REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen X Número 1 Fecha: enero-junio de 2022

ISSN: 2395-955X

CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA CON USO DE GEOMETRÍA EN EL SEMICÍRCULO Y SUS DOS REPRESENTACIONES

Elvira Borjón Robles, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Sandra García Quezada

borjonrojo@hotmail.com, ncalvillo@uaz.edu.mx, mtorres@uaz.edu.mx, sandragq_91@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Para citar este artículo:

Borjón, E., Calvillo, N. J., Torres, M. R., García, S. (2022). Cálculo de la raíz cuadrada con uso de geometría en el semicírculo y sus dos representaciones. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, X (1), 1-13.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año X, No. 1, enero-junio de 2022, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

CALCULO DE LA RAÍZ CUADRADA CON USO DE GEOMETRÍA EN EL SEMICÍRCULO Y SUS DOS REPRESENTACIONES

Elvira Borjón Robles, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Sandra García Quezada

borjonrojo@hotmail.com, ncalvillo@uaz.edu.mx, mtorres@uaz.edu.mx, sandragq_91@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Resumen

El presente trabajo reporta los resultados de una situación didáctica, diseñada con los fundamentos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y teniendo como metodología la Ingeniería didáctica, que tiene la finalidad de aportar una herramienta, guiada con el software GeoGebra, que promueva la enseñanza-aprendizaje del cálculo de raíz cuadrada a través de una aproximación geométrica. De igual manera, promueve la identificación de las notaciones $\sqrt{a}$ y $a^{1/2}$ como equivalentes.

Palabras Clave: Exponente ½, raíz cuadrada, aproximación, situación didáctica

Abstract

This research reports the results of a didactic situation designed with the foundations of the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering as a methodology, which has the purpose of providing a tool, guided with the GeoGebra software, that promotes the teaching-learning of the square root calculation through a geometric approximation. Similarly, it promotes the identification of the notations $\sqrt{a}$ y $a^{1/2}$ as equivalent.

Key words: Exponent ½, square root, didactic situation

Antecedentes, problemática y objetivo

Varias investigaciones dan cuenta de la problemática relacionada con el aprendizaje de los exponentes (Lezama, 1999; Martínez, 2007; González, 2010; Barrios, 2015; Dennis y Confrey, 2000; Cantoral y Farfán, 1998; Boyer, 1968; Cajori, 1913; Socas, 1997; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Cadenas, 2007; Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón y Ribeiro, 2013; Rico, et al., 2015). Es importante mencionar que ésta la han vivido los docentes en el aula cuando abordan este contenido. Las investigaciones que se analizan en este trabajo se clasifican de acuerdo con su tipo (Figura 1), a saber:

- Las que muestran los errores cometidos por los estudiantes en el contenido de exponentes.
- Las que realizan un análisis histórico-epistemológico del contenido de exponentes.
- Las que realizan propuestas didácticas para atender la problemática.

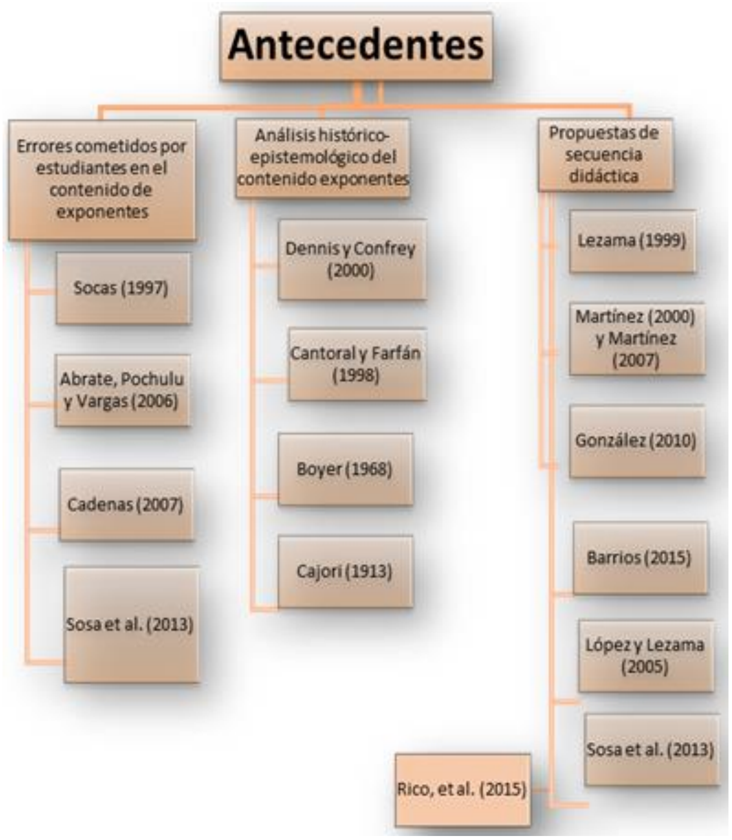


Figura 1. Organización de los antecedentes de acuerdo con el tipo de organización.

Debido a que esta investigación se centra en los errores cometidos por los alumnos, profundizamos en las investigaciones que atienden esta problemática. Así, se entiende por error "intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (Matz, 1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008, p. 312).

En nuestra experiencia hemos observado e identificado que los errores que cometen los estudiantes de nivel bachillerato, respecto al contenido de exponentes, es debido justamente a que para ellos no tiene significado el nuevo conocimiento, esto es, no le encuentran el sentido a que primero se les muestre la propiedad $a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ y posteriormente, el profesor les indique que $a^0 = 1$ o bien que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ por mencionar algunas.

Por ello, en el intento de querer entender las nuevas leyes de los exponentes, en ocasiones tienden a multiplicar la base por el exponente, ya que relacionan dicho contenido con el producto, asociandolo con la primera propiedad $(a^n = a \times a \times a \ldots \times a)$ que se mostró en niveles educativos previos. También se han encontrado algunos trabajos en los que se abordan aspectos relacionados con nuestro objeto matemático como son: dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes al abordar este contenido. Específicamente se identifica que el contenido de exponentes, en particular, el exponente ½ es complicado para los estudiantes, ya que los errores reportados muestran que el contenido no se ha comprendido en su totalidad.

De esta manera se identifica que los estudiantes de los niveles de secundaria, bachillerato y superior no manejan adecuadamente los exponentes racionales, en particular, cometen los siguientes errores:

a) $2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ (Martínez, 2007)

b) Estiman que la raíz con radicando negativo e índice impar tiene un doble resultado reales $\left(\sqrt[3]{-27} = \pm 3\right)$, o que no posee solución en el campo de los reales **(**Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

c) Identifican la semántica de potencias con base entera y exponente fraccionario negativo, como tomar el inverso multiplicativo del exponente $9^{-\frac{1}{2}} = 9^2 = 81$. (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006)

Así, nuestro objetivo es promover la enseñanza-aprendizaje del exponente racional ½ en alumnos de segundo semestre de bachillerato, a través del diseño y aplicación de una situación didáctica con uso de GeoGebra, con los objetivos específicos:

1. Que los alumnos aprendan a obtener una aproximación de la raíz cuadrada utilizando la geometría.
2. Que los alumnos identifiquen que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ a través del uso de la calculadora.

Referente teórico: Teoría de Situaciones didácticas

La definición de situación dada por Brousseau (1999, citado en Panizza, 2003) es la siguiente:

> La situación es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". (p. 3)

Por otra parte, dentro de la situación, se puede encontrar particularmente la situación didáctica que fue definida por Brousseau (1982b, citado en Santaló, et al. 1994) de la siguiente manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p.4)

La definición anterior puede ser mejor descrita mediante el conocido triángulo didáctico o sistema didáctico, que se muestra en la figura 2.

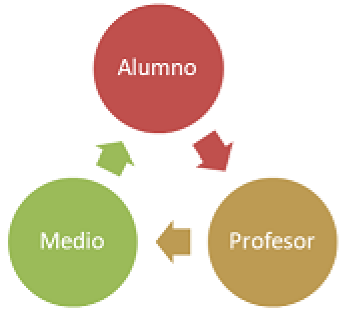


Figura 2. Triángulo didáctico de la teoría de situaciones didácticas.

En la figura 2 se muestra la relación que hay entre el saber, el profesor, el alumno y el medio, dichas componentes deben de aparecer en una situación didáctica y no debe faltar ninguna. En la situación didáctica el medio pueden ser varias cosas como, por ejemplo: material didáctico, recursos tecnológicos, juegos como el dominó, la lotería, entre otras. Es importante resaltar que la situación didáctica siempre debe de tener la intencionalidad de que el alumno aprenda algo.

Brousseau (s.f., citado en Santaló, et al., 1994) hace una distinción de los tipos de situaciones que se pueden encontrar en una situación didáctica, dicha distinción puede verse como etapas de la situación didáctica y son:

1. Las **situaciones de acción**, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Las **situaciones de formulación**, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Las **situaciones de validación**, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierta; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

4. Las **situaciones de institucionalización**, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p. 5).

Metodología

La noción de ingeniería didáctica se originó en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta, ésta surgió como una metodología para realizar Situaciones Didácticas y se define como:

> […] una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios

disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue, 1995, pp. 33-34).

Artigue (1995) menciona que las cuatro fases de la ingeniería didáctica como metodología son:

Fase 1: Análisis preliminar. Se consideran al menos tres dimensiones, las cuales se podrían desarrollar para tener completa la primera fase, son:

1. La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego.
2. La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
3. La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40)

La dimensión epistemológica del objeto matemático que nos ocupa en esta investigación, se reporta que según Dennis y Confrey (2000), aunque John Wallis (1606-1703) no fue la primera persona que sugirió exponentes racionales (fraccionarios), pues antes ya habían sido propuestos por Oresme en el siglo XIV y por Girard y Stevin en el siglo XVI, se le conoce a él como el primero, debido al peso que tuvo su trabajo del Arithmetica Infinitorum (Wallis, 1972), ya que a pesar de que en éste no se muestran demostraciones formales, las definiciones de Wallis son duraderas dentro de las matemáticas debido a que demuestra su viabilidad a través de múltiples representaciones (tabulares, geométricas y algebraicas). Además, el Arithmetica Infinitorum sirvió de base para otros trabajos, por ejemplo, para que Isaac Newton (1642- 1722), desarrollara su famoso binomio.

De igual forma Dennis y Confrey (2000) reportan en su investigación, que desean entender el desarrollo de exponentes racionales en un nivel más profundo y no verlos simplemente como una extensión de patrones numéricos y sus propiedades, ya que éstos surgieron por la necesidad de calcular áreas, límite de razones, razones con números negativos y funciones continuas.

También, Dennis y Confrey (2000) mencionan en su investigación que la historia permite ver diferencias entre índice, exponente y potencia, sin embargo, no comentan cuáles son dichas diferencias, pues, en ocasiones cuando escriben índice, entre paréntesis escriben exponente.

Respecto a los exponentes naturales, Dennis y Confrey (2000) mencionan en su documento, que la Geometría de René Descartes (Descartes, 1952) fue el primer tratado publicado en el que se escribe un exponente natural como un superíndice, es decir, se utiliza un índice para representar la multiplicación repetida (reiterada), escribió x 3 en lugar de xxx.

En la dimensión cognitiva, según Farfán (1997), se distinguen dos aspectos importantes que se deben de realizar.

- Poner en evidencia la diversidad de ideas que se tienen sobre un mismo objeto matemático, las diferentes representaciones que se le asocian al objeto y el tratamiento que se le da.
- Hace una distinción entre los conocimientos que el profesor desearía que sus alumnos tengan y los que realmente han adquirido.

Esta dimensión se refiere principalmente a los estudiantes, es decir, se observa qué conocimientos tienen los alumnos respecto a un determinado contenido.

En esta dimensión se diseñó y aplicó un cuestionario, con la finalidad de identificar los conocimientos previos relacionados con los exponentes fraccionarios y en específico el de ½, de los estudiantes de primer semestre de bachillerato. Este cuestionario se aplicó a 20 estudiantes del Colegio Santa Elena de la Universidad de la Veracruz y a 30 estudiantes de la Preparatoria plantel V de Universidad Autónoma de Zacatecas. Obteniéndose del análisis que se realizó, que ningún estudiante logró proporcionar un valor correcto para el exponente fraccionario.

La dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Hace referencia al papel del maestro, a través de los procesos de enseñanza, orienta, dirige, facilita y guía la interacción de los alumnos con el saber colectivo, para que ellos construyan su propio conocimiento.

Para desarrollar esta dimensión se diseñó y aplicó a profesores de secundaria y bachillerato un cuestionario y se realizó un análisis de los programas de estudio del nivel bachillerato (contenido de exponentes).

El cuestionario se aplicó a nueve profesores, tres de secundaria y seis de bachillerato. El objetivo del cuestionario era obtener información acerca de la forma en que los maestros abordan el contenido de exponentes. Se aplicó a maestros de secundaria y bachillerato debido a que se considera que los alumnos empiezan a ver el contenido desde este nivel. Obteniéndose los siguientes resultados: Los profesores de ambos niveles educativos hacen hincapié en que los estudiantes presentan mayores dificultades respecto al contenido de exponentes, cuando éstos son negativos y fraccionarios. Entonces, respecto a los exponentes $1/n$, m/n y $-m/n$ se identifica que los profesores los enseñan mediante la propiedad $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, la digan o no explícitamente, de todos modos, la utilizan.

Algo relevante de todo esto, es que utilizan dicha propiedad sin dar más explicación porque no hay una demostración que pueda ayudar a que los estudiantes comprendan por qué la veracidad de tal igualdad. Es por lo que, en esta investigación se considera de suma importancia abordar este tipo de exponentes, para poder diseñar una situación didáctica que sirva como alternativa para la enseñanza de tales exponentes en el nivel bachillerato, para que los profesores cuenten con una propuesta alternativa de enseñarlos y para que los estudiantes comprendan por qué es verdad la propiedad, ya que, si los estudiantes no comprenden el porqué de las cosas, difícilmente podrán aprenderlo. Esta información recopilada de las respuestas que proporcionaron los profesores en los cuestionarios es de suma importancia, pues puede corroborarse que tal y como lo indican los antecedentes, los alumnos tienen dificultades para entender los exponentes, lo cual da sustento a la presente investigación. Además, muestra el camino que hay que seguir para elaborar el diseño, pues éste irá principalmente enfocado a los exponentes racionales, en particular ½.

Fase 2: Concepción y análisis a priori. Artigue (1995) destaca que el análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva en las cuales se debe realizar lo siguiente: Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

Fase 3: Experimentación. De acuerdo a De Faria (2006) es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con los estudiantes objeto de la investigación. Específicamente, la experimentación supone:

- ✓ La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- ✓ El establecimiento del contrato didáctico;
- ✓ La aplicación de los instrumentos de investigación;
- ✓ El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Fase 4: **Análisis a posteriori y validación.** Según De Faria (2006)

> Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc. La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, el a priori y a posteriori (p. 5)

Descripción del Instrumento.

El material que se facilitó (Figura 3) a cada equipo fue:

- 1 juego de hojas de la actividad,
- 3 hojas de papel milimétrico,
- 3 plumas (1 negra, 1 roja y 1 azul)

1 compás, 1 regla graduada

Figura 3. Materiales entregados a cada equipo.

En el instrumento se describen las instrucciones respecto del uso del material, incluye tres construcciones geométricas, diez preguntas relacionadas con las construcciones geométricas y tres preguntas abiertas para que el alumno refleje el procedimiento para el cálculo de raíces cuadradas, usando la geometría. También incluye preguntas relacionadas con las dos notaciones equivalentes entre sí, $\sqrt{\ }$ y $^{\frac{1}{2}}$, permitiendo que usen la calculadora. Específicamente

- En el punto I se consideran tres construcciones geométricas guiadas, en las que el objetivo fue que los alumnos calcularan las raíces cuadradas como $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\sqrt{\mathbf{3}}$ y $\sqrt{\mathbf{4}}$ apoyados de la geometría
- En el punto II ya sin guía del docente se solicita a los alumnos que calculen las raíces cuadradas de $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$

- En el punto III se solicita a los alumnos que calculen valores como por ejemplo $\sqrt{\mathbf{7}}$ y $7^{\frac{1}{2}}$ utilizando la calculadora.

La situación didáctica se aplicó a 29 estudiantes (14 binas) de 2º A de la Preparatoria V de la UAZ, ubicada en Jerez de García Salinas, Municipio del Estado de Zacatecas.

Resultados

Situación de acción, formulación y validación. Aproximación de $\sqrt{2}$, en este cálculo nos apoyamos del GeoGebra proyectado en el pizarrón para orientar al alumno y conforme se realizaban los trazos en el pizarrón, cada equipo lo realizaba en la hoja de papel milimétrico. En general se tuvo buena respuesta de los alumnos, ya que 9 de 12 equipos contestaron con la aproximación de 1.4 y 3 de 12 equipos contestaron con la aproximación de 1.5 lo que en general para nosotros fueron resultados adecuados, ya que se trata de una aproximación de un número irracional, observe la figura 4.

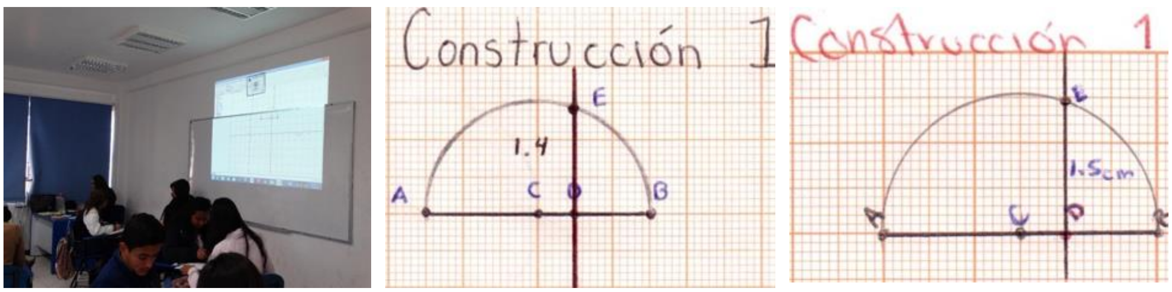
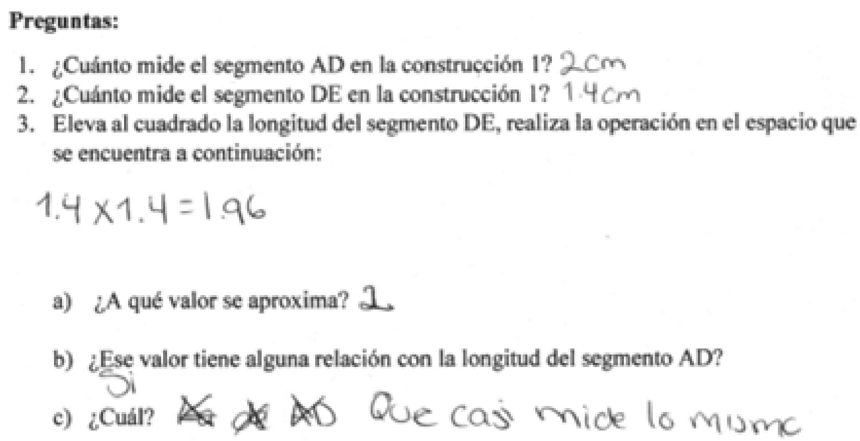


Figura 4. Imágenes que reflejan las situaciones de acción y formulación del cálculo de $\sqrt{2}$.

Análogamente los alumnos reaccionaron de manera parecida a las situaciones de acción y formulación cuando se solicitó que calcularan $\sqrt{3}$, en este caso 7 de 12 equipos encontraron que era igual a 1.7 y 2 de 12 equipos obtuvieron como respuesta 1.8, el resto de los equipos proporcionaron las respuestas de 1.65, 1.57 y 1.6.

Derivado de las construcciones que los alumnos realizaron para encontrar el valor de $\sqrt{4}$, se identifican las situaciones de acción y formulación cuando 5 de 12 equipos encontraron que era el valor de 2, 4 de 12 equipos encontraron el valor de 1.9 y el resto de los equipos proporcionaron los valores de 2.2 y 2.5.

Para que los alumnos relacionaran la raíz cuadrada de un número con su cuadrado, se plantearon varias preguntas a las que respondieron positivamente como se puede ver en la figura 5.



Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1? 2cm
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1? 1.4cm
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

1.4 x 1.4 = 1.96

a) ¿A qué valor se aproxima? 2

b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD? Si

c) ¿Cuál? ~~AD~~ ~~de~~ ~~AD~~ Que casi mide lo mismo

Figura 5. Identificación de los alumnos de la raíz cuadrada con el cuadrado de un número.

En aplicación de la parte II del instrumento, se solicitó a los alumnos que encontraran los valores de $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$ utilizando el material que se porporcionó y teniendo en cuenta las explicaciones previas. En general los alumnos respondieron adecuadamente, excepto por variaciones de milimetros obtenidas de la abertura del compás y el grosor de la punta (Figura 6).

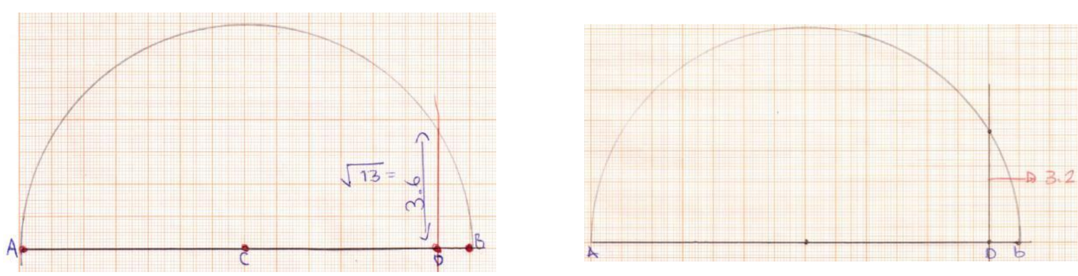


Figura 6. Cálculo de $\sqrt{13}$.

Situación de validación. En general la respuesta de los equipos para validar los resultados se dio y fue positiva, ya que les permitió que los equipos que no contestaron adecuadamente corrigieran sus resultados (Figura 7).

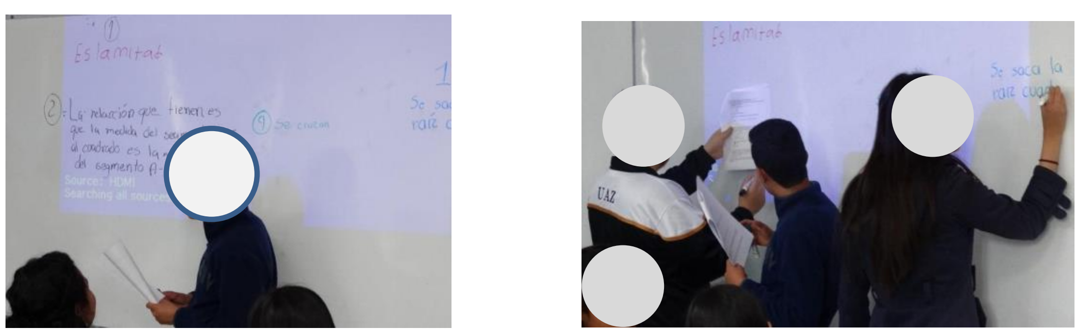


Figura 7. Situación de validación.

La situación de institucionalización se realizó de acuerdo con lo planeado y apoyándose del GeoGebra (Figura 8).

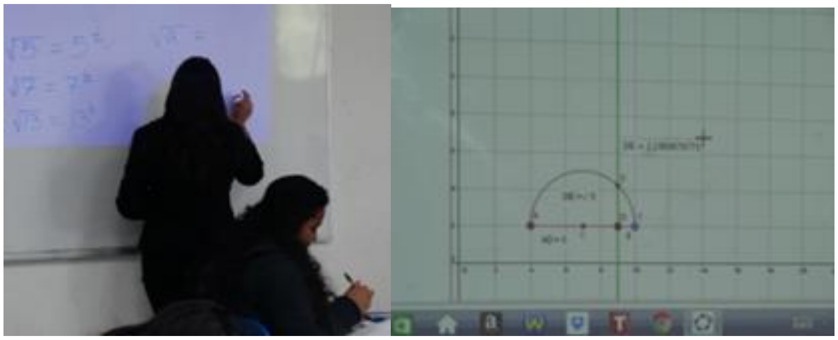


Figura 8. Institucionalización.

Para que los alumnos identificaran que las notaciones $\sqrt{a}$ y $a^{1/2}$ son equivalentes, en el instrumento impreso se dio la indicación de que con el uso de la calculadora realizaran operaciones tales como $\sqrt{5}$ y $5^{1/2}$ y varios otros casos particulares y describieran lo que observaban, la mayoría de los equipos respondió adecuadmente ver Figura 9.

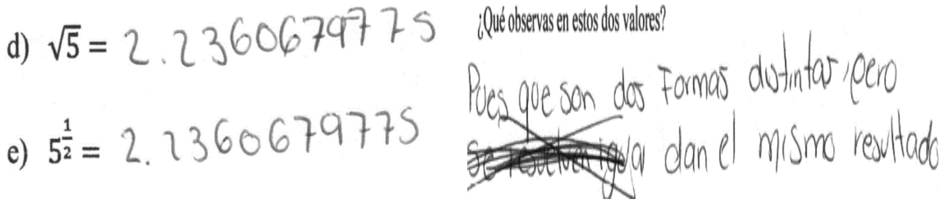


Figura 9. Identificación de las notaciones $\sqrt{a}$ y $a^{1/2}$ como equivalentes.

Conclusiones

En la dimensión didáctica de nuestra metodología, en el instrumento que se diseñó y aplicó a los docentes de secundaria y bahcillerato, resultó que ellos, generalmente, lo que hacen al abordar el contenido de exponentes es presentar las propiedades y enseguida, un ejemplo numérico de cada una de éstas. De igual forma y de acuerdo con la metodología, en la dimensión cognitiva, también se diseñó y aplicó un cuestionario con la finalidad de identificar los conocimientos previos de los alumnos respecto del contenido de exponentes, en el que se identificó que cometieron los errores reportados por Abrate, et al. (2006) y Martínez (2007), y en algunas ocasiones se identificaron otros errores, como por ejemplo: $2^{1/2} = \frac{5}{2}$, donde suman la base y el exponente como si se tratará de una fracción mixta.

Al realizar la fase de experimentación y realizar el análisis a posteriori y la validación de la Ingeniería Didáctica, se identificaron diferentes problemáticas que permitieron el diseño de la secuencia didáctica sobre el contenido del exponente racional $1/2$, que se desarrolló en la fase de concepción y análisis a priori.

Refiriéndonos a nuestra actividad, consideramos que se obtuvieron los resultados esperados, ya que se pretendía que los alumnos aprendieran a calcular la raíz cuadrada de un número utilizando la geometría y la tecnología, y además, que lograran identificar que $\sqrt{5} = 5^{1/2}$, $\sqrt{7} = 7^{1/2}$ y en general, que el resultado de calcular la raíz cuadrada de un número positivo cualquiera es lo mismo que elevar el número al exponente un medio. Lo anterior en general lo lograron la mayoría de los equipos ya que pudieron obtener la raíz cuadrada aproximada de los números: 7, 13 y 17 utilizando la geometría de un semicírculo. Cabe mencionar que durante la situación de instiucionalización, una alumna comentó espontáneamente que "$\sqrt{5}$ era lo mismo que $5^{1/2}$ solo que se escriben de manera diferente".

En general, se concluye que los alumnos pasaron por todas las etapas o situaciones, que según Brousseau (1986), son necesarias para adquirir un conocimiento, éstas son: acción, formulación, validación e institucionalización, donde es importante señalar, que no necesariamente fue en ese orden. Es posible afirmar que los equipos pasaron por tales situaciones, pues en la videograbación, se puede identificar que aparte de la situación de acción y formulación, se presentó la validación al interior del equipo, cuando por ejemplo, los alumnos discutían entre ellos las diferentes soluciones que tenían para un determinado problema y terminaban eligiendo únicamente una. Se dio la validación de manera grupal, ya que algunos equipos de los que pasaron al pizarrón lograron convencer a sus compañeros para que cambiaran su respuesta, se hicieron preguntas para que los alumnos reflexionaran sobre la respuesta correcta. La institucionalización se realizó en tiempo y forma, de acuerdo con lo planeado.

Referencias Bibliográficas

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en matemática, análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barrios, L. (2015). Los números impares y las potencias de los números naturales. *Números, 88*(1) 55-74.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York, USA: Wiley International Edition.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *ORBIS,* (6), 68-84.

Cajori, F. (1913). History of exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly, 20*(3), 75-84.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales", 42*(1), 1-22.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática, 1*(2), 1-9.

Dennis, D. y Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: un studio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 5-31.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González, R. D. (2010). *"Análisis de una situación didáctica de la función exponencial $f(x) = 2^x$ en alumnos de Bachillerato"*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial.* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales.* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2007). Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 123-167). México: Ediciones Díaz de Santos.

Panizza, M. (2003). II Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. 1-17. Rico, L., Ruíz, J. F., Fernández, J. A., Castro, E., Martín, E. y Vílchez, M. (2015). Concepciones y significados en una tarea matemática escolar. *Suma.* 67-76.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra, PNA, 311-322.

Santaló, L., Gálvez, G., Chrismay, R., Brousseau, G. y Sadovsky, P. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Sosa, L., Huitrado, J. L., Hernández, J. A., Borjón, E. y Ribeiro, C. M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos - um exemplo de álgebra. *Atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013).*