Cómo vivir sin los (números) complejos

El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Humberto Madrid de la Vega
Universidad Autónoma de Coahuila
hmadrid@gmail.com

Recibido: *5 de marzo 2022*
Aceptado:*23 de junio 2022*

Autor de Correspondencia:
Humberto Madrid de la Vega
hmadrid@gmail.com

Resumen: Durante las últimas tres décadas se han llevado a cabo investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal para indagar los obstáculos que enfrentan los estudiantes universitarios. Presentamos que existe una relación entre el álgebra de matrices y el álgebra de los números complejos.

Palabras claves: Números complejos; Enseñanza del algebra lineal; Álgebra de matrices

Abstract: Research on the teaching and learning of linear algebra has been conducted over the past three decades to study the barriers faced by university students. We show a relation between the algebra of matrices and the algebra of complex numbers.

Keywords: Complex numbers; Teaching linear algebra; Matrix algebra

1. Introducción

El Álgebra Lineal es considerada una de las asignaturas fundamentales por su extensa aplicación a la solución de problemas en diversas carreras orientadas a la ciencia y las ingenierías (Paz, 2020; Trigueros & Possani, 2013). Durante las últimas tres décadas se han llevado a cabo varias investigaciones para indagar los obstáculos que enfrentan los estudiantes universitarios en la enseñanza y aprendizaje de conceptos como dependencia e independencia lineal, base, dimensión, transformaciones lineales y valores y vectores propios (Stewart et al., 2018).

En el presente trabajo mostraremos que las matrices pueden ser consideradas como un sistema numérico generalizado. Más específicamente, mostraremos que existe una relación entre el álgebra de matrices y el álgebra de los números complejos que puede ayudar al alumno a comprender mejor el álgebra de matrices y algunas de sus propiedades más importantes.

2. Una relación entre números complejos y matrices

Denotaremos con $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos. Recordemos que un número complejo z es de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales; i tiene la propiedad

$$i^2 = -1,$$

a se conoce como la parte real de z y b como la parte imaginaria de z.
Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales.
La suma de $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ es

$$z_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

y el producto es

$$z_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Si $z = a + bi \neq 0$, entonces su inverso multiplicativo z^{-1} es

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Es interesante ver de dónde sale esta fórmula para z^{-1}.
Sea $w = x + yi$, queremos ver cuáles son los valores de x y y tales que $zw = 1$, lo cual lleva a

$$(ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i$$

así que

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

de aquí

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Conviene observar que (1) se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto lo podemos interpretar como que la acción de multiplicar z por w equivale a aplicar la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

al vector formado por la parte real e imaginaria de w. De esta manera, un problema en $\mathbb{C}$ – encontrar z^{-1} – lo hemos llevado a un problema en $\mathbb{R}^2$, es decir (1), el cual podemos resolver usando sólo aritmética real.
Lo anterior establece una relación entre números complejos y un subconjunto de matrices de 2×2.

$$z = a + bi \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Vamos a explorar esta interesante relación.

3. Más sobre números complejos y matrices

Considérese el conjunto de matrices de la forma

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}. \right\}$$

$\mathcal{A}$ es un subconjunto de las matrices de 2×2 con elementos reales.
Hemos encontrado una relación entre los conjuntos $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$. Claramente la relación establecida es una función. A cada número complejo le asociamos una única matriz en $\mathcal{A}$. Aún más, esta función es biunívoca: Cada matriz A de $\mathcal{A}$ está asociada a un número complejo $z = a + bi$; distintos números complejos tienen asociados diferentes matrices de $\mathcal{A}$.
Tomemos $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos y sus correspondientes matrices asociadas

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

Sumamos los dos números complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ahora sumamos sus matrices asociadas

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

Entonces a la suma de los números complejos le corresponde la suma de sus matrices asociadas.
Ahora veamos el producto de los números complejos

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

y el producto de sus matrices asociadas

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ac-bd) & -(ad+bc) \\ (ad+bc) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, al multiplicar dos números complejos se pueden multiplicar en forma usual las dos matrices correspondientes y obtener la matriz asociada al número complejo del producto.
No es difícil verificar que $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$ tienen las mismas propiedades algebraicas en cuanto la suma, producto y multiplicación por escalares.
Conviene destacar que, si bien el producto de matrices no es conmutativo, el producto de matrices asociadas a números complejos sí lo son, lo cual puede ser comprobado fácilmente. Además, todas las matrices no nulas de $\mathcal{A}$ son invertibles.
En resumen, $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$ tienen la misma estructura algebraica. Digamos que $\mathcal{A}$ es una *copia* de $\mathbb{C}$. Se dice que $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$ son *isomorfos*.

4. Explorando A

Cada número complejo de la forma $z = a + bi$ tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Está claro que a los números reales les asociamos

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Y al imaginario i le asociamos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera tenemos

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es conveniente destacar que la matriz asociada a i,

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación de $\frac{\pi}{2}$ grados, lo cual coincide con la acción de multiplicar un número complejo por i. $\hat{I}$ tiene entonces un significado concreto, a diferencia de i que un símbolo para algo tal que $i^2 = -1$

Un número importante asociado a un complejo $z = a + ib$ es su módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. El determinante de su matriz asociada es

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

así que

$$|z| = \sqrt{|A|}\ , \qquad |A| = |z|^2$$

Es claro que el conjugado $\bar{z}$ tiene asociada la matriz

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

¿Cuál será la matriz asociada a z^{-1}? Naturalmente A^{-1}.

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Otra propiedad interesante de las matrices de A es que sus columnas son ortogonales, lo cual se puede observar directamente de

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ya que el producto escalar de sus columnas es cero.
Consideremos ahora las matrices de A con columnas ortonormales, es decir

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1$$

Sus correspondientes números complejos son de la forma

$$z = a + bi, \quad a^2 + b^2 = 1$$

es decir, complejos con módulo 1. En otras palabras, estos complejos están en el círculo unitario en el plano complejo. A estos complejos podemos escribirlos como

$$z = cos\theta + isen\theta$$

y entonces sus correspondientes matrices asociadas son de la forma

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

es decir, son rotaciones, donde θ es el ángulo de rotación. Esto está de acuerdo con la interpretación geométrica del producto de complejos unitarios.

Un caso particular es $i = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y su correspondiente matriz

$$\begin{pmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual representa una rotación de 90°.

Un número complejo z es real si $z = \bar{z}$, equivalentemente

$$A = A^T \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Un número complejo z es imaginario si $z = -\bar{z}$, equivalentemente

$$B = -B^T \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior lo podemos decir de otra forma. Una matriz en $F \in \mathcal{A}$ se puede escribir como

$$F = A + B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$A, B \in \mathcal{A}$, con $A = A^T$ y $B = -B^T$. A representa la parte real de z y B la parte imaginaria.

En resumen, hemos encontrado un conjunto $\mathcal{A}$ de matrices 2×2 que es una "copia" de $\mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos. Se dice que $\mathcal{A}$ es isomorfo al campo $\mathbb{C}$. Podemos decir que las matrices 2×2 ¸contienen a $\mathbb{C}$.

Dentro de $\mathcal{A}$ todo es bonito, por ejemplo, el producto es conmutativo y todo elemento distinto de cero tiene un inverso. Pero fuera de $\mathcal{A}$ las cosas ya son distintas, el producto no es conmutativo y no todas las matrices tienen inversa. Sin embargo, vamos a ver que en cierto sentido las matrices son una especie de generalización de los números complejos y no simples arreglo de números.

5. ¿Las matrices son una generalización de los números complejos?

Vamos a trabajar con matrices cuadradas $n \times n$ con elementos reales, sea M_n este conjunto. Si queremos mostrar que M_n generaliza a los números complejos, tenemos que preguntarnos cuáles matrices representan la parte real y la imaginaria. La respuesta se encuentra en la siguiente propiedad.

Toda matriz $A \in M_n$ se puede expresar como

$$A = B + C$$

donde $B = B^T$ y $C = -C^T$.

Esto es fácilmente verificable. Definamos

$$B = \frac{A + A^T}{2} \quad , \qquad C = \frac{A - A^T}{2}$$

Entonces $B = B^T$ y $C = -C^T$.

Ejemplos

1. $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices que satisfacen $B = B^T$ son llamadas matrices simétricas. Las matrices que satisfacen $C = -C^T$ son llamadas matrices anti–simétricas.

5.1. Matrices simétricas

Conviene estudiar, aunque sea someramente a estas matrices. Puesto que $B = B^T$, los elementos de la matriz son simétricos respecto la diagonal principal, ya que $b_{ij} = b_{ji}$ para toda ij. Ejemplos de esto son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Trataremos hacer que en cierto sentido son las matrices más cercanas a los números reales.
Las matrices simétricas más sencillas son las matrices diagonales, en las que los elementos fuera de su diagonal principal son 0. La matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

representa un número real. La matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

representa a dos números reales, pero actúa como un número real a lo largo de cada eje coordenado.
En general una matriz simétrica no es diagonal. Pero tiene una propiedad muy interesante, toda matriz simétrica tiene una relación con una matriz diagonal.
Una matriz A simétrica es *ortogonalmente diagonalizable*, esto es, existe una matriz P con columnas ortonormales, de forma que $P^T AP = D$, donde D es una matriz diagonal.

Por ejemplo, consideremos este par de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde las columnas de P son ortonormales.
Efectuando operaciones

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

Se dice entonces que A es *semejante* a una matriz diagonal.
¿En qué sentido A y D son *semejantes*? Por ejemplo, en que como transformaciones actúan en forma similar.
Por ejemplo, la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

multiplica por 2 a los elementos del eje X y por 4 a los elementos del eje Y.
Ahora veremos que A tiene una propiedad semejante.

Sean

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

las columnas de P. De la ecuación $P^T AP = D$, y de que $P^T = P^{-1}$ tenemos

$$\begin{gathered} AP = PD \\ A(p_1, p_2) = (p_1, p_2)D \\ Ap_1 = 2p_1 \\ Ap_2 = 4p_2 \end{gathered}$$

Esto significa que a lo largo de la recta determinada por p_1 la acción de A es simplemente multiplicar por 2. Y a lo largo de la recta determinada por p_2 es multiplicar por 4.
En otras palabras, si cambiamos el sistema coordenado por el determinado por $\{p_1, p_2\}$, A se transforma en D. O lo que es lo mismo, A y D representan a la misma transformación lineal en diferentes bases ortonormales.
El hecho de que A y D sean semejantes es la razón por la cual decimos que las matrices simétricas pueden verse como una generalización de los números reales. Más adelante daremos argumentos adicionales en esta dirección.
¿De dónde salen P y D? Los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A y las columnas de P son sus correspondientes vectores propios. Esto lo veremos en la siguiente sección.

5.2. Matrices antisimétricas

Una matriz cuadrada se dice que es antisimétrica si

$$A = -A^T$$

En vista de lo anterior tenemos $a_{ii} = -a_{ii}$ lo cual significa que los elementos de la diagonal principal A son cero.
Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Más adelante daremos argumentos para pensar a estas matrices como la generalización de los imaginarios.

6. Valores y vectores propios

Bentancourt (2014) y Orozco-Santiago (2020) han estudiado la conceptualización de los estudiantes universitarios sobre los valores y vectores propios enfocándose al estudio geométrico en $\mathbb{R}^2$ apoyándose en algún recurso digital. Este tema es abordado al final de un primer cuso de álgebra lineal y aparece en la mayoría de los textos sobre Algebra Lineal (Grossman, 2008; Lay, 2012; Poole, 2017).

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, decimos que λ es un *valor propio* de A si existe un vector $x \neq 0$ de forma tal que

$$Ax = \lambda x$$

decimos que x es el *vector propio* correspondiente a λ. En términos geométricos Ax y x son paralelos.

Para calcular los valores y vectores propios de A, reescribimos $Ax = \lambda x$ como

$$Ax - \lambda x = 0$$

O bien

$$(A - \lambda I)x = 0$$

donde I es la matriz identidad. Puesto que $x = 0$ este sistema tiene soluciones no triviales y por lo tanto $A - \lambda I$ es una matriz singular y por ende su determinante es 0. Tenemos entonces

$$q(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

es un polinomio de grado n. Los valores propios de A son las raíces de este polinomio.

Si λ es un valor propio de A, las soluciones de

$$(A - \lambda I)x = 0$$

son vectores propios de A.

Veamos un ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

cuyas raíces son 2 y 4.

Tomando $\lambda = 2$ tenemos

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una solución normalizada del sistema homogéneo determinado por esta matriz es

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el cual es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 2$. De manera semejante para $\lambda = 4$ obtenemos el vector propio

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veamos otro ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

cuyas raíces son i y $-i$. Puesto que A tiene elementos reales y valores propios complejos, sus vectores propios serán complejos. Para nuestros fines no nos interesa calcularlos.
Los valores y vectores propios de una matriz nos proporcionan información importante sobre sus propiedades algebraicas y geométricas.

6.1. Matrices simétricas

Vamos a señalar propiedades de los valores y vectores propios de matrices simétricas (*Matriz Simétrica*, 2022).

- Todos los valores propios son reales
- Existe P con columnas ortonormales de forma tal que $P^T AP = D$, donde $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. λ_i son los valores propios de A y las columnas de P son los vectores propios correspondientes.

De acuerdo con los signos de los valores propios las matrices simétricas pueden clasificarse como:
Definida positiva. Cuando sus valores propios son estrictamente positivos
Semidefinida positiva. Cuando sus valores propios son mayores o iguales a cero
Definida negativa. Cuando sus valores propios son estrictamente negativos
Semidefinida negativa. Cuando sus valores propios son menores o iguales a cero
Indefinida. Cuando sus valores propios tienen diferente signo

Con base en lo anterior es razonable pensar a las matrices simétricas como una generalización de los números reales.

6.2. Matrices antisimétricas

Tenemos las siguientes propiedades de valores propios de matrices antisimétricas (*Skew-Symmetric Matrix*, 2022)

- Los valores propios son imaginarios
- A^2 es una matriz simétrica semidefinida negativa.

Por estas propiedades podemos pensar a las matrices antisimétricas como el equivalente a los números imaginarios.

7. Descomposición polar

La descomposición polar de un complejo es

$$z = a + ib = r(cos\theta + isen\theta)$$

$r = |z|$, $(cos\theta + isen\theta)$ es un complejo unitario, por lo que tiene asociada una rotación.
¿Cuál sería el equivalente matricial? la generalización de r es una matriz semipositiva definida. La generalización de las rotaciones son las matrices ortogonales (columnas ortonormales)

De esta manera no resulta extraña la descomposición polar de una matriz

> *Cualquier matriz A, $n \times n$ se puede factorizar como*
> $$A = PS$$
> *donde P es ortogonal y S es simétrica semidefinida positiva* (Strang, 2009, p. 402)

8. Conclusión

En resumen, hemos visto que las matrices 2×2 contienen a los números complejos en el sentido que contiene un subconjunto que tiene la misma estructura algebraica que los números complejos. Aún más, las matrices cuadradas de orden n pueden ser consideradas como una generalización de los números complejos en donde las matrices simétricas juegan el papel de la parte real y las matrices antisimétricas el de la parte imaginaria.

Referencias

Betancourt, Y. (2014). *Uso de recursos didácticos digitales en un primer curso de álgebra lineal*. Cinvestav-IPN.

Grossman, S. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill Interamericana.

Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación.

Matriz simétrica. (2022). https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matriz_simétrica&oldid=142631055

Orozco-Santiago, J. (2020). *Una propuesta de orquestación instrumental para introducir los conceptos de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería (tesis doctorado)*. Cinvestav.

Paz, S. (2020). *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector . Una aproximación para el diseño de tareas*. Cinvestav-IPN.

Poole, D. (2017). *Álgebra lineal: Una introducción moderna*. CENGAGE Learning.

Skew-symmetric matrix. (2022). https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Skew-symmetric_matrix&oldid=1082830634

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6

Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *438*(4), 1779–1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009