como un proceso y recurriendo a la representación gráfica de dicha función. Toma un valor particular, potenciando que los estudiantes trabajen con dicho caso y luego generalicen a la función.

En este momento, como la función exponencial particular es una función uno a uno, se propicia la encapsulación de su función inversa, la función logarítmica, mediante el intercambio de variables.

P: Entonces, la pregunta es ¿cuál es la inversa de la función dos a la x? Vamos a seguir el camino de intercambiar la x y la y, y luego tengo que despejar la y.

E: x igual a dos a la y.
P: Y ahora voy a despejar la y, pero la y ¿dónde está?
E: En el exponente.
P: Si la voy a despejar, ¿cómo la tengo que despejar? Con...
E: Con un logaritmo.
P: Con un logaritmo, ¿cómo me queda?
E: y igual a logaritmo en base dos de x.

Se cambia al registro gráfico, para lo cual se modela la desencapsulación en un proceso tomando algunos puntos de la gráfica de la función exponencial, realizando la inversión punto a punto de forma geométrica.

P: Vamos a hacer la gráfica de la función. ¿Qué hay que hacer para elaborar la gráfica de la función logaritmo en base dos de x?
E: Poner el espejo.

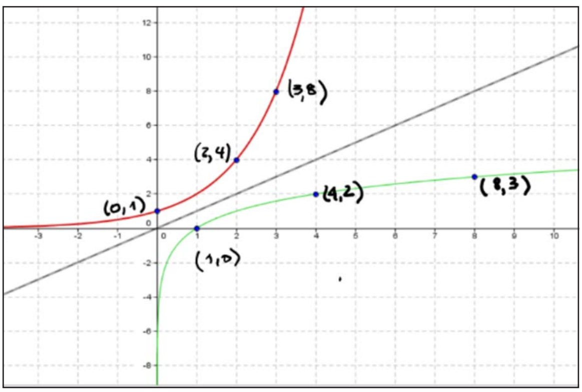

Figura 3. Construcción de la gráfica de la función logaritmo en base dos como inversa de la función $y = 2^x$.

P: El espejo va por aquí, a 45 grados, y entonces vamos a ver en dónde están los reflejos. Por ejemplo, este punto ¿qué coordenadas tiene?
E: (0,1).
P: Las parejas se intercambian. Si está en (0,1), en la inversa está en (1,0). Otra pareja, por ejemplo (2,4), quiere decir que la x vale dos, dos a la dos, la y vale 4. De manera que en la gráfica de la inversa a aparecer...

La tarea de realizar la gráfica punto a punto requiere del proceso de inversión de las coordenadas de cada pareja ordenada (Pettersson *et al.*, 2013) y estas acciones se pueden potenciar para ser interiorizadas como un proceso.

Finalmente, se utiliza la función compuesta entre las dos funciones inversas para examinar que el resultado es la función identidad.

P: Si usted, por ejemplo, toma 3. Ponga a trabajar primero la exponencial y eleve dos a la tres. Esto le da un número. Y si después dice que va a buscar el logaritmo en base dos de ese número, ¿cuánto le da eso?

E: Tres.

En esta última viñeta se observa cómo se construye el objeto función logarítmica como inversa de la función exponencial, realizando la inversión de diferentes formas: por un lado, a través de la gráfica simétrica respecto a la recta $y = x$ de la función exponencial (y en el caso de la función lineal invirtiendo la pendiente de la recta); por otro, intercambiando la x y la y en la expresión analítica de la función exponencial y despejando la y. Finalmente, recordando que la composición de una función y su inversa constituye la función identidad. Todo ello utilizando diferentes registros de representación y coordinando diferentes procesos correspondientes a las funciones lineal, cuadrática y exponencial.

5. Discusión y conclusiones

El análisis de la práctica de un profesor cuando enseña la función logarítmica como inversa de la función exponencial nos ha permitido organizar la modelación del mecanismo de reversión en tres viñetas, a partir de tres tareas en las que se modelan tres mecanismos de construcción de la función logarítmica.

Vidakovic (1997), cuando propone una descomposición genética de la función inversa, considera que los estudiantes alcanzan una comprensión de este concepto cuando integran los esquemas de función, función compuesta y, finalmente, la función inversa. En la práctica que se describe en este capítulo se han identificado aquellos momentos en los que el profesor recurre a estos tres esquemas. Utiliza diferentes funciones (lineal, cuadrática, exponencial), propone la composición de una función y su inversa para obtener la función identidad, y modela el mecanismo de reversión de procesos y objetos para construir la función logarítmica.

En las tareas seleccionadas por el profesor con las que se busca potenciar la comprensión de la función inversa se recurre a diferentes métodos: el método de deshacer (Even, 1992), que la composición de una función y su inversa sea la identidad, en la acción de intercambiar variables (Vidakovic, 1996) y cuando se trabaja en el registro gráfico y se hace una simetría de la gráfica de la función exponencial respecto de la recta $y = x$ (Carlson y Oehrtman, 2005). Métodos que, de acuerdo con los investigadores citados, presentan algunas dificultades atendiendo a las exigencias cognitivas que requieren para lograr la comprensión por parte de los estudiantes.

En este caso, el análisis ha mostrado que el mecanismo de reversión no se modela de forma aislada, interviniendo, por lo tanto, una gran exigencia de construcciones mentales, dado que se combina con otros mecanismos. Así, se combina con la interiorización de acciones no solo sobre la operación exponencial, sino también con acciones sobre la exponencial como función. También se combina con la desencapsulación de la función exponencial como objeto para convertirla en un proceso cognitivo y con la coordinación de otros procesos relativos a funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, se ha comprobado cómo el mecanismo de reversión del objeto función exponencial ($y = a^x$) se lleva a cabo a través de la inversión de funciones exponenciales particulares ($y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$) (Vargas *et al.*, 2020). Esto se hace modelando la interiorización de acciones y considerando el logaritmo, por un lado, como operación y, por otro, como función. Además, se han considerado registros no solo simbólicos, sino también gráficos.

La descripción de las viñetas puede ser útil tanto en la formación de futuros profesores como para mejorar la propia práctica (González y Portugal, 2018; Vargas, 2017). Es esencial la transferencia de los resultados de este tipo de investigaciones sobre la práctica, dado que, la formación y el conocimiento del profesor se nutre tanto de la investigación como de la propia experiencia del docente, de forma que las investigaciones más recientes sobre el conocimiento del profesor se centran en dicha práctica (Llinares, 2013).

El análisis de esta práctica, contrastado con los antecedentes que se presentan en esta investigación ha llevado a los autores a continuar las indagaciones en orden a establecer una propuesta para la formación de profesores y aportar en la deconstrucción del concepto *logaritmo* y la *función logarítmica*, en este caso, a partir de «modelos básicos» enunciados por Weber (2016, 2017) y proponiendo el uso de las publicaciones especializadas en este campo.

6. Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Attorps, I., Björk, K., Radic, M. y Viirman, O. (2013). Teaching inverse functions at tertiary level. En: Ubuz, B., Haser, Ç. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2533). Middle East Technical University y ERME.

Bayacit, I. y Gray, E. (2004) Understanding inverse functions: The relationship between teaching practice and student learning. En: Honies, M. J. y Fuglestad, A. B. (eds.). *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 103-110). PME.

Breen, S., Larson, N., O'Shea, A. y Pettersson, K. (2015). Students' concept images of inverse functions. En: Krainer, K. y Vondrová, N. (eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2228-2234). ERME.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Brown, C. A. y Reynolds, B. (2007). Delineating four conceptions of function: A case of composition and inverse. En: Lamberg, E. y Wiest, L. R. (eds.). *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 190-193). University of Nevada.

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). *Research Sampler, 9. Key aspects of knowing and learning the concept of function*. Mathematical Association of America.

Carlson, M., Oehrtman, M. y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Understanding, 28*(2), 113-145.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal for Mathematical Behaviour, 15*(2), 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-23). Kluwer Academic.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. En: Holton, D. (ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Kluwer Academic.

Even, R. (1992) The inverse function: Prospective teachers' use of «undoing». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(4), 557-562.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 219-235.

González, M. T. y Portugal, R. (2018) La práctica docente del profesor: la enseñanza de fracciones en un aula de primaria a través de situaciones-problema. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 177-200. https://doi.org/10.6018/j/349961

Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 113-151.

Kimani, P. M. y Masingila, J. O. (2006). Calculus students' perceptions of the relationship among the concepts of function transformation, function composition, and function inverse. En: Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M. y Méndez, A. (eds.). *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology or Mathematics Education* (vol. 2, pp. 68-70). Universidad Pedagógica Nacional.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En: Da Ponte, J. P. y Sarrazina, L. (eds.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia Lisboa. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). SEM-SPCE.

Llinares, S. (2013) Professional noticing: A component of mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus, 1*(3), 76-93.

Pettersson, K., Stadler, E. y Tambour, T. (2013). Transformation of students' discourse on the threshold concept of function. En: Ubuz, B., Haser, Ç. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2406-2415). Middle East Technical University and ERME.

Philips, N. (2015). Domain, Co-domain and causation: A study of Britney's conception of function. En: Fukawa-Connelly, T., Infante, N., Keene, K. y Zandieh, M. (eds.). *Proceedings of the 18th annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 803-895). SIGMAA on RUME

Vargas, J. (2017). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Vargas, J., Vargas, N. y González, M. T. (2020). Una modelación de mecanismos de construcción y las propiedades los logaritmos. En: Quintana, M. (ed.). *Diario de Campo. Resultados del desarrollo de métodos y técnicas de investigación*, 10 (pp. 252-276). Sello Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vidakovic, D. (1996) Learning the concept of inverse function. *Journal for Computers in Mathematics and Science Teaching, 15*(3), 295-318.

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. En: Dubinsky, E., Mathews, D. y Reynolds, B. E. (eds.). *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics* (vol. 44, 175-196). The Mathematical Association of America.

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible - operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(supl. 1), 69-98.

Weber, C. (2017). Graphing logarithmic functions: Multiple interpretations of logarithms as a basis for understanding. En: Douley, T. y Gueudet, G. (eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10* (pp. 537-544). DCU Institute of Education y ERME.

Wilson, F., Adamson, S., Cox, T. y O'Brian, A. (2011) Inverse functions: What our teachers didn't tell us. *Mathematics Teacher, 104*(7), 500-507.