



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2021

ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias
Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROYECTIVA CON EL USO DE GEOGEBRA

Juan Camilo Bonilla, Elkin Alejandro Osorio

juancamilobonillabernal@gmail.com, elkinosorio.fce@uas.edu.mx

Institución Educativa Santa Juana de Arco, Colombia y Universidad Autónoma de Sinaloa, México.

Para citar este artículo:

Bonilla, J. C., Osorio, E. A. (2021). Desarrollo del pensamiento geométrico a través de la resolución de problemas de geometría proyectiva con el uso de GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 2, pp. 43-64. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 2, julio-diciembre de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROYECTIVA CON EL USO DE GEOGEBRA

Juan Camilo Bonilla, Elkin Alejandro Osorio

juancamilobonillabernal@gmail.com, elkinosorio.fce@uas.edu.mx

Institución Educativa Santa Juana de Arco, Colombia y Universidad Autónoma de Sinaloa, México.

Resumen

Se realizó un estudio sobre la influencia en el aprendizaje de la geometría proyectiva y el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de un grupo a nivel de preparatoria. Se abordaron los temas de Razón Cruzada, Teorema de Pappus, Pascal y Desargues, por medio de actividades de resolución de problemas con GeoGebra. Éstas se diseñaron para tránsito de los estudiantes por cinco fases de aprendizaje (información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración). Se buscó el desarrollo del pensamiento geométrico y su categorización en cinco niveles según su avance y desempeño (Reconocimiento, Análisis, Deducción Informal, Deducción y Rigor). Se obtuvo que tres se quedaron en el primer nivel, cuatro de ellos en el nivel de Análisis, siete en el nivel de Deducción Informal, uno sólo en el nivel de Deducción y ninguno en el de Rigor. Si bien es cierto que las actividades propuestas fortalecieron el desarrollo del conocimiento de la geometría proyectiva, no se obtuvieron resultados óptimos. Se evidenciaron fallas ligadas al lenguaje y planteamiento de los axiomas, teoremas y enunciados de los problemas, al igual que con el tiempo para el desarrollo y los conocimientos previos. Se recomienda tener estas consideraciones, además de familiarizar previamente al estudiantado con los softwares que se implementen, pues la novedad, además de motivación, pueden producir estrés, ansiedad y angustia en los estudiantes, debido a que no lo conocen, no saben cómo deberían utilizarlo y si lo hacen bien o no.

Palabras clave: Geometría Proyectiva, Resolución de Problemas, GeoGebra, Pensamiento Geométrico.

Abstract

A study was carried out on the influence on the learning of projective geometry and the development of geometric thinking in students of a group at the high school level. The topics of Cross Reason, Pappus, Pascal and Desargues Theorem were addressed through problem solving activities with GeoGebra. These were designed for the students to transit through five learning phases (information, guided orientation, explanation, free orientation and integration). The development of geometric thinking was sought and its categorization into five levels according to its progress and performance (Recognition, Analysis, Informal Deduction, Deduction and Rigor). It was obtained that three stayed at the first level, four of them at the Analysis level, seven at the Informal Deduction level, one only at the Deduction level and none at the Rigor level. Although it is true that the proposed activities strengthened the development of knowledge of projective geometry, optimal results were not obtained. Failures related to the language and approach of the axioms, theorems and statements of the

problems were evidenced, as well as with time for development and previous knowledge. It is recommended to have these considerations, in addition to previously familiarizing the student body with the software that is implemented, since the novelty, in addition to motivation, can cause stress, anxiety and anguish in the students, because they do not know it, they do not know how they should use it and if they do it well or not.

Keywords: Projective Geometry, Problem Solving, GeoGebra, Geometric Thinking.

Introducción

La geometría proyectiva, desde sus inicios, ha visto mermada su presencia en los currículos de educación básica debido a la complejidad para llevar al aula sus conceptos, teoremas y herramientas (Richter, 2011). Sin embargo, en las últimas dos décadas, con la proliferación de la presencia de la computadora y el software adaptado y desarrollado para la educación, cada vez se proponen más formas o estrategias para que los docentes formen a los estudiantes en esta asignatura (Menghini, 2006; Skala, 2012; Menghini, 2019).

Particularmente, softwares como GeoGebra han demostrado ser un medio eficaz para ubicar al estudiante en un entorno para la interacción de elementos geométricos, cuestión que se puede aprovechar para reducir las problemáticas de enseñanza de la Geometría Proyectiva que se derivan del nivel de abstracción de los objetos de esta rama (Crannell, Frantz y Futamura, 2019).

No sólo las herramientas tecnológicas han sido consideradas para llevar al aula esta Geometría, sino también la resolución de problemas. Cuando se realizaban análisis al respecto de las estrategias metodológicas para su enseñanza, autores como Ziatdinov (2010) y más tarde Kaenders y Weiss (2017), describieron cómo, las situaciones que los geómetras habían enfrentado para desarrollar este campo, podrían adaptarse y presentarse como problemas para desarrollar estos conocimientos con los estudiantes.

Son estos dos aspectos combinados, la metodología de resolución de problemas y el uso de GeoGebra, las bases de la investigación realizada. Se estudió el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de la institución educativa Santa Juana de Arco, a través de la articulación de actividades de resolución de problemas de geometría proyectiva donde las configuraciones geométricas se ofrecieron al estudiante en GeoGebra.

Referentes Teóricos

Para el planteamiento de las actividades se consideraron los fundamentos geométricos de la Razón Cruzada, Teorema de Pappus, de Pascal y de Desargues. Se diseñaron las actividades en función del tránsito del estudiante por las fases de aprendizaje Información, Orientación guiada, Explicación, Orientación libre e Integración, por medio de la resolución de problemas. El análisis de la influencia de las actividades y el desarrollo del pensamiento geométrico se hizo con base en la escala de los niveles de Reconocimiento o Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción y Rigor.

Pensamiento Geométrico.

Para describir, entender y explicar el pensamiento geométrico que desarrollan los estudiantes participantes del estudio, se utilizó el marco teórico basado en las perspectivas

constructivistas relacionadas al pensamiento geométrico propuesto por Van Hiele (Van Hiele, 1986; Van Hiele, 1999; Fuys et al, 1988). Según estos autores, el pensamiento geométrico de un estudiante avanza y puede caracterizarse en cinco niveles.

Tabla 1.

Niveles de Pensamiento Geométrico Van Hiele.

Nivel de Pensamiento	Descripción
Reconocimiento o Visualización	El estudiante conoce las formas geométricas tales como triángulo, cuadrado, rectas, círculos, pero no puede entender aún las propiedades en esas construcciones.
Análisis	El estudiante conoce las propiedades de los objetos que observa, se hacen menciones a regularidades contenidas en los objetos geométricos, pero aún no está capacitado para entender las relaciones que vinculan diferentes objetos geométricos entre sí.
Deducción Informal	Los estudiantes, además de las características del nivel anterior, puede organizar figuras de manera lógica y relacionarlas entre sí, pero aún no pueden operar en un sistema matemático asociado a las características o propiedades de las figuras.
Deducción	El estudiante está capacitado para realizar deducciones correctas y satisfactorias para construir cuestiones geométricas en sistemas axiomáticos. Aunque algunos generan cierto tipo de estructuras demostrativas, no son realmente demostraciones ni poseen rigor. En este nivel el estudiante es capaz de comprender la estructura de un sistema completo de axiomas, sus definiciones, teoremas, consecuencias y postulados.
Rigor	El estudiante puede trabajar en varios sistemas axiomáticos al mismo tiempo. Si se encuentra en este nivel, se puede decir que es capaz de anticipar deducciones al análisis y exploración. Esto implica que es capaz de realizar demostraciones con esquemas formales y manipulando los elementos de manera matemáticamente apropiada.

Nota: (Van Hiele 1999); (Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018).

Además, Van Hiele (1999) también describe que las fases de aprendizaje de los estudiantes al desarrollar su pensamiento geométrico son: información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración.

Tabla 2.
Fases de Aprendizaje de Van Hiele.

Fase	Descripción
Información	Interacción entre profesor y estudiante a través de la discusión.
Orientación guiada	Los estudiantes aprenden geometría explorando y usando actividades guiadas.
Explicación	Los estudiantes pueden explicar y expresar su punto de vista sobre las estructuras geométricas observadas.
Orientación libre	Los estudiantes tienen tareas más complejas que involucran múltiples pasos y pueden ser completadas a través de una variedad de formas, incluidas las preguntas abiertas.
Integración	Los estudiantes revisan y hacen un resumen de qué cuestiones aprendieron con el propósito de construir una nueva visión en conjunto de la red de objetos estudiados y así establecer relaciones entre ellos.

Nota: Traducido de Van Hiele (1999, p. 1-3).

Resolución de Problemas.

Las actividades de resolución de problemas se basaron en los planteamientos de Polya (1945) y Hill (1998); además de considerar algunos aspectos propuestos por Schoenfeld (1985). Con el primero, se consideraron los pasos que este autor plantea acerca de la forma en la cual se resuelve un problema matemático y con la segunda, se tomaron las cuestiones en las que la tecnología puede aportar para realizar este proceso de resolución de problemas.

En este sentido, Polya (1945) describe cómo alguien, que se enfrente a un problema matemático, debe entender dicho problema, configurar un plan, ejecutarlo y hacer una revisión de sus resultados. Al respecto de esto, Hill (1998) en sus investigaciones, destacó cómo la tecnología puede plantear escenarios que potencien el proceso u ofrezcan alternativas.

- **Entender el problema:** es la familiarización con el problema. Esto va desde el análisis del enunciado, pasando por el contexto, los datos que se ofrecen, determinando las habilidades operacionales o algorítmicas que se requieran y llegando a la interpretación del problema, de la cual depende todo el proceso de resolución. En este sentido, la tecnología puede potenciar este paso (Hill, 1998), en el caso particular de la Geometría Proyectiva y al enunciarse cada problema acompañado de una representación gráfica en GeoGebra, se puede agregar la manipulación como forma para ello.
- **Configurar un plan:** es la consideración de cálculos, razonamientos y construcciones que debe hacer quien enfrente el problema, para trazar una trayectoria en la cual irá implementando cada herramienta con la que cuente. El autor señala que se pueden hacer preguntas que ayuden con este paso, tales como ¿se conoce algún problema relacionado con éste? Y ¿se puede establecer un enunciado diferente para el mismo problema?, con el fin de establecer analogías o entrever un procedimiento factible para su solución. Además, dentro del abanico de herramientas con las que se contaría, se podrían agregar softwares de representación gráfica y álgebra simbólica, además del internet, bases de datos, videos de ejemplo, etc.

- **Ejecutar el plan:** seguir la estrategia o trayectoria planteada, cuidando el uso de las herramientas, cálculos, construcciones, razonamientos u operaciones. Al tener disponibles herramientas de cómputo y software especializado, el margen de efectividad y eficacia al ejecutar el plan puede verse potenciado (Hill, 1998)
- **Revisar los resultados:** quien resuelva la situación planteada debería considerar que siempre puede mejorarla. Según el autor, para reafirmar los conocimientos y profundizar en su comprensión, pues requiere reflexión sobre su proceder, examinando si hay posibilidades de error o de optimización; si existe forma de hacerlo que difiere de la suya o si la solución satisface todos los requisitos del enunciado. Esta revisión se puede expandir al usar las herramientas tecnológicas, compartir sus soluciones a un público mayor puede generar espacios para que se hagan reflexiones en masa sobre la solución de la situación (Hill, 1998).

También se tomaron en consideración los aportes realizados por Schoenfeld (1985) en cuanto a la resolución de problemas. Este autor plantea la necesidad de tener en cuenta los conocimientos previos con los que el estudiante cuenta a la hora de resolver el problema, los que denomina *recursos*. Además, el autor establece la importancia de los conceptos de *control* y las *creencias*. Por un lado, el control es la capacidad que tiene el estudiante de verificar su procedimiento y decidir detenerse y tomar una ruta alternativa de solución. Las creencias se definen como las convicciones que tengan los estudiantes frente a las matemáticas en general y al tema trabajado en particular, en esto se incluyen también las actitudes, opiniones y prejuicios.

Metodología

La propuesta consistió en la articulación de situaciones que implicaban resolución de problemas con elementos de la Geometría Proyectiva, y en las cuales las representaciones gráficas utilizadas se ofrecieron en GeoGebra, fueron dinámicas y permitieron la interacción.

Posterior al planteamiento del problema, al estudiante se le remite el archivo de GeoGebra en el cual se puede encontrar con una situación similar a la descrita en el enunciado. En la Figura 1 se puede observar una de estas representaciones sobre el tercer enunciado de la primera actividad.

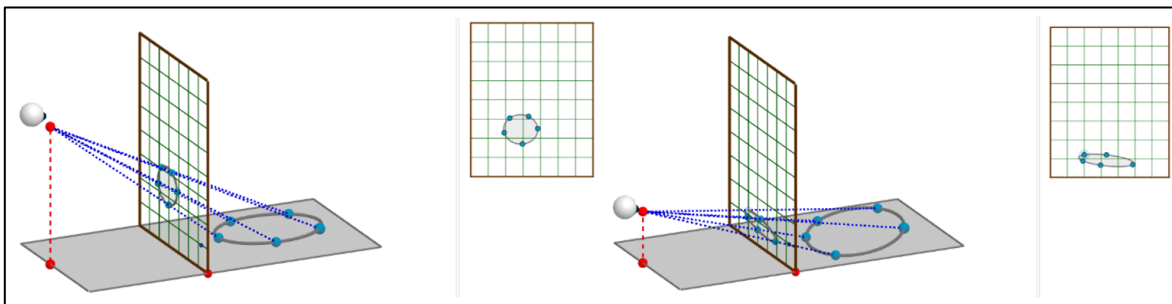


Figura 1. Ejemplo de representación dinámica en GeoGebra para el Problema 3 de la Actividad 1. Creación propia.

Además de applets que trabajaban el acercamiento intuitivo de los significados de los conceptos, las actividades también se enfocaron en problemas retadores que requerían la

implementación de teoremas para su solución (Figura 2). Posterior al trabajo realizado por los estudiantes, el docente encargado institucionalizaba el contenido enseñando ejemplos de estos teoremas y cómo se pueden comprobar con la manipulación en GeoGebra.

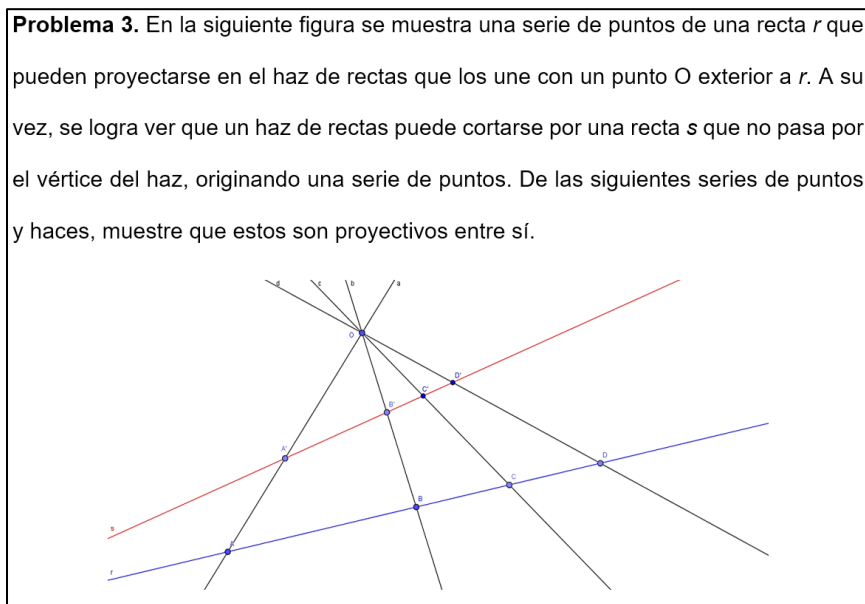


Figura 2. Problema que requiere el uso de teoremas de la geometría proyectiva para su resolución.

Todas las representaciones gráficas generadas, tanto las de los problemas planteados, así como las utilizadas para la institucionalización de los contenidos, fueron entregadas al estudiante para su análisis.

Con las representaciones gráficas dinámicas, se buscó que el estudiante observara las características invariantes, las que variaban y las interrelaciones existentes entre los elementos que estaban inmersos en las situaciones problema.

Resultados

Los resultados obtenidos se dividen en dos secciones, la primera relacionada con el tránsito de los estudiantes por las fases de aprendizaje y la segunda con el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico alcanzado.

Tránsito por las Fases de Aprendizaje.

Las actividades implementadas se diseñan para que el estudiante transite a través de las cinco fases de aprendizaje de van Hiele (1999): información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración. Al analizar el comportamiento de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades es posible identificar el tránsito de estos por cada una de ellas.

Información.

En esta fase los estudiantes interactúan y discuten con el profesor sobre los elementos involucrados en la actividad. Inicialmente, se hace una revisión histórica de lo que significaron estos conceptos, resultados y teoremas. Esto se les explica a los estudiantes a

partir de ejemplos relacionados con el arte (pintura y escultura), así como con representaciones gráficas en GeoGebra. En la Figura 3 se pueden observar los estudiantes durante las interacciones y discusiones con el docente.



Figura 3. Fase de Aprendizaje: Información.

Orientación Guiada.

En esta fase los estudiantes se centran en aprender el sentido de los elementos de la geometría proyectiva inmersos en la actividad por medio de la exploración y el uso de actividades guiadas. En las actividades, en la sección de sugerencias metodológicas, se presentan listados de acciones puntuales para orientar el aprendizaje en esta fase. Un ejemplo de estos listados, de la Actividad 1, se ve a continuación:

- Identifique el ojo de un observador como un punto.
- Suponga que la visión ocurre a lo largo de una línea entre el ojo y cada punto visible de un objeto.
- Las líneas paralelas vistas desde la distancia parecen crecer más juntas.
- Los objetos vistos en el mismo ángulo se perciben como del mismo tamaño.
- Los rayos entre el ojo del espectador y un objeto percibido forman un cono con el ojo en el extremo, el objeto en la base.

En la Figura 4 se observan a los estudiantes durante esta fase de aprendizaje. La guía se basó en diapositivas proyectadas durante esta etapa.



Figura 4. Fase de Aprendizaje: Orientación Guiada.

Explicación.

Durante las actividades, se les ofrecieron espacios a los estudiantes para que interactuaran entre ellos y con el docente. En estos espacios expresaron sus puntos de vista sobre las características de las configuraciones geométricas que se plantean en los problemas. Los estudiantes colaboraron entre sí para plantear heurísticas eficaces para resolver los problemas retadores (Figura 5).



Figura 5. Fase de Aprendizaje: Explicación.

Orientación Libre.

En esta fase de aprendizaje los estudiantes se enfrentan a tareas más complejas que involucran múltiples pasos. Esto corresponde al trabajo de resolución de problemas. Los estudiantes, después de plantear sus heurísticas, empiezan a ejecutar sus pasos. El docente se encarga de la realimentación y el asesoramiento para el control de sus avances, pero sin intervenir en el proceso de resolución de los problemas. Además, en esta etapa los estudiantes trabajan colaborativamente en grupos de máximo tres estudiantes (Figura 6). Esto les permite discutir sus procedimientos, confrontar y contrastar sus resultados previos y prepararse para la etapa final de integración.



Figura 6. Fase de Aprendizaje: Orientación Libre.

Integración.

La integración es última fase de aprendizaje manejada en la actividad. Los estudiantes, después de trabajar colaborativamente, condensan, revisan y resumen sus resultados y las cuestiones aprendidas para construir una visión en conjunto de los elementos estudiados. Esto se realiza en la parte final del diseño instruccional, la institucionalización de los contenidos.

Con apoyo del docente, se formalizaron las soluciones a los problemas planteados, se definen completamente los objetos, relaciones, resultados de la geometría proyectiva trabajados (Figura 7).



Figura 7. Fase de Aprendizaje: Integración.

Desarrollo del Pensamiento Geométrico.

Para describir y categorizar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, sobre los temas de geometría proyectiva trabajados, se evaluaron los resultados de los estudiantes por cada actividad con base en las descripciones de cada nivel de Van Hiele (Van Hiele, 1999; Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018). Por actividad se presentan ejemplos de cada nivel de pensamiento geométrico encontrado y al final se resume en una tabla los resultados de todos los estudiantes en la actividad analizada.

Actividad 1 – Introducción de la Geometría Proyectiva.

En esta actividad en particular, se puede identificar de inmediato que los estudiantes alcanzaron el primer nivel del pensamiento geométrico de ***Reconocimiento o Visualización***. Como se observa en la Figura 8, los estudiantes, apoyados en la representación gráfica ofrecida en GeoGebra, identifican los elementos involucrados en la configuración ofrecida.

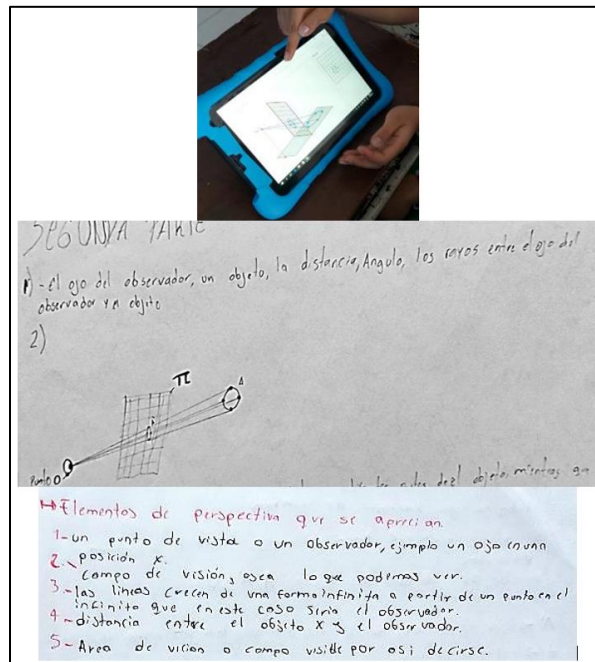


Figura 8. Reconocimiento o Visualización - Actividad 1.

Este nivel estuvo presente en todos los estudiantes participantes del estudio, lo cual es apenas esperable, pues es el nivel más básico de pensamiento geométrico y sólo consiste en la capacidad de identificar los elementos involucrados en la configuración.

Con respecto al nivel de pensamiento geométrico *Análisis*, se tiene que los estudiantes, a pesar de que identificaron algunas propiedades de los elementos (intuitivamente por el momento de la actividad), no los relacionaron entre sí, no los vincularon (Figura 9).

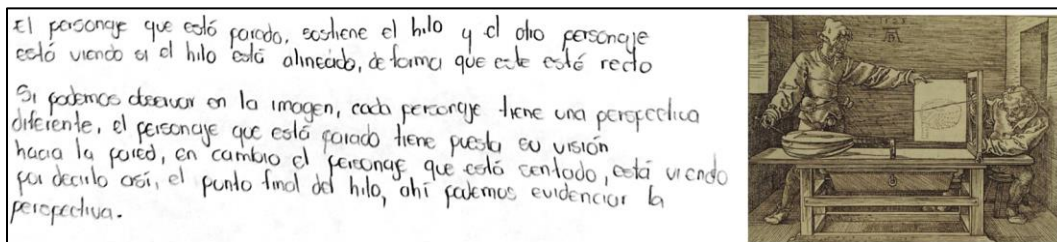


Figura 9. Descripción de elementos de la representación desvinculados entre sí.

Con respecto a las *Deducciones Informales*, aunque en esta actividad los problemas planteados estaban enfocados en la definición de los elementos básicos de la geometría proyectiva, los últimos dos problemas exigen un análisis de las relaciones lógicas y establecer vínculos entre los elementos en función de las características y propiedades.

Algunos ejemplos de este tipo relaciones hechas por los estudiantes pueden observarse en la Figura 10. También, se evidencia que, a pesar de identificar algunas relaciones, los estudiantes se quedan a nivel de informalidad, sin acercarse a ningún sistema de símbolos.

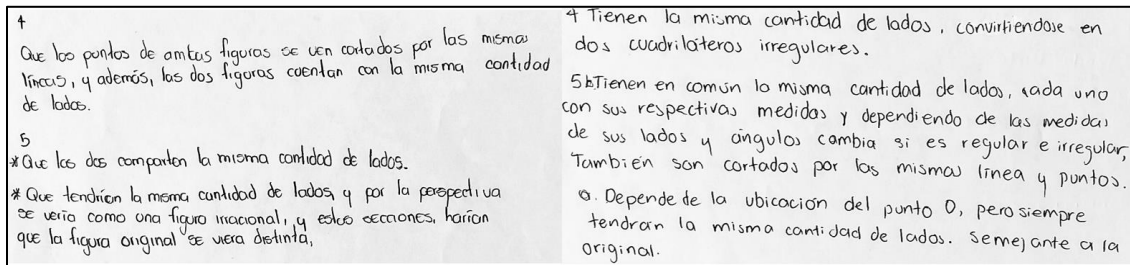


Figura 101. Deducciones informales de los estudiantes en la Actividad 1.

En el caso del nivel de **Deducción** en el desarrollo del pensamiento geométrico, sólo se encontró un estudiante que se aproximó a las afirmaciones correctas y satisfactorias (ver Figura 11). Las construcciones que hicieron los estudiantes, como se mencionaba anteriormente, se quedaron en la informalidad.

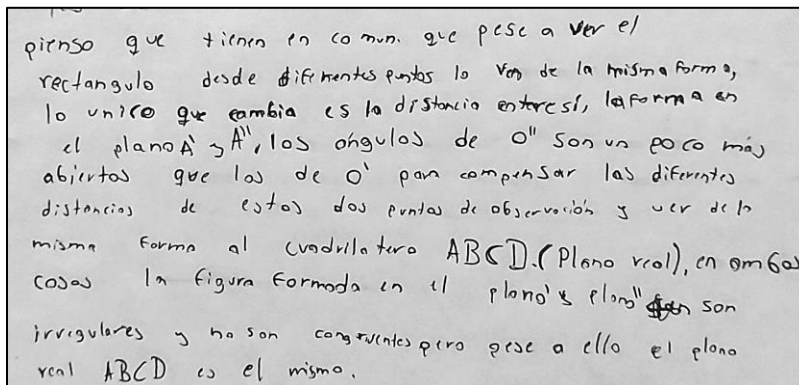


Figura 112. Aproximaciones al nivel de Deducciones en la Actividad 1.

Para esta actividad no se exigió un nivel de **Rigor** en el pensamiento geométrico, por lo cual no se esperaba recopilar datos que indicaran que algún estudiante habría conseguido trabajar en varios sistemas axiomáticos al mismo tiempo o que anticipara deducciones y realizara demostraciones formales.

Actividad 2 – Elementos de Geometría Projectiva.

Con esta actividad se buscó que el estudiante se adentrara en el entendimiento conceptual de los elementos de la geometría proyectiva involucrados. Para esto, se usaron triángulos y cuadrángulos. Además, se introdujo el sistema de axiomas fundamentales para la obtención de los principales resultados y teoremas de la geometría proyectiva.

En esta actividad, como se espera mínimamente, se obtuvieron evidencias sobre el logro del nivel de pensamiento geométrico de **Reconocimiento o Visualización**, la mayoría de los estudiantes se quedó en dicho nivel. En la Figura 12 pueden observarse algunos intentos fallidos de los estudiantes por reconocer o visualizar los elementos. Algunos de ellos utilizan las representaciones ofrecidas en la misma actividad y otros tratan redibujarlas.

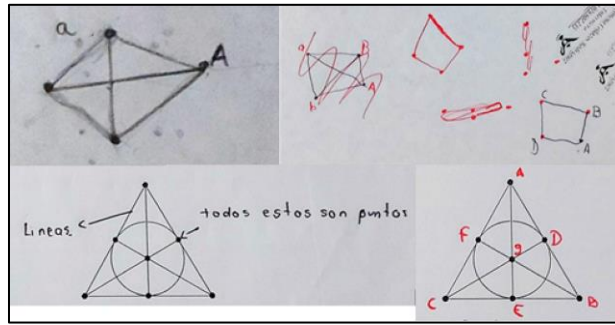


Figura 12. Intentos de Reconocer o Visualizar elementos de la Geometría Proyectiva.

Sin embargo, también hubo algunos estudiantes que se esforzaron en su proceder y alcanzaron el nivel de **Análisis** en su pensamiento geométrico. Estos estudiantes fueron capaces de identificar propiedades y establecer las regularidades contenidas en los objetos geométricos en cuestión. Un ejemplo de este nivel de pensamiento se encuentra en la Figura 13, donde se observa cómo dos estudiantes externalizan gráficamente su comprensión de las definiciones de los axiomas.

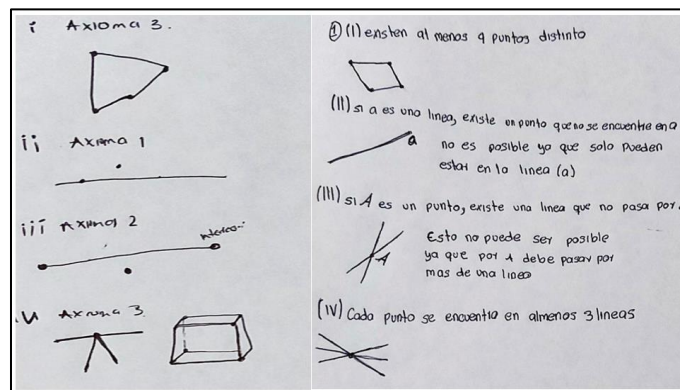


Figura 133. Representación de axiomas por estudiantes Actividad 2.

En el caso del nivel de **Deducción Informal**, aunque se presentaron ciertos esfuerzos de varios estudiantes, sus deducciones no fueron correctas. Este nivel de pensamiento, aunque se considera que las deducciones sean informales, se exige que sean correctas. El razonamiento intuitivo de los estudiantes en esta actividad parece mermado por la complejidad de la presentación de los conceptos, el profesor observa la confusión de los estudiantes ante el uso de axiomas y expresiones formales cuando se definieron los conceptos o cuando se plantearon los problemas. Algunos de los esfuerzos mencionados se presentan en la Figura 14.

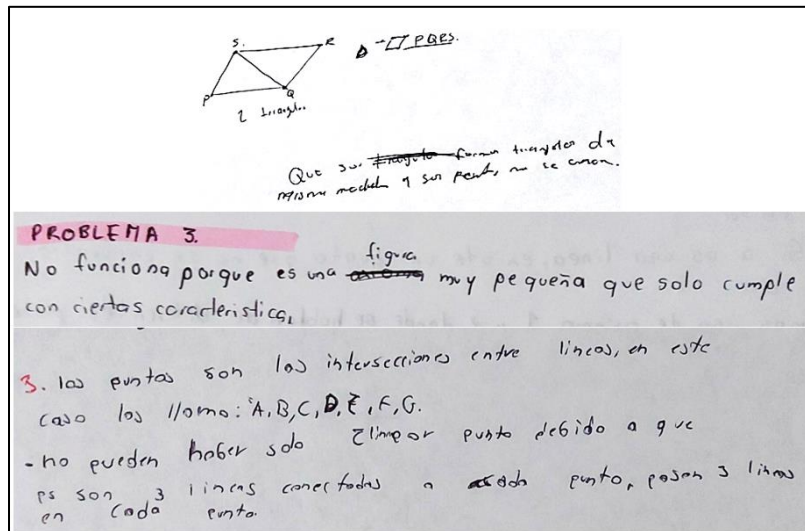


Figura 14. Deducciones informales y aproximaciones de los estudiantes en la Actividad 2.

Por supuesto, a pesar de que la mayoría de los estudiantes se quedaron en un nivel bajo de desarrollo del pensamiento geométrico en esta actividad, también hubo quien se desarrolló satisfactoriamente con los problemas y alcanzó un nivel de **Deducción**. Dos estudiantes, por ejemplo, trabajaron en el análisis y deducción formal de características, establecieron relaciones entre los elementos y manejaron los axiomas de manera correcta en la resolución de los problemas (Figura 15).

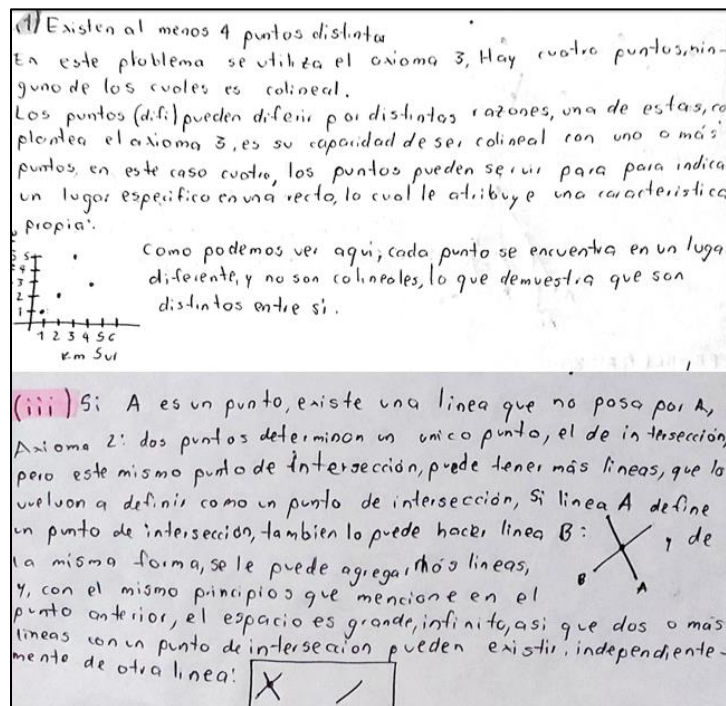


Figura 15. Deducciones formales de los estudiantes y manejo de axiomas en la Actividad 2.

En esta actividad se esperaba que los estudiantes trabajaran de manera rigurosa en la solución del cuarto problema (la representación de algunas configuraciones geométricas basado en un conjunto de reglas ofrecidas en lenguaje simbólico y formal). Sin embargo, a excepción de dos tácitas aproximaciones (Figura 16), no se encontró evidencia de que los estudiantes alcanzaran el nivel de **Rigor** en el desarrollo de la actividad.

Esto fue previsto por el docente investigador al comienzo de la actividad, pues los estudiantes se enfrentaron a diversas dificultades, principalmente ligadas al lenguaje con el que se realizaron los planteamientos de los problemas. Esto sugiere dos escenarios de mejora del estudio: en primera instancia, modificar el lenguaje para facilitar el entendimiento de los estudiantes. En segunda, ampliar el tiempo de reflexión y análisis de los problemas por parte de los estudiantes, pues es conocido que, a pesar de contar con las habilidades y conocimientos requeridos para resolver un problema, si el estudiante no comprende el problema, no podrá resolverlo (Schoenfeld, 1985).

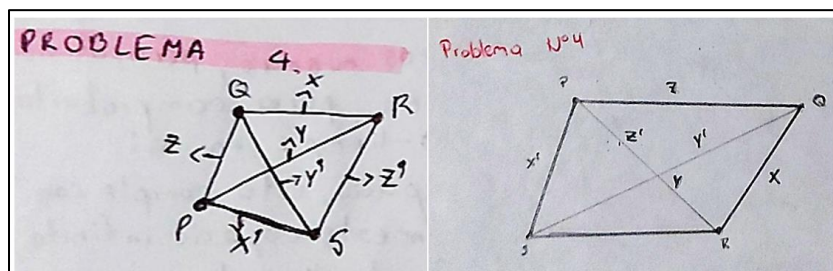


Figura 16. Configuraciones construidas por los estudiantes en la Actividad 2.

Actividad 3 – Teoremas en Geometría Projectiva.

En esta actividad se introdujeron los teoremas de Desargues, Pappus y Pascal. Se trabajó con la construcción de configuraciones, identificación y establecimiento de relaciones, realización de operaciones y transformaciones de los elementos proyectivos con miras a la obtención de características invariantes. Los estudiantes, sin dificultades evidenciadas, alcanzan el nivel de pensamiento geométrico de **Reconocimiento o Visualización** (Figura 17).

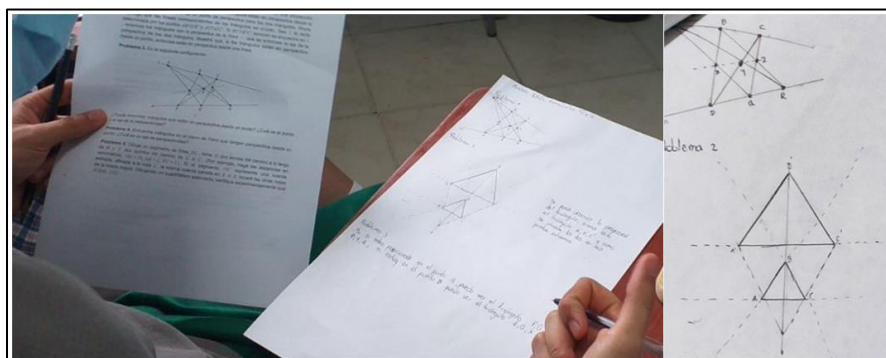


Figura 17. Reconocimiento o visualización en la Actividad 3.

De igual manera, el nivel de **Análisis** fue alcanzado por la mayoría. Los estudiantes determinaron propiedades y mostraron entendimiento de las condiciones de proyectividad.

Esto se observa con claridad en las construcciones elaboradas por los estudiantes (ver Figura 18). Sin embargo, las apreciaciones que realizan sobre las características y propiedades identificadas no son del todo correctas. Por ejemplo, relacionan el tamaño a la proyección “es más grande porque es una proyección”.

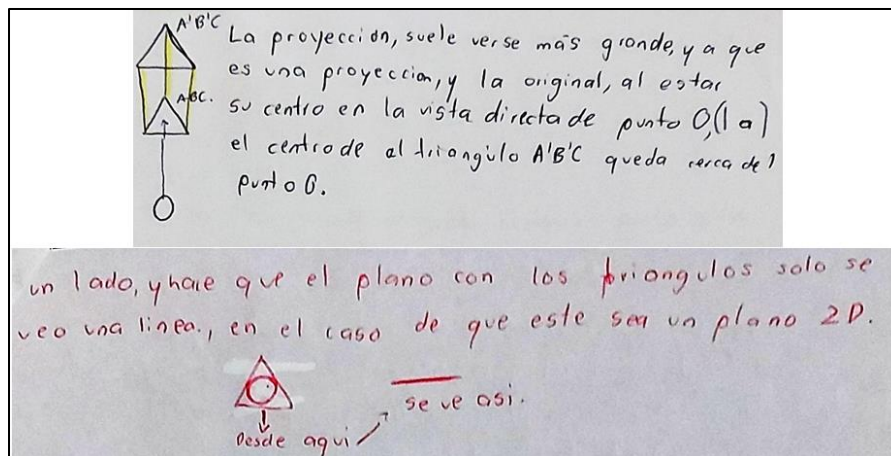


Figura 18. Nivel de Análisis de los estudiantes en la Actividad 3.

En el nivel del pensamiento geométrico de **Deducciones Informales** fue donde se ubicaron la mayoría de los estudiantes participantes de esta actividad. Algunas de las aseveraciones de los estudiantes, aunque no totalmente precisas, se aproximan al resultado buscado. En la Figura 19 se pueden observar un par de ejemplos de lo mencionado.

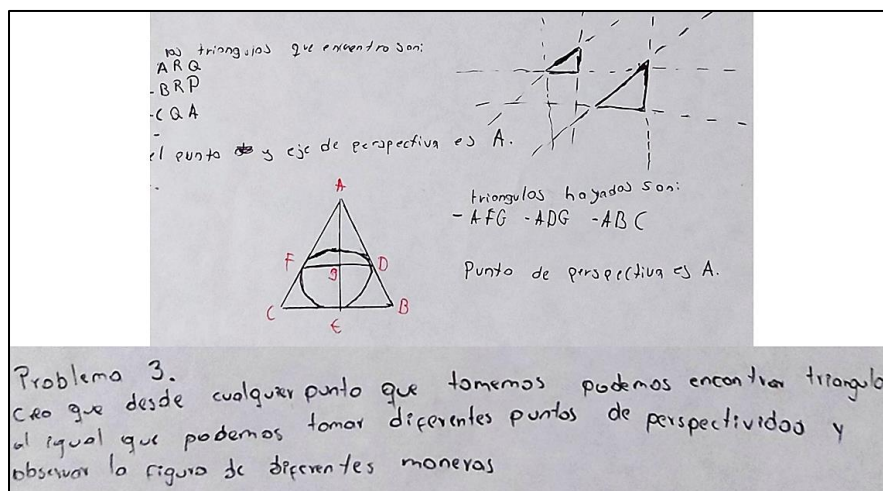


Figura 19. Deducciones informales de los estudiantes en la Actividad 3.

Ejemplos de **Deducciones Formales** también fueron encontrados en los productos presentados por los estudiantes en esta actividad. Se podría considerar que los teoremas planteados en esta actividad, al basarse en configuraciones geométricas simples de replicar por los estudiantes, fueron comprendidas por algunos en alto nivel; el uso de triángulos es bastante familiar para ellos, así que los conceptos nuevos pudieron ser articulados con facilidad (Figura 20).

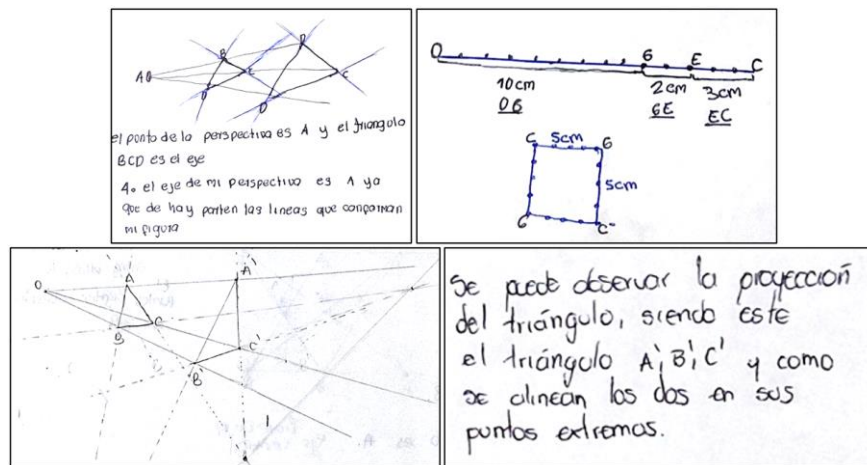


Figura 20. Deducciones formales de los estudiantes en la Actividad 3.

A pesar de observarse algunos intentos y aproximaciones realizadas por los estudiantes, utilizando simbología de distintos sistemas y manipulando las representaciones (Figura 21); no se pueden considerar como evidencia del nivel de pensamiento geométrico de **Rigor**. Estas aproximaciones parecen esfuerzos sin una intención real de abstraer las características y utilizar el sistema simbólico adecuadamente.

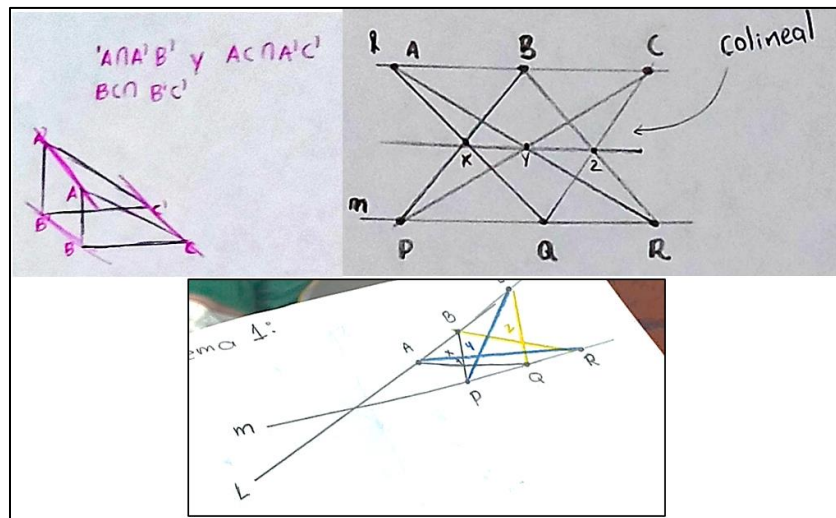


Figura 21. Aproximaciones al nivel de pensamiento de Rigor de los estudiantes en la Actividad 3.

Actividad 4 – Construcción de algunos Teoremas en Geometría Projectiva a través del uso de GeoGebra.

Los problemas retadores implementados en esta actividad, en su totalidad, fueron planteados para ser resueltos en GeoGebra. Las construcciones de los estudiantes en este software especializado dan cuenta del nivel de **Reconocimiento o Visualización** del pensamiento geométrico. En la Figura 22 se puede observar la construcción de ejemplo al lado superior

izquierdo (dispuesta en la actividad como base de la configuración) y alrededor las construcciones elaboradas por los estudiantes.

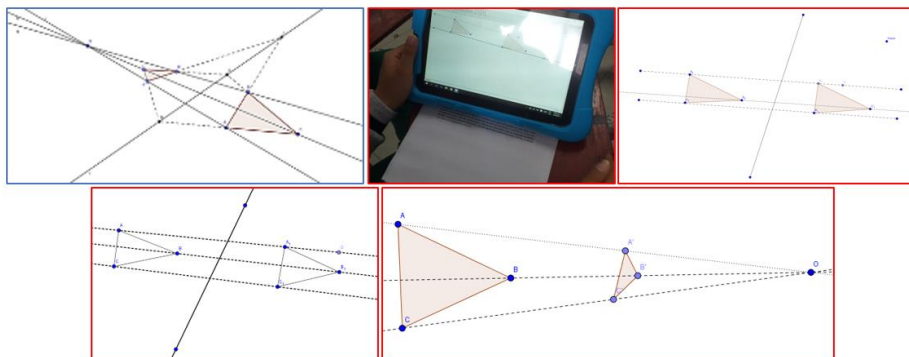


Figura 22. Reconocimiento o visualización de los estudiantes en la Actividad 4.

Al tratarse del primer trabajo meramente en GeoGebra, se observó una mezcla de confusión, ánimo, ímpetu y entusiasmo. Los estudiantes, en su mayoría, construyeron las configuraciones geométricas requeridas para comprobar o rechazar los teoremas, resultados, características, invariantes y relaciones de la geometría proyectiva.

A excepción de dos estudiantes que decidieron no avanzar más en el desarrollo de la actividad, en el resto se evidenció también el nivel de **Análisis** en cuanto a pensamiento geométrico, pues hicieron menciones a regularidades, características y propiedades contenidas en las representaciones utilizadas y elaboradas (ver Figura 23).

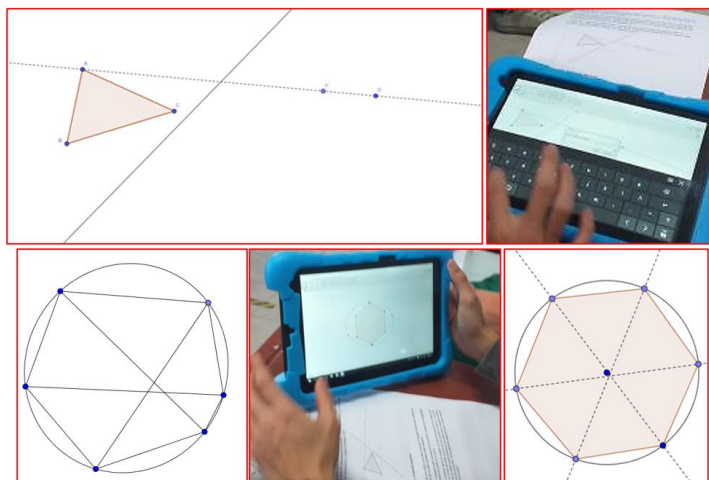


Figura 23. Nivel de pensamiento geométrico: Análisis en la Actividad 4.

Al igual que el análisis, el nivel de pensamiento geométrico de **Deducción Informal** fue alcanzado por la mayoría de los estudiantes. Sin embargo, se encontraron confusiones al momento de deducir con base en las representaciones hechas en GeoGebra, optando en diferentes ocasiones por expresar estas verbalmente porque no podían escribir en el software. Esto es entendible pues el dominio de todas las herramientas de éste requiere más tiempo. Se

debe considerar una capacitación previa de los estudiantes en el uso del software y su combinación con otros para optimizar el trabajo con estas actividades.

Aun así, en la Figura 24 se pueden encontrar algunas de estas deducciones informales elaboradas por los estudiantes cuando resolvieron los problemas retadores propuestos en la actividad 4.

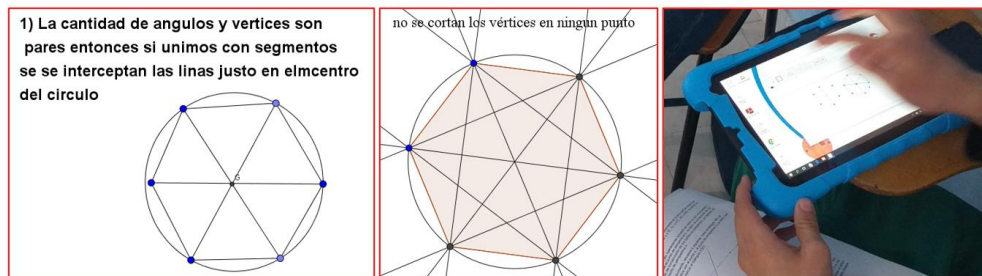


Figura 244. Deducciones Informales de los estudiantes en la Actividad 4.

Lamentablemente, en esta actividad sólo hubo un acercamiento significativo a las **Deducciones Formales**, quedando el resto de los estudiantes categorizados en el anterior nivel del pensamiento geométrico. Esto implica que, al igual que con las otras tres actividades, ninguno de los estudiantes alcanzó el nivel de **Rigor**.

En la Figura 25 se observa la construcción de las cuestiones geométricas involucradas en los problemas retadores 4 y 5 de la actividad 4. La estudiante, con base en el sistema axiomático, obtuvo las relaciones entre los objetos involucrados, generando así los datos relevantes que le permitieron dar solución satisfactoria al problema.

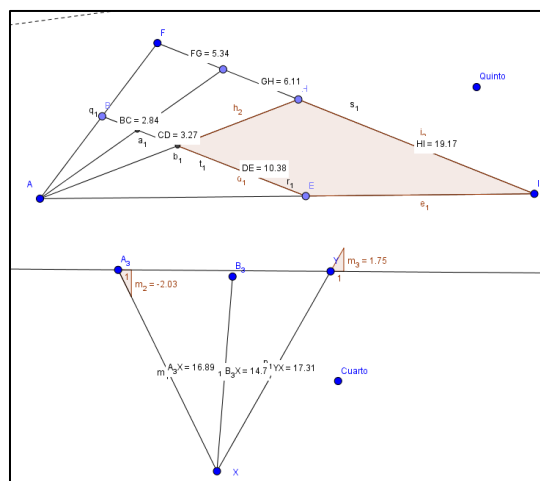


Figura 25. Deducciones formales de la estudiante en la Actividad 4.

Para sintetizar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes a lo largo del sistema de actividades planteadas, se cuantifica en promedio la cantidad de estudiantes en cada nivel por cada actividad. Este promedio de estudiantes por nivel de pensamiento geométrico se presenta en la Figura 26.

Como ya se adelantaba, ninguno de los 15 estudiantes alcanzó el nivel de **Rigor** en el desarrollo de su pensamiento geométrico con las actividades propuestas. Esto era de esperarse, pues este nivel requiere un dominio profundo de los conceptos involucrados, junto con un manejo avanzado de los sistemas axiomáticos y las estructuras de demostración, lo cual se consigue mediante un proceso formativo continuo y con enfoques en la abstracción (Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018).

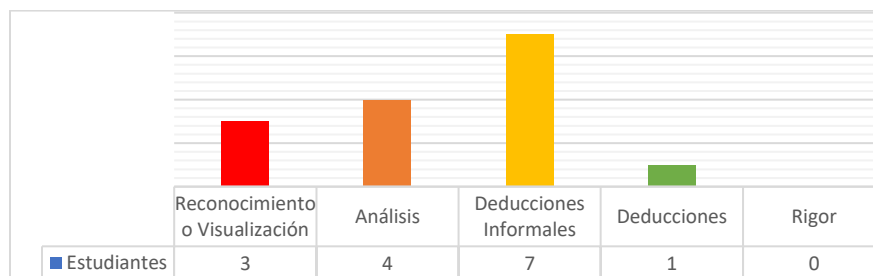


Figura 26. Categorización de los niveles de pensamiento geométrico alcanzado por los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes se ubicaron en el nivel de **Deducciones Informales**. Estos estudiantes pueden organizar de manera lógica las figuras dentro de una configuración geométrica y relacionarlas entre sí por medio del análisis de las características, propiedades u operaciones. Sin embargo, aún son incapaces de asociar las características de las representaciones a un sistema matemático para realizar operaciones y deducir resultados de manera formal (Van Hiele, 1999).

Se considera que los estudiantes, en su mayoría, se quedan en este nivel debido a falencias en su formación en fundamentos básicos de las matemáticas, pues para realizar las conversiones de las representaciones semióticas de los registros gráficos a registros simbólicos (asociar a sistemas matemáticos), se requiere una amplia comprensión de estas bases matemáticas (Crannell, Frantz & Futamura, 2019). Resulta necesario entonces, con el fin de obtener mejores niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, fortalecer las bases matemáticas del estudiantado en formación, antes de integrar cuestiones como la geometría proyectiva.

Esta cuestión también afecta la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, pues dentro de los procesos heurísticos usuales, la manipulación por medio de las operaciones de los elementos involucrados es fundamental, este tipo de conocimiento se considera como *recurso* indispensable para el correcto desenvolvimiento del resolutor (Schoenfeld, 1985). Sin lograr llegar a las deducciones formales, los estudiantes pocas veces resolvieron satisfactoriamente los problemas retadores planteados.

Conclusiones

El pensamiento geométrico desarrollado por los estudiantes a través de las actividades propuestas basadas en la resolución de problemas retadores y el uso de GeoGebra puede caracterizarse en cuatro niveles: reconocimiento o visualización, análisis, deducciones informales y deducciones formales. Principalmente, el pensamiento geométrico de los estudiantes participantes se ubicó en el nivel de deducciones informales, en cual ya pueden

reconocer regularidades, relaciones, características y propiedades de los elementos que hacen parte de una configuración geométrica, sin llegar a asociarlos con sistemas matemáticos en los cuales pueda realizar operaciones.

Si bien es cierto que el pensamiento geométrico desarrollado cuando los estudiantes aprenden geometría proyectiva se fortalece por las actividades propuestas y basadas en la resolución de problemas retadores y el uso de GeoGebra, también es que el nivel alcanzado no es el ideal. A lo largo de la intervención se evidencia la existencia de falencias en el proceso, algunas derivadas del diseño de las actividades, otras de la implementación de éstas y otras más relacionadas con los participantes.

Con respecto a los problemas del diseño de las actividades, al intentar conservar el carácter formal que caracteriza la presentación y uso de axiomas o teoremas, se obtuvo varios escenarios de confusión, angustia y rechazo de los estudiantes, pues la simple denominación de los enunciados como axioma genera temor. Además, la presentación de los problemas retadores en los cuales se utilizaron los axiomas como parte de su planteamiento, fueron en los que peores resultados se obtuvieron. Esto sugiere un inevitable replanteamiento de estos problemas, pues no resultan óptimos para el desarrollo del conocimiento de los estudiantes.

En relación con la implementación, el tiempo dispuesto para el desarrollo de las actividades resultó corto en su mayoría. Los estudiantes, en su afán de resolver los problemas antes del tiempo límite destinado, dejaron de lado la escritura, argumentación o representación gráfica que acompañase sus procesos resolutorios. Este material habría aportado datos significativos al entendimiento del pensamiento geométrico de los estudiantes. Además, algunos no llegaron a entender si quiera el enunciado de algunos problemas, pues no contaron con el tiempo suficiente para analizarlos. Estas cuestiones implican que, si se pretende continuar con una serie de actividades donde los problemas retadores sean la base, debe ofrecerse un espacio más amplio de tiempo para su análisis y resolución.

Finalmente, las problemáticas que se encontraron en el desarrollo de las actividades y que se vincularon con el estudiante, tienen que ver con los *recursos*, ese conjunto de conocimientos previos con los que los estudiantes llegan a enfrentarse al problema, que utilizan para relacionar, vincular o integrar los elementos del problema a situaciones conocidas, a operaciones usuales, o a signos y símbolos de algún sistema matemático. Se observó cómo, los estudiantes que menos fortalezas poseían en cuanto a bases matemáticas, tuvieron más dificultades al resolver los problemas debido a esta incapacidad de relacionar los elementos de la configuración geométrica con sistemas matemáticos, símbolos y signos, para realizar operaciones y obtener resultados.

Por otro lado, aunque se puede observar cómo las representaciones gráficas presentadas en GeoGebra generaron un espacio de dinamismo y novedad en los estudiantes que motivó el trabajo con las configuraciones geométricas, también generó estrés y confusión, pues el software fue un recurso nuevo utilizado por ellos. Superar esta dificultad, para futuras investigaciones, requiere una familiarización previa del estudiantado con el software, sesiones donde no se empiece con la resolución de problemas, sino que se realicen exploraciones, construcciones y manipulaciones.

Para finalizar, debido a las limitaciones propias de un estudio de este estilo, el trabajo sólo considera el pensamiento geométrico desarrollado por los estudiantes en los elementos básicos de la geometría proyectiva y la razón cruzada, Teorema de Pappus, Pascal y Desargues. Esto implica que, como trabajo a futuro, se pueden estudiar implementaciones con problemas retadores que trabajen con otras temáticas de esta geometría. De igual manera, la descripción de las características del desarrollo del estudiante y la categorización de su pensamiento geométrico, abren el camino al análisis y profundización de los mecanismos de estructuración de los conocimientos de los estudiantes.

Bibliografía

- Crannell, A., Frantz, M., y Futamura, F. (2019). *Perspective and Projective Geometry*. Nueva Jersey: Princeton University Press.
- Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 3, pp. i-196.
- Hill, A. M. (1998). Problem solving in real-life contexts: An alternative for design in technology education. *International journal of technology and design education*, 8(3), pp. 203-220.
- Kaenders, R., y Weiss, Y. (2017, February). Historical methods for drawing anaglyphs in geometry teaching. En *CERME 10*. pp. 1739-1747.
- Menghini, M. (2006). The role of projective geometry in Italian education and institutions at the end of the 19th century. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1) pp. 35 – 55.
- Menghini, M. (2019). Luigi Cremona and Wilhelm Fiedler: The Link Between Descriptive and Projective Geometry in Technical Instruction. En Barbin É., Menghini M., Volkert K. (eds) *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic*. Suiza: Springer, Cham. pp. 57-68.
- Polya, G. (1945). *How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method*. Nueva Jersey: Princeton University Press.
- Richter, J. (2011). *Perspectives on projective geometry: a guided tour through real and complex geometry*. Berlin: Springer - Verlag.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Skala, V. (2012). Projective geometry and duality for graphics, games and visualization. En *SIGGRAPH Asia 2012 Courses*. pp. 1 – 47.
- Yudianto, E., Sugiarti, T., y Trapsilasiwi, D. (2018). The identification of Van Hiele level students on the topic of space analytic geometry. *Journal of Physics: Conference Series* 983 (1), pp. 1 – 5.
- Ziatdinov, R. A. (2010). Geometric modeling and projective geometry problems with GeoGebra. En *Proceedings of International Conference on Information Technologies, Tomsk State Polytechnic University, Russia*. pp. 168 – 170.