Situaciones Didácticas de Paralelismo: Percepción y Visualización

Didactic Situations of Parallelism: Perception and Visualization

El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Miguel Delgado Pineda[1]
miguel@mat.uned.es

Recibido: *8 de junio 2021*
Aceptado: *23 de diciembre 2021*

Autor de Correspondencia:
Miguel Delgado Pineda
miguel@mat.uned.es

Resumen: *La forma de percibir el paralelismo de dos rectas por parte de profesores y estudiantes es extensiva a otras líneas curvas. Esta percepción tiene carácter local y, en cierta medida, se justifica en la concepción de rectas paralelas de Euclides. La imagen de segmentos paralelos permanece invariante, aunque el estudiante adquiera la definición de paralelismo en otros contextos que no son puramente geométricos. La visualización del paralelismo de dos rectas tiene una concepción global, donde al menos se requiere visualizar una recta. La visualización de segmentos paralelos se distorsiona entre estudiantes y profesores cuando dichos segmentos no poseen rectas perpendiculares comunes. Este artículo incide en los procesos de visualización del paralelismo de rectas, circunferencias y otras curvas diferenciables en casi todo punto de su dominio.*

Palabras Clave: *Paralelismo, Segmentos paralelos, Rectas paralelas, Circunferencias concéntricas, Curvas paralelas, Lugar geométrico equidistante.*

Abstrac: *The way teachers and students perceive the parallelism of two lines can be extended to other curved lines. This perception has a local character and, to a certain extent, is justified in Euclid's conception of parallel lines. The image of parallel segments remains invariant although the student acquires the definition of parallelism in other contexts that are not purely geometric. The visualization of the parallelism of two lines has a global conception, where at least one line is required to be visualized. The visualization of parallel segments is distorted between students and teachers when these segments do not have common perpendicular lines. This article deals with the visualization processes of the parallelism of lines, circles and other differentiable curves in almost every point of their domain.*

Keywords: *Parallelism, Parallel Segments, Parallel Lines, Concentric Circumferences, Parallel Curves, Equidistant Locus.*

Introducción

La percepción de las cosas no siempre se ciñe a la razón intrínseca de esas cosas. Qué clase de contestaciones podemos esperar al preguntar: ¿Son las cuerdas de la guitarra cuerdas paralelas? Mas de 70% de las personas encuestadas lo afirmaron, aludiendo que las cuerdas de

[1] Universidad Nacional de Educación a Distancia; UNED España: miguel@mat.uned.es

la guitarra no se juntan. Esto se debe a la idealización de la guitarra. Esta respuesta aflora un problema relativo a la percepción del concepto paralelismo y de la forma de visualizar un par de rectas paralelas.

Escribir sobre paralelismo requiere tener claro el significado de la palabra paralelismo. La Real Academia Española (RAE) y la Asociación de Academias de la Lengua Española (ASALE) establece el significado: "*Cualidad de paralelo*". De paralelo indica que es un adjetivo con el siguiente significado geométrico: "*Dicho de dos o más líneas o superficies: que mantienen la misma distancia entre sí en todos sus puntos*". La definición no restringe los puntos elegibles, luego parece imposible que puedan existir rectas paralelas. Sin duda, podrían ser elegidos dos puntos cualesquiera que están a distancia tan grande como se quiera. Quizás se pueda discrepar de esta última afirmación, pero seguro que tal discrepancia se centra en la percepción personal de rectas paralelas y de cómo se valora la distancia, no tanto en la definición. El concepto distancia requiere el auxilio del concepto de recta perpendicular común.

Es necesario conocer su significado académico-matemático recogido en textos matemáticos y enciclopédicos. La enciclopedia más conocida de nuestros tiempos es Wikipedia, en versión en español muestra: "*En la geometría, el paralelismo es una relación que se establece entre cualquier variedad lineal de dimensión mayor o igual a 1 (rectas, planos, hiperplanos entre otros). En el plano cartesiano dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente o son perpendiculares a uno de los ejes ,… Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir, si estos nunca se unen o cruzan.*"

En el párrafo se habla de rectas en un plano con ejes coordenados, y cómo la condición de paralelismo se caracteriza con un número. A la vez se habla de vectores directores que nunca se cruzan, pero no se aclara qué significa cruzar dos vectores, y por tanto se alude a una determinada percepción personal.

La versión en inglés de la enciclopedia dice: "*In geometry, parallel lines are lines in a plane which do not meet; that is, two straight lines in a plane that do not intersect at any point are said to be parallel. Colloquially, curves that do not touch each other or intersect and keep a fixed minimum distance are said to be parallel. A line and a plane, or two planes, in three-dimensional Euclidean space that do not share a point are also said to be parallel…*"

En Busser y Costa (2010) se indica, respecto al plano, dos rectas que son iguales o que no tienen ningún punto común se llaman paralelas.

Estas tres referencias nos hacen dudar de la idea que tienen los estudiantes acerca de dos rectas paralelas. Por ello, se captó la opinión de una muestra de 130 estudiantes: 59 de enseñanza secundaria y 71 de primeros cursos de universidad, con dos sencillas preguntas que no hacían referencia ni al plano ni al espacio.

¿Cuál es la naturaleza matemática de dos rectas paralelas? Todos reconocían el carácter geométrico y nunca se caracterizó como un objeto algebraico. Esto parece ir casi en contra de lo dicho en Wikipedia.

¿Qué son dos rectas paralelas? En este caso se recogieron las respuestas siguientes:

a) Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto en común.
b) Dos rectas son paralelas si no se cortan.
c) Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir, si éstos son linealmente dependientes.

d) Dos rectas son paralelas si tienen sus vectores directores iguales.
e) Dos rectas son paralelas si tienen sus pendientes iguales.
f) Dos rectas son paralelas si forman un ángulo de 0º.
g) Dos rectas son paralelas si los coeficientes de sus ecuaciones respectivos son proporcionales.

Nos sorprendió que ningún estudiante hizo referencia a la distancia fija de cualquier punto de una recta a la otra. Otra sorpresa fue que las respuestas no explicitaban si era en el plano o el espacio geométrico. Por ello, se pidió a cada estudiante que dibujara dos rectas paralelas. El objetivo era comprobar cómo visualizaban dos rectas paralelas. En todos los casos dibujaron dos segmentos paralelos sobre una hoja de papel.

También se pidió que indicaran un objeto o situación de la vida real donde se ejemplificaran dos rectas paralelas. El objetivo era comprobar cómo percibían el paralelismo de rectas del plano o del espacio. Los objetos reales se agruparon en dos categorías: La primera relativa a los lados de un rectángulo. Por ejemplo, hoja de papel, libro, servilleta de papel, pared, etc. La segunda relativa a las aristas de un paralelepípedo. Por ejemplo, las aristas de un edificio, las de una caja de embalaje, las aristas de una puerta, etc.

Si se considera que todos los estudiantes, de cierto nivel en adelante, tienen una idea de lo que son rectas paralelas, entonces el análisis profundo de lo dicho en estos primeros párrafos serviría de inicio a una investigación de índole educativa. Sin embargo, la intención de este escrito no es seguir esa línea de pesquisa, pues pretende ser una reflexión sobre algunas ideas y algunas situaciones relativas al paralelismo ante la variedad de concepciones personales, las formas de visualizarlo y las formas de percibirlo. Estas concepciones se simularon mediante objetos GeoGebra para ver si los objetos se ajustaban a sus percepciones y sus visualizaciones en el sentido de Delgado (1996), en relación a la imagen que generaba la visualización del concepto.

La condición de rectas paralelas

Quizás la primera imagen emergente a la voz de paralelismo se corresponda con el paralelismo en el plano. Si se alude al número de puntos que comparten un par de rectas para caracterizar el paralelismo, entonces esta es relativa al plano, puesto que en el espacio dos rectas del plano que no tienen algún punto común, son paralelas o se cruzan. Lo gracioso de esta concepción estriba en que el estudiante tiene una concepción muy algebraica para buscar los puntos comunes. Esto se entiende en la medida que traspone el concepto de ecuación por el de recta, y la búsqueda de puntos comunes por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

La referencia geométrica al ángulo no es muy adecuada. No se tiene en cuenta que la naturaleza de ángulo requiere disponer de un par de segmentos rectilíneos tales que uno de sus extremos es común. Además, el ángulo cero es un caso límite del concepto de ángulo. Si las rectas son paralelas, la construcción de un ángulo con dos segmentos rectilíneos de esas dos rectas resulta imposible, tanto en el plano como en el espacio.

A esto aportamos la opinión de un profesor especialista en Geometría, el punto común indicado, para rectas paralelas, sería el punto del infinito. Entendemos que el punto del infinito es algo complejo para los estudiantes y los segmentos deberían ser sustituidos por semirrectas. No nos parece muy adecuada esta interpretación pues el punto del infinito está excesivamente lejos.

La referencia a vectores directores, ecuaciones y uso de algunos parámetros requiere, implícitamente, la utilización de una estructura de espacio vectorial tanto para el plano como para el espacio. La utilización de esas herramientas impone tener que distinguir entre rectas paralelas de las llamadas rectas coincidentes. Otra vez emerge una trasposición de lo algebraico por lo geométrico; una concepción muy algebraica relativa a los sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados o incompatibles.

Ante tanta definición es imprescindible recurrir a los clásicos, por ello, es el momento de hacer referencia a la concepción de paralelismo de la Grecia Clásica recogida en los Elementos de Euclides. Debemos recordar que, en ese periodo de tiempo, las definiciones de los Elementos son descripciones de objetos reales, de objetos existentes, de objetos describibles con los sentidos: punto, recta, ángulo…; véase Euclides (1774;1991). Además, la figura de rectángulo es el objeto medible por excelencia en esa cultura, dada la facilidad de dibujarlo. Por ello, se entiende que se definan: *Un punto es aquello que no tiene partes*, *una línea es una longitud sin ancho* y *una línea recta es aquella línea que yace igualmente respecto a sus puntos*. Entender esas definiciones requiere aceptar, en cierta medida, que la recta era una sublimación del concepto de segmento rectilíneo que es lo que podían percibir, y el punto es un caso extremo de segmento rectilíneo sin longitud. Desde esa perspectiva se puede entender lo siguiente:

El postulado V. *Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas se encontrarán en la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.*

La definición LXXIII: *Paralelas son las rectas de un plano que prolongadas por sus dos partes en ninguna de ellas se encuentran.*

Otro dato importante es que la Geometría Helénica admitía el uso del compás, lo cual permitía trasportar segmentos, por ello Euclides admite el postulado III: *Con cualquier centro y cualquier distancia se puede describir un círculo.*

Palabras como largo, ancho, distancia, recto, ángulo, círculo y otros son referencia a objetos incuestionables para la época pues se percibían. Lo mismo sucede con el de recta perpendicular a una recta dada. De lo observable elemental indiscutible se enunciaban definiciones, postulados y axiomas. Una vez establecidos los elementos sencillos, se construían las demostraciones, por síntesis, de lo más conocido y simple a lo desconocido y complejo. El proceso de análisis, de lo complejo a lo simple, no era ajeno a los matemáticos griegos puesto que les permitió descubrir demostraciones. Eso sí, no aplicaron esta técnica en las demostraciones de los Elementos.

Hoy podemos justificar de una forma más sofisticada la existencia de rectas paralelas, si bien, lo más que podemos percibir son segmentos paralelos en determinadas condiciones. Como los griegos, necesitaríamos prolongar esos segmentos para tener la certeza de que fuesen paralelos. Si duda de esto último, piense en dos segmentos tales que no exista ninguna recta perpendicular que pase por un punto de cada segmento.

Supongamos que, la proyección perpendicular de los segmentos sobre una tercera recta paralela genera segmentos disjuntos como el caso de los segmentos de la izquierda en la figura 1.

Figura 1. Visualización de segmentos rectos paralelos.

Metáforas didácticas sobre segmentos paralelos y líneas paralelas

El convoy de tren que se acerca nos permite comprender que las vías no se juntan, aunque percibamos que si lo hacen en la lejanía. ¿Podemos pensar que las vías del tren están formadas por dos líneas paralelas? Esta metáfora de las vías de un tren nos permite abordar las cuestiones de paralelismo, su percepción (las vías parecen juntarse) y su visualización (una rueda del tren siempre está a la misma distancia de la otra vía).

Figura 2. Vista de un tramo recto de vías.

Otra metáfora nos facilita entender la percepción a la idea de segmentos paralelos. Las piezas rectas del juego del Scalextrix de la figura 3, es la imagen con la cual proponemos una primera situación didáctica con dos segmentos paralelos. Se trata de decidir si las guías metálicas son segmentos paralelos o no. Para ello, disponemos de varias piezas iguales y nos permitimos unirlas. Quizás podamos imaginar cómo sería la pista con un número enorme de piezas. Esa unión de pieza refuerza la estrategia griega de prolongar los segmentos. Ahora bien, la pregunta esencial es: ¿Una guía de una pieza es paralela a la otra guía de otra pieza? En el caso de usar una única pieza, se trata de encontrar alguna característica que asegure que los segmentos de guías son paralelos.

Figura 3. Piezas recta y curva de Scalextrix.

Al emplear piezas curvas de la figura 2, se comprueba que unir piezas curvas iguales, manteniendo la curvatura, permite construir pistas que tienen la forma de coronas circulares.

¿Una guía de una pieza es paralela a la otra guía de otra pieza? Al utilizar una única pieza, se puede encontrar alguna característica que aseguren ese supuesto paralelismo. Hubiera tratado las mismas cuestiones si las piezas elegidas son las de vías de un tren de juguete.

En una exploración con 10 profesores que se describirá posteriormente, un profesor nos indicó que imaginaba las rectas paralelas como dos segmentos paralelos con perpendiculares comunes. Esto era una respuesta rápida y sin necesidad de cierto formalismo y nos mostraba la imagen generadora de su visualización. Además, añadió: “me imagino un par de rectas paralelas como un rectángulo al cual se alarga un par de lados opuestos”. Es claro que su idea coincide con la concepción de Euclides, incluso cuando, desde el inicio, definió las rectas paralelas mediante la distancia entre ellas.

Las piezas rectas y las piezas curvas se pueden unir para crear un circuito de carreras, desde circuitos simples circulares a hasta pistas muy complejas con cambios de curvatura. A la vista la figura 4 ¿se puede hablar de que las guías conforman dos curvas paralelas? La respuesta del mismo profesor a esta pregunta era afirmativa. Además, de afirmar la existencia de curvas paralelas, lo ejemplificaba con circunferencias concéntricas.

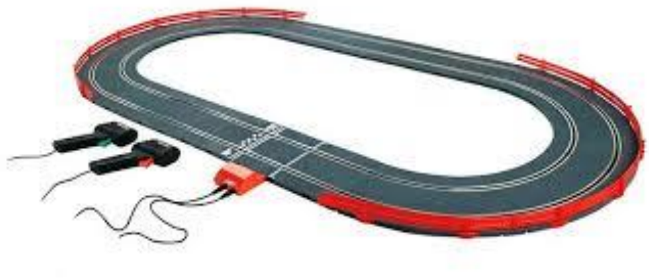

Figura 4. Un circuito de carreras.

Se podría pensar que este problema es contemporáneo por el juguete. Sin embargo, existen construcciones en el mundo antiguo; calzadas y teatros romanos en los cuales se empleaban los mismos elementos rectos y curvos del juguete (Figura 5).

 

Figura 5. Calzada romana y teatro romano de Mérida en España.

Resulta que, la concepción de Euclides de prolongar el segmento no siempre es aplicable a los tramos curvos ni a los circuitos, puesto que las pistas circulares no son prolongables, si bien si son ampliables con más piezas. ¿Debemos cambiar la concepción de paralelismo de segmentos de una forma más general?

Percepción y visualización se segmentos paralelos

Percibir que las piezas rectas de Scalextrix tienen guías paralelas, no tiene nada que ver con la concepción de Euclides del paralelismo de dos segmentos. La percepción de esos segmentos guías tiene más que ver con la existencia de rectas perpendiculares comunes a los dos segmentos. Que cada recta perpendicular en un punto de una guía tenga otro punto de la otra guía, permite comprobar que la distancia entre esos puntos en cada perpendicular es constante.

La existencia de segmentos perpendiculares comunes facilita la percepción del paralelismo y esta percepción se ciñe a la definición RAE.

Realizamos una experiencia con diez profesores de enseñanza secundaria solicitando la utilización de una hoja GeoGebra que no tenía herramientas, ni ejes de coordenadas ni rejilla.

En una vista gráfica se mostraban cuatro puntos que definían dos segmentos. Se solicitaba que los colocaran de forma que fueran dos segmentos paralelos. En otra vista gráfica se presentaba una casilla para que la aplicación le asegurara que esos segmentos eran paralelos o no.

Ningún profesor acertó en los tres primeros intentos en dar un par de segmentos paralelos con esa aplicación. Todos presentaron segmentos de similar longitud y con recta perpendicular conjunta en cada punto.

La concepción de Euclides sí interviene en la forma de visualizar a dos segmentos rectilíneos paralelos. Si los segmentos no tienen segmentos perpendiculares comunes, basta ampliar dichos segmentos de forma que se puedan disponer de normales comunes a los segmentos ampliados. Visualizar el paralelismo requiere un marco global con referentes últimos las rectas que contienen a esos segmentos.

Percepción y visualización avalan que dos segmentos rectilíneos son paralelos si los puntos de un segmento están todos a la misma distancia de la recta que contiene al otro como se muestra en la Figura 6. Esto último puede ser tomado como definición.

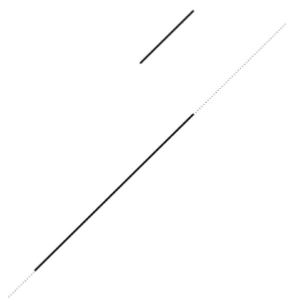

Figura 6. Igualdad de distancia a la recta.

Para evidenciar esta consideración, se hizo otra experiencia con los 10 profesores y otra aplicación GeoGebra que contenía los elementos anteriores y la herramienta de construir rectas perpendiculares y paralelas. Estas herramientas se utilizaban después de situar los segmentos, y luego se rectificaba. Todos los profesores rectificaron la posición de los puntos siguiendo dos estrategias:

1. Se hizo una perpendicular que pasaba por uno de los puntos del otro segmento y luego una perpendicular a la perpendicular en ese punto. El otro punto se ponía sobre la recta de forma similar a la mostrada en la figura 6.
2. Se hizo una recta paralela a un segmento que pasaba por uno de los puntos del otro segmento. En este caso no se cambió la longitud del segmento rectificado.

Los similares efectos de percepción y visualización permiten decir que dos arcos de circunferencia son segmentos paralelos si están sobre dos circunferencias concéntricas.

Figura 7. Visualización de segmentos circulares paralelos.

Estas posibles definiciones de segmentos paralelos no se ajustan a la definición dada por la RAE. La distancia entre un punto de un segmento al otro no es constante, si no existen esos segmentos normales a los dos. En este caso la equidistancia de los puntos de un segmento a la línea global que contiene a otro es esencial. Esto es coherente con nuestra última definición

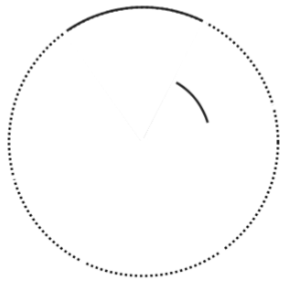

Figura 8. Referencia global para percepción de paralelismo.

La equidistancia entre rectas y entre circunferencias es lo que nos permite decir que dos rectas o dos circunferencias son paralelas. La equidistancia no define una única recta paralela, pues define dos rectas paralelas a una dada. También define dos circunferencias si la separación es menor que el radio de la circunferencia dada.

Lugar geométrico equidistante de un segmento

Es claro que no es lo mismo recta, o circunferencia, paralela y lugar geométrico equidistante de una recta o de una circunferencia. Se podría pensar que con estas figuras se conserva la apariencia de lugar geométrico, en cierta medida. Pero, esto no es así, basta ver un par de ejemplos.

El lugar geométrico equidistante relativo a un segmento rectilíneo no está constituido por un par de segmentos rectilíneos paralelos en el sentido de Euclides. Ese lugar es una curva cerrada constituida por los citados segmentos paralelos unidos por dos semicircunferencias que unen sus extremos.

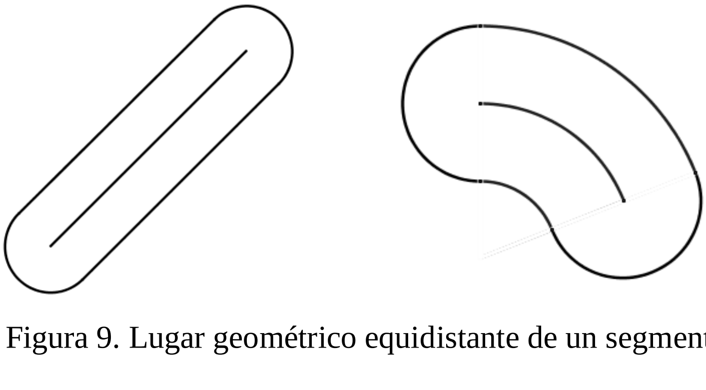

Figura 9. Lugar geométrico equidistante de un segmento.

La simplicidad de la curva cerrada es identificable en la construcción de los circos romanos. Si bien, uno de los dos semicírculos de los circos romanos solía estar deformado como se observa en la figura 10.

Figura 10. Circo romano de Mérida (España).

Si nos imaginamos un segmento rectilíneo cada vez más largo, construimos una familia de curvas cerradas sobre el segmento tal que se transforma en un par de rectas paralelas en el límite. Algo análogo sucede con los segmentos curvos, si bien las longitudes de ellos están acotadas.

Otro ejemplo es el lugar geométrico exterior equidistante relativo a un cuadrado. Éste no está constituido por cuatro segmentos rectilíneos paralelos a cada lado del cuadrado no conexos. Ese lugar es una curva cerrada constituida por los citados segmentos unidos por cuatro cuartos de circunferencias que unen los extremos de los segmentos. Es decir, se trata de un cuadrado con vértices redondeados.

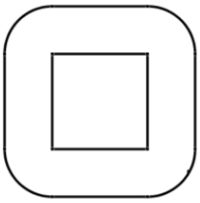

Figura 11. Lugar geométrico exterior equidistante de un cuadrado.

Análogamente, podemos imaginar la curva cerrada correspondiente a una línea poligonal de segmentos rectos o curvos.

Paralelismo y equidistancia

La percepción del paralelismo hace uso de un marco muy local donde se observa el objeto. En cierta medida esta idea es lo que puede hacer pensar que las cuerdas de una guitarra son segmentos rectos paralelos en un mismo plano o que las cuerdas de una viola son segmentos curvos paralelos en el espacio; realmente no lo son.

Las figuras 9 y 11 nos sugieren la pregunta: ¿Es lícito pensar que equidistancia y paralelismo son sinónimos? Si aceptamos lo dicho por la RAE, ¿se puede decir que un segmento de la curva cerrada es paralelo a una porción del segmento recto o del cuadrado?

La pregunta nos incomoda pues no se ajusta la idea intuitiva de paralelismo iniciada con las vías del tren. Por otro lado, la intuición nos hace negar que un segmento del cuadrado curvo no siempre es paralelo a un segmento recto del otro cuadrado.

Otra pregunta es: ¿Podría circular un tren por unas vías con la forma de las figuras 9 y 11? La respuesta es clara: un tren normal no, pues el cuadrado con bordes redondeados y el cuadrado normal no tiene la misma forma. La curva exterior es diferenciable en todos sus puntos y la interior no. Ahora bien, es posible diseñar un circuito con un par de curvas equidistantes del cuadrado exteriores a este, y en este caso los ejes del tren deben ser movibles para ser perpendiculares a las dos vías en cada par de puntos. Esto nos permite hablar de la pareja de cuadrado de bordes redondeados y concéntricos como un par de curvas paralelas puesto que se conserva la distancia y se conserva la forma y las rectas perpendiculares son comunes. Ahora sí podríamos decir que un segmento de una curva es paralelo otro segmento de la otra en el sentido por prolongación de Euclides. Lo mismo sucede con dos curvas equidistantes a un segmento pues conservan la distancia, la forma y las rectas normales.

Un ejemplo nos sirve para comprobar que el traslado de una figura no es lo mismo que una figura paralela. La gráfica de la función $g(x) = x^2 + 1$ es la trasladada de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y esas parábolas no son normal-equidistante. La construcción de una gráfica paralela impone la necesidad de la existencia de recta normal en cada punto de la gráfica y, por tanto, la existencia de recta tangente.

La condición de ser diferenciable en cada punto asegura la existencia de rectas tangente y normal, por ello, el concepto de curva paralela dada de la literatura se plantea como la determinación de una curva que sea equidistante con una inicial diferenciable. Sin embargo, la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en 0, pero si tiene recta tangente vertical en 0 y, por tanto, recta normal.

Una restricción al problema de las curvas paralelas podemos formularlo de la siguiente manera: Dada una función real de variable f derivable en todo punto, se determina una curva de puntos $(x_, y)$, $g(x, y) = 0$, que cumplen que existe un punto $\left(x_{0,} f(x_0)\right)$ tal que $\cap g$ y $\left\|(x_, y) - \left(x_{0,} f(x_0)\right)\right\| = k$, con k fijo. Donde r_0 la recta tiene la ecuación $r_0 \equiv x - f'(x_0)y - f'(x_0)f(x_0) - x_0 = 0$ y la recta normal a la gráfica de f en el punto $\left(x_{0,} f(x_0)\right)$.

El problema tiene dos soluciones posibles expresables en forma paramétrica:

$$g_1 \equiv \begin{cases} x = t - \frac{kf'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \\ y = f(t) + \frac{k}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2 \equiv \begin{cases} x = t + \frac{kf'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \\ y = f(t) - \frac{k}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \end{cases}.$$

Surge la duda: ¿Podremos diseñar vías de tren empleando un perfil gráfico distintos de rectas y de circunferencias?

Conclusión

La respuesta a la última pregunta no sólo depende de la condición de la gráfica inicial puesto que depende de la separación k elegida. Esta dependencia permite saber si dos curvas paralelas a una curva inicial tienen la misma forma o no, puesto que g_1 y g_2 pueden tener formas distintas. Depende de si ambas curvas son las gráficas de una función real de variable real diferenciable, o son curvas planas con puntos dobles o con puntos no diferenciables.

En el primer caso se puede diseñar unas vías de tren con dos curvas de tipo g_1 o de tipo g_2, partiendo del perfil de la gráfica de f. Es decir, la semejanza de formas lo es todo en este problema y esta semejanza tiene que ver con la curvatura en cada punto; del radio de curvatura y de la circunferencia osculatriz. Esta situación nos permite percibir la propuesta de Euclides de paralelismo para dos segmentos curvos en esas curvas paralelas y visualizar en términos de equidistancia de los puntos de un segmento curvo a la curva que contiene al otro segmento.

En el segundo caso, obviando la curvatura, sólo se podrá diseñar vías de tren haciendo uso de las partes de las curvas donde el teorema de la función implícita nos asegure la existencia de las expresiones explícitas.

Esta última consideración se debe tener en el caso de que la función inicial de referencia f no sea diferenciable en algunos puntos, pero que tenga recta tangente vertical en ellos. En estos casos se podrá trabajar con algunas ramas de las curvas paralelas, como en el caso segundo.

Bibliografía

Busser, P., Costa, A. (2010). Geometría Básica. Madrid: Sanz y Torres.

Camilo, J., Hernán, A. (2008). *Curvas paralelas explícitas de las curvas cónicas no degeneradas para el torneado CNC de lentes y espejos esféricos-cónicos*. Revista EIA, Número 10, 31-43. Diciembre.

Cordero, L., Fernández, M., Gray, A. (1995). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Addison-Wesley Iberoamericana.

Daub, W. (s/f). *Monografía sobre las curvas paralelas*. Disponible en: http:revistas.uns.edu.ar/ee/article/download/1209/729.

Delgado, M. (2016). *Registros para una función real cualquiera de variable real. El Cálculo y su Enseñanza*, 6, 1-28. México.

Delgado, M., Ulecia, T. (2009). *Visualización en el Análisis Matemático: Aprendizaje Matemático basado en el tratamiento de imágenes dinámicas que posibilitan el modelado de objetos de esta área del conocimiento.* EDUMAT-2009. Argentina.

Delgado, M. (2009). *Objetos Matemáticos dentro del marco de una Matemática visual.* EDUMAT-2009. Argentina.

Euclides. (1991). Elementos. Libros I-IV, Editorial Gredos. Madrid.

Euclides. (1774). Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los Elementos. Libros I-IV, Madrid: SM.

Gray, A., Abbena, E., Salomon, S. (2006). Modern Differential Geometry of curves and Surfaces wiht Mathematica. Chapman & Hall/CRC.

Pita, C. (1994). *Curvas paralelas*. Miscelánea Matemática 21, 29-52.

Sancho de San Román, J. (1955). *Cuevas alabeadas de anchura afín constante*. Collectanea Mathematica. Vol. 8, Núm. 1, 85-98.

Wikipedia. (2021). Paralell curve, https://en.wikipediaParallel_curve. 2021