

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>
@uedUniandes

1

SIGNIFICADO GLOBAL DE LA INTEGRAL ARTICULANDO SU COMPLEJIDAD EPISTÉMICA

Autores: Enrique Mateus-Nieves, Wilfaver Hernández Montañez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Fecha: Nov 1 de 2022

2

Presentación

- Investigación desarrollada dentro de la línea Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y Análisis matemático
- Se analizó un proceso de instrucción que desarrollaron tres profesores que enseñan Cálculo Integral a nivel universitario
- Objetivo: analizar la relación entre el significado global de referencia del objeto integral planteado en el currículo, los libros de texto programados en la bibliografía y los significados declarados por los profesores, con el ánimo de determinar si existe algún tipo de articulación y en caso de haberla, cómo se establece.
- Teóricamente se utilizaron algunas herramientas que provee el Enfoque Onto semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).
- Metodología: trabajo de corte cualitativo, basado en un estudio de caso, enfocado en un contexto educativo universitario particular.
- Resultados: La articulación de la complejidad epistémica de un objeto matemático, permite al estudiante el desarrollo de habilidades y competencias propias del PMA, dado que "la progresiva matematización, implica la necesidad de *abstraer, definir, analizar y formalizar*" (Mateus-Nieves, 2020a, p. 64) .

Se resalta la importancia de lograr una articulación de sentidos desde la reconstrucción y análisis de las tres configuraciones epistémicas globales propuestas en Mateus-Nieves & Font (2021) para la integral y que conforman el significado global de referencia pretendido en el currículo de esta asignatura, contrastado con el trabajo declarado por los profesores.

Se mantiene privilegio del paradigma formal-mecanicista.

3

Antecedentes

- Se buscó conocer la complejidad epistémica de la integral como objeto matemático.
- Se consideraron avances en literatura en Educación Matemática que establecen una reconstrucción histórico-epistemológica del objeto matemático integral clasificadas como fuentes: terciarias, secundarias y primarias, (ver bibliografía).
- Dicho significado ha de entenderse desde la aplicación de la triada de configuraciones epistémicas: *puntual, intermedia y global* ejecutadas desde el proceso de instrucción (Mateus-Nieves, 2016, p. 40).
- En Mateus-Nieves & Font (2021) se expone el significado global para la integral desde la emergencia de tres configuraciones epistémicas globales.
- La idea de articularlas durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje, es con el ánimo, que el profesor dé una progresiva importancia al desarrollo de los procesos fundamentales de la actividad matemática, propios del pensamiento matemático avanzado (PMA).

4

Marco teórico

Para analizar la actividad matemática o un texto matemático es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos (Font, Godino y Gallardo, 2013):

- 1 Notaciones, representaciones (lenguaje),
 - 2 Situaciones problema,
 - 3 Definiciones,
 - 4 Procedimientos, técnicas.
 - 5 Proposiciones, propiedades, teoremas,
 - 6 Argumentos.
- *Configuraciones epistémicas (Global, Intermedia, Puntual)*
 - *Dualidad unitaria-sistémica*
 - *Criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica de enseñanza*

5

Metodología

Centrada en un estudio de caso, de tipo descriptivo, que analiza el trabajo de tres profesores (P1, P2, P3), que enseñan cálculo integral a tres grupos de estudiantes universitarios cada uno de una facultad diferente.



Categorías de análisis:

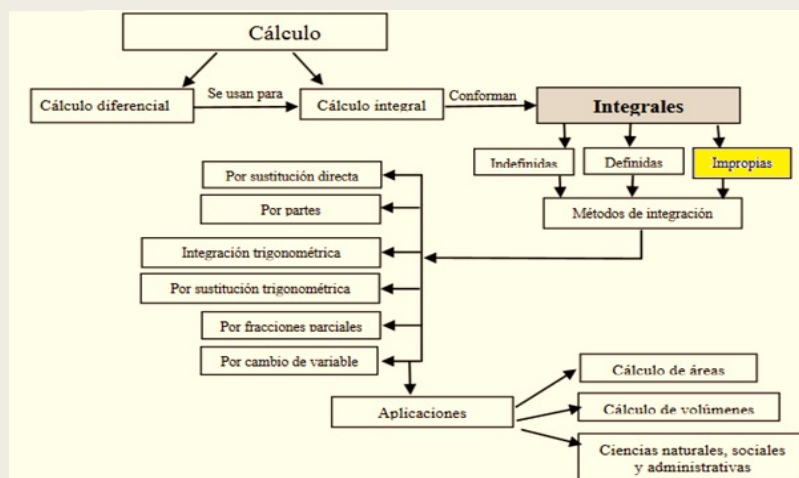
1. Relaciones entre la integral como objeto matemático,
2. La función integral como objeto a enseñar y
3. La función integral como objeto enseñado

6

Significado global de referencia detectado en la malla curricular			Significado declarado en los libros de texto	
- Saberes teóricos y prácticos vistos desde dos ambientes: disciplinar y pedagógico-didáctico. (Teorías, procesos, métodos, problemas). - Articula áreas de conocimiento propias de las disciplinas propias de cada facultad.			Libro 1, (uso exclusivo en Ing.). Presenta formalmente: Antiderivadas, usando definiciones, teoremas y demostraciones. Propone ejercicios y problemas de carácter intra y extra-matemático. Establece integrales indefinidas como antiderivadas. Integrales definidas como un límite de una suma de Riemann y el teorema fundamental del cálculo. Incorpora técnicas para integrar. Muestra aplicaciones de la integración desde: área entre curvas, volúmenes, trabajo, valor promedio de una función, longitudes de arco, área de una superficie de revolución, desde aplicaciones a la física y la ingeniería. Las integrales impropias como una extensión de las definidas sobre intervalos no acotados o con discontinuidades intermedias sobre intervalos acotados, que pueden clasificarse como de primera y segunda especie.	
Finanzas	Ing. Catastral	Administración	Libro 2. Presenta desde situaciones intra-matemáticas particulares: Antiderivadas como una herramienta para estimar costos con precisión, desde el uso de funciones marginales.	
I semestre: pre-cálculo.	I semestre: Cálculo diferencial.	I semestre: Fundamentos de matemáticas, (pre-cálculo).	Libro 3. Presenta ejercicios de carácter netamente intra-matemático aplicando definiciones a manera de axiomas: Antiderivadas como el proceso para determinar una función cuando conocemos su derivada. No establece diferencias entre integrales indefinidas y definidas. Las presenta como entes matemáticos independientes y desconexos. Las integrales impropias las presenta como herramientas útiles para calcular integrales sobre intervalos no acotados.	
II semestre: Cálculo diferencial.	II semestre: Cálculo integral.	II semestre: Matemáticas 1, (Cálculo diferencial).		
III semestre: Cálculo integral	III semestre: Matemáticas			

Tabla 1. Síntesis rejilla 1

7

Figura 1. Aspecto del contenido curricular institucional
Fuente: Elaboración propia

8

Significados personales declarados por los profesores

En la Tabla 2 se muestra una síntesis de la rejilla 2.

Entrevista semiestructurada Significado global para la integral, (Pretendido)	
Prof. 1	Identifica el Cálculo Integral como una herramienta de las matemáticas superiores. Manifiesta un significado global de referencia para la integral como un ente matemático, algo sistémico, conformado por la articulación de los significados de integral definida, indefinida e impropia, «unitarios-puntuales», pero adolece de significados intermedios, como la extensión de la integral definida en impropias «sistémico». Reconoce y aplica los métodos de integración y algunas aplicaciones de la integral propias de las matemáticas financieras. Desconoce: significados puntuales «unitarios», la relación entre ellos que desencadenan significados intermedios y global «sistémico» para la integral. Su formación de base es: Lic. en Matemáticas con maestría.
Prof. 2	Identifica el Cálculo Integral como una rama de las matemáticas, pero no identifica el objeto matemático «integral» como un elemento unitario y sistémico. Identifica, maneja y usa algoritmos que involucran el uso de integrales sin manifestar contextualización puntual, intermedia y global de la misma. Su formación de base es: Ing. Civil con especialización.
Prof. 3	Identifica el Cálculo Integral como una herramienta de las matemáticas superiores. La integral como un elemento de dicho cálculo, representado en tres formas: indefinida, definida e impropias de primera y segunda especie. Manifiesta habilidades específicas como abstraer, conjeturar, representar, generalizar, y sintetizar al momento de hablar de integrales en contextos intra y extra-matemáticos. Su formación de base es: Matemático con maestría en docencia universitaria. Plantea que "...es muy diferente ser matemático puro para tener bases pedagógicas para poder enseñar lo que aprendimos. Creo ese ha sido uno de mis más grandes retos como profesor".
Observación sesiones de clase	
Significados: Declarado	Logrado
- Uso de significados puntuales para la integral (unitario). • Como operador, • Como integral definida aplicando la regla de Barrow. • Con los métodos para integrar. - Presenta la integral impropia como una extensión de la integral definida (sistémico), distinguiendo las de primera y segunda especie.	- Construye significados puntuales para la integral indefinida y definida (unitarios). Luego define la integral impropia como extensión de la definida mostrado a sus estudiantes significados intermedios (emergentes) para la integral. - Usa ejercicios de carácter intra y extra matemático para construir el conocimiento, desde situaciones problemáticas. • Se evidencia rutinización y mecanización de algoritmos para usos de la integral. - No se evidencia articulación de significados puntuales o intermedios para formalizar la integral.
Prof. 1	- Privilegia el uso de significados puntuales (unitarios), para los diferentes tipos de integral.
Prof. 2	- Se percibe confusión para diferenciar la comprensión de integrales las indefinidas, de las definidas o de las impropias. - Identificación axiomática de los tipos de integral existentes. - Énfasis en privilegiar procedimientos algebraicos y analíticos, de tipo mecanicista. - Presentación de las integrales con que trabaja al mismo nivel.
Prof. 3	- Privilegio del uso de significados puntuales para la integral (unitario). • Como operador, • Como integral definida. • Los métodos para calcular integrales. • Para calcular área entre curvas.
Tabla 2. Síntesis rejilla 2.	

9

Resultados

En los profesores P1 y P3 se observa:

- Preocupación por articular el significado puntual de la integral, como operador matemático, propuesto en la configuración epistémica global 1 (GEC1).
- Utilizan lenguaje geométrico, para construir, visualizar inducir, definir y conceptualizar la integral definida como "el único número más grande que todas la sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores".
- Integran significados puntuales de la integral: como operador, como función, como integral definida, con los métodos para calcular integrales,

En P1 se observa articulación de significados puntuales, algunos intermedios, cuando abordó situaciones de carácter intra matemático claramente definidos. Para estos estudiantes hubiera sido más enriquecedor si P1 hubiera abordado situaciones de carácter extra matemático potenciado los procesos de formalización, generalización y conceptualización de los diferentes significados puntuales e intermedios que alcanzó para la integral y que estaban manifestos en el significado pretendido en la estructura curricular.

10

En los tres profesores observados, se encontró uso de lenguaje no especializado ni reconocido matemáticamente.

Ej., "el que está sumando pasa a restar", que sería el equivalente a la propiedad: $aaxx + bb = cc$, con $aa, bb, cc \in \mathbb{R}$, entonces $aaxx + bb - bb = cc - bb$,

o expresiones como:

- "el de arriba" para referirse al numerador o "el de abajo" para referirse al denominador de una expresión algebraica fraccionaria.
- "Euler a la x" para referirse a la función $f(x) = e^x$

En el profesor P2, se observó descuido de la vigilancia epistemológica del saber que enseña.

Usó términos coloquiales para referirse a definiciones y propiedades que validan su actuar, pero que no fueron nunca justificados ni argumentados.

Ej., cuando construía la integral definida usando el teorema fundamental del cálculo (TFC), configuración epistémica intermedia, planteó que: $\int (f(x))' = f(x)$ porque "la segunda parte del TFC le permite inferir que la coma puesta sobre el paréntesis que cubre a x "anula" la integral".

Hechos que permiten inferir la presencia de obstáculos de tipo epistemológico y didáctico

11

Conclusiones

- Se percibió una articulación parcial, por parte de los profesores P1 y P3, de las configuraciones epistémicas puntuales e intermedias expuestas; lo que permite identificar un desequilibrio entre los significados pretendido y logrado.
- Los tres profesores privilegian procedimientos algebraicos y analíticos.
- Se realizan tareas de forma mecánica-operativa.
- En los tres procesos de instrucción observados no se percibe una trayectoria que se acerque a un significado global para la integral como un ente matemático dual (unitario y sistémico) que debe ser tratado como tal. (Privilegio del paradigma formal-mecanicista)
- Los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas desarticuladas (CEP). La mayoría no supo por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas (CEI).

12

La articulación de la complejidad epistémica de un objeto matemático, permite al estudiante el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas propias del PMA, dado que “la progresiva matematización, implica la necesidad de *abstraer, definir, analizar y formalizar*” (Mateus-Nieves, 2020, p. 64) .

Se resalta la importancia que los profesores en ejercicio conozcan que los objetos matemáticos tienen una complejidad epistémica intrínseca a la construcción, evolución y formalización del concepto mismo que, en la mayoría de las veces, es la causa de los errores, dificultades, obstáculos y conflictos que transmitimos a los estudiantes cuando no conocemos dicha complejidad. (Necesario cambio de paradigmas: *enseño como me enseñaron; formal-mecanicista*)

13

Referentes bibliográficos

- ANDERSEN, K. Cavalier's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, University of Aarhus Denmark, v. 31, n. 4, p. 291-367, 1985.
- BOBADILLA, M. *Desarrollo conceptual de la integral y la medida*: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. 2012. 280f. Tesis (Doctorado interinstitucional en Educación) – Universidad del Valle, Cali. 2012.
- BOREL, E. Le Continu Mathématique et Le Continu Physique. *Rivista di Scienza*. Collezione: Scientia. Ricerca articoli. Paris. v. 6. 1909.
- BOS, H. *Redefining Geometrical Exactness*: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.
- BOYER, C. *History of the Calculus and its conceptual development*. New York: Dover, 1949
- BOYER, C. *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad, 1986.
- CAJORI, F. A *History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*. Chicago and London, Ed. The Open Court Pub. Co., 1919.
- CAUCHY, A. *Cour D'analyse* de l'École Royale Polytechnique. 1^{re} Partie, Analyse Algébrique. De l'imprimerie Royale. Bibliothèque du Roi, rue Serpente. Paris. n. 7, 1821.
- CONTRERAS, Á; ORDÓÑEZ, L; WILHELM, M. Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, Barcelona, v. 28, n. 3, p. 367-384. 2010.
- COTES R. *Mathematicien*. A édité la seconde édition des “Principia” de Newton. Trinity College, Cambridge, GB., 05-06. 1716.
- CRISÓSTOMO, E. *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas*: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. 2012. 471f. Tesis (Doctorado en Ciencias de la Educación) – Universidad de Granada, Granada, 2012.
- D'ALEMBERT, J. *Nouvelles Expériences sur la Resistance Des Fluides*. Ed. Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie. Paris. 1777.
- De LORENZO, J. *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos. 1977.
- De MOIVRE, A. *The Doctrine of Changes or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*. Third editions, printed for A Millar. London, MDCCLVI, 1756.
- DENJOY, A. Les Continus Cycliques et la représentation conforme. *Bulletin de la Société mathématique de France*. Tome 70, p. 97-124. 1942. Available on: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1340>
- DESCARTES, R. *Geometria a Renato des Cartes*. 2. ed. Amsterdam: Latina, 1659.
- DURÁN, A. *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza editorial, 1996.
- EULER, L. *Institutionum calculi integralis volumen primum* (1768). Euler Archive – All Works. 342.
- FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, Springer Nature Switzerland AG, v. 82, p. 97-124, 2013.
- FOURIER, J. *Theorie Analytique de la Chaleur*. Paris: Chez Firmin Didot. Pere et fils, 1822.
- FRASER, C. D'Alembert's Principle: The Original Formulation and Application in Jean d'Alembert's *Traité de dynamique* (1743). *Centaurus*, New Jersey, v. 28, p. 31-61, 1985.
- GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, Granada, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.
- GODINO, J.; FONT, V. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Ciudad de México, v. 20, p. 376- 381, 2007.
- GODINO, J.; GONZATO, M.; CAJARAVILL, J. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas*, [en línea], v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012.
- GREENBERG, J. Alexis Fontaine's Integration of Ordinary Differential Equations and the Origins of the Calculus of Several Variables. *Annals of Science*, [en línea], v. 39, p. 1-36, 1982.
- GUICCIARDINI, N. La época del punto: el legado matemático de newton en el siglo XVIII. *Estud. filos*, Medellín, v. 35, p. 67-109, 2007.
- HAYEK, N. *Los orígenes de la matemática moderna*. Tenerife: Universidad de La Laguna, 1979.
- HENSTOCK, R. *Theory of Integration*. London: Butterworths, 1963.
- HOUZEL, C. Historia de las Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. *En: Babiloni (y otros). Materiales para una discusión sobre la enseñanza de la historia de la ciencia y su posible uso didáctico*. Barcelona. ICE, Univ. Barcelona, 1982. p. 1-10.

14

- KLING, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad, 1972.
- LAGRANGE, J. *Théorie des Fonctions Analytiques, contenant Les Principes du Calcul Différentiel*. De L'imprimerie de la République, Paris. 1758.
- LAPLACE, R. *Traité de Mécanique Céleste*. Tome Premier. Librairie pour les Mathématiques, quai des Augustins. Paris. 1798.
- LEBESGUE, H. *Sur une généralisation de l'intégrale définie*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Tome 132, p. 1025-1028, 1901.
- MACLAURIN, C. *Reseña de De fluxionibus libri duo*. Publicada en Acta Eruditorum, universidad de Glasgow, Glasgow, Escocia. 1747.
- MATEUS-NIEVES, E. Evolución histórico-epistemológica del concepto de integral. *Actas de la Quinta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática [ENHEM 5]*. 2015. DOI:10.13140/RG.2.2.32081.56164, Bogotá, D.C., 2015.
- MATEUS-NIEVES, E. Significado global de un objeto matemático a partir de la triada de configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Flores, Rebeca (Ed.), ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, p. 705-712. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 2016a.
- MATEUS-NIEVES, E. Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. *Bolema*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 559-585, 2016b.
- MATEUS-NIEVES, E. El EOS como herramienta de análisis de un proceso de instrucción. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Granada España. J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html, 2017.
- MATEUS-NIEVES, E. *Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes*. 2018. 276f. Tesis (Doctorado en Educación, énfasis Educación Matemática) – Facultad Ciencias de la Educación, Universidad Distrital, Bogotá. 2018.
- MATEUS-NIEVES, E.; HERNANDEZ, MONTAÑEZ, W. Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. España, ISSN 1815-0640. Año XVI (60), p. 196-211, 2020a.
- MATEUS-NIEVES, E.; ROJAS, C. Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 22, n. 3, p. 65-81, 2020b.
- MATEUS-NIEVES, E. Preliminares del cálculo integral. [Preliminaries of integral calculus]. *Project: line of research PhD in Mathematics Education*. Bogotá, 2020c. DOI: 10.13140/RG.2.2.19373.51683.
- MATEUS-NIEVES, E. El teorema del cambio de variables, con estudiantes de ingeniería. *Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Project: PhD research line in Mathematics Education*. Bogotá, oct, 2020d. DOI:10.13140/RG.2.2.13956.96647.
- MATEUS-NIEVES, E.; FONT, MOLL, V. Epistemic Complexity of the “integral” mathematical object. *Mathematics*, 9, 2453, 2021. <https://doi.org/10.3390/math9192453>.
- MATEUS-NIEVES, E. Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema, Rio Claro (SP)*, v. 35, n. 71, p. 1593-1615, dez. 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17>
- MAZÓN, L. *La integral de Lebesgue en Rn: Teoría y problemas*. Valencia. Universitat de Valencia, 2006.
- MUÑOZ, O. Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Ciudad de México, v. 3, n. 2, p. 131- 170, 2000.
- NEWMAN, J. *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Ed. Grijalbo, v. 1, 1994.
- NEWTON, I. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias*: cum enumeratione linearum tertii ordinis. London: Ex Officina Pearsoniana, 1687.
- ORDÓÑEZ, L. *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. 2011. Tesis (Doctorado en innovación Didáctica y Formación de profesorado) – Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, Jaén, 2011.
- PASTOR, R.; BABINI, J. *Historia de la matemática*. Barcelona: Gedisa S.A., 1984.
- PERRON, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Vol. II. Analytisch-funktionen-theoretische Kettenbrüche. 3d ed. Stuttgart, Teubner, DM 49. 1957.
- PIER, J. *Histoire de l'intégration*: vingt-cinq siècles de mathématiques. Paris : Masson, 1996.
- STIRLING, J. *Methodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione*. Serierum Infinitarum. Ed. Whiston & White, fleec-treet. London, 1764.
- TALYOR, B. *Methodus Incrementorum, Directa & Inversa*. In: Encyclopaedia Britannica, Latest Edition by The Riverside Publishing Company, Chicago, U.S.A. 1809.
- TERRALL, M. Metaphysics, Mathematics, and the Gendering of Science in Eighteenth-Century France. In: CLARK, W.; GOLINSKI, J.; SCHAFFER, S. (Ed.). *The Sciences in Enlightened Europe*. Chicago y Londres: editorial, 1999. p. 246-271.
- VALDIVÉ, C.; GARBIN, S. Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*, México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. v.11, n.3, p. 413-450. 2008.
- VOLTERRA, V. *Sui Principii del calcolo integrale*. G Mat, Pisa. v. 19, p. 333-372. 1882.
- WITTGENSTEIN, L. *Philosophical investigations*. New York: The MacMillan Company, 1953.

15



Universidad de
los Andes
Colombia

Facultad
de Educación



Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>
@uedUniandes

16