Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior

Marcela Götte
Ana María Mántica
Facultad de Humanidades y Ciencias.
Universidad Nacional del Litoral.
Santa Fe, Argentina.

Resumen: *Se presenta una categorización de errores en estudiantes universitarios de profesorado en matemática al realizar demostraciones en el contexto de la geometría 3D, particularmente focalizada en conceptos de paralelismo y perpendicularidad. En el marco de una investigación cualitativa a partir de artefactos escritos disponibles, se esboza una categorización. Se establecen dos grandes tipos de errores: los generales, que pueden ser de cualquier área de la matemática, y los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. A partir de esta categorización y de aportes de referentes teóricos se establece una nueva tipología que cuenta con siete tipos de errores.*
Palabras clave: *geometría 3D; paralelismo; perpendicularidad; tipología de errores*

Categorization of errors in 3D geometry in higher level students

Abstract: *We present a categorization of errors in university prospective mathematics teachers when demonstrating in the context of 3D geometry, particularly focused on concepts of parallelism and perpendicularity. From a qualitative research based on available written artifacts we outline a categorization. We set two major types of errors, the general ones that can be from any area of mathematics and individuals specifically referring to the geometry of space. From this categorization and contributions from theoretical references we establish a new typology that has seven types of errors.*
Keywords: *3D geometry, parallelism, perpendicularity, errors typology*

Un tópico presente en la agenda de investigación en educación matemática es el concerniente a errores. Esta temática es estudiada desde diferentes enfoques y referida a distintas áreas de la matemática.

El objetivo del estudio que se presenta es exponer la producción de una categorización de errores en alumnos del profesorado en matemática, de la facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, al realizar demostraciones en el contexto de la geometría euclídea tridimensional.

El error es considerado por Rico (1995) como uno de los puntos en los que se establece una línea divisoria entre dos estereotipos de profesor de matemáticas, por un lado, el que considera que el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno o de un grupo de alumnos y que debe ser controlado, corregido o, en su defecto, penalizado; y por otro, el que sostiene que el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir, cuando ello sea posible, evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Propone una alternativa a la primera postura, sosteniendo que los errores y las ideas imprecisas de los alumnos tienen una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos, es decir que se produzca un aprendizaje significativo.

El documento regulatorio del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación (2018) plantea en sintonía con lo anterior, que un error estaría mostrando una forma de pensar provisoria.

> Frente a los "errores" descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo para desafiar esa comprensión y promover la aparición de nuevos significados. Habrá entonces que volver sobre la noción involucrada, cuestionándola con contraejemplos e interrogantes que ayuden a los/as estudiantes a volver sobre sus ideas y reformularlas. No es evitando los "errores" como se acorta el proceso de aprendizaje, sino que al trabajar sobre ellos y debatirlos, es como se lo enriquece (p. 48).

El análisis de los errores de los alumnos en su proceso de aprendizaje de la matemática puede proveer de información acerca de cómo se construye el conocimiento, imprescindible para realimentar los procesos de enseñanza y de aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Este estudio se enfoca particularmente en la geometría euclídea, la que se funda en las siguientes normas: enunciar, sin definición los conceptos primeros; admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos enunciando los axiomas correspondientes y a partir de éstas, demostrar las restantes propiedades o teoremas. En el Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario (2010) se expresa que una particularidad de esta geometría es su eje vertebrador (el sistema axiomático euclídeo para la organización y comunicación de los conocimientos geométricos) y se plantea su relevancia en trabajarlo en la formación del profesor de matemática. Lo propio de la Geometría Euclídea Espacial (GEE), marco en el que se desarrolla este estudio, son los problemas de demostraciones de propiedades que se deducen de los axiomas o de otras propiedades demostradas anteriormente, espacio propicio para esta investigación.

1. MARCO TEÓRICO

Se exponen clasificaciones de errores que aportan de manera significativa a la categorización fruto de este trabajo.

Franchi y Hernández de Rincón (2004) realizan una investigación exploratoria, con alumnos de Geometría de la Facultad de ingeniería de LUZ, Venezuela, donde proponen una tipología de errores en el área de la geometría plana. La tipología consta de ocho categorías:

- Errores de pre-requisitos referidos al uso inadecuado de las notaciones del álgebra.
- Errores propios del lenguaje geométrico, el uso inadecuado de notaciones de figuras y elementos geométricos; demostración de proposición en discordancia con el enunciado de un problema o descripción defectuosa de la construcción de figuras geométricas.
- Errores gráficos: dibujo de una figura geométrica que no corresponde con el enunciado del problema propuesto, mal uso de datos de una figura.
- Errores de razonamiento: añaden hipótesis que no están dadas en la solución de un problema; demuestran o resuelven un problema sin utilizar algún dato; usan un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación; interpretan o usan inadecuadamente una definición; usan el recíproco de una implicación como verdadera o una implicación que no es verdadera.
- Errores de transferencia: aplican defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas en un problema planteado.
- Errores de técnica: enuncian proposiciones ciertas sin justificaciones o mal justificadas o utilizan un algoritmo adecuado, pero no llegan a la solución.
- Errores de tecnología: seleccionan un procedimiento, algoritmo o ecuación en forma incorrecta o violentan las reglas de la lógica.
- Errores azarosos: manipulan inadecuadamente los signos algebraicos o ejecutan mal operaciones aritméticas.

Radillo Enríquez (2011) centra su investigación en los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclídea que presentan los estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara en México. Sostiene que “[…] el planteamiento de una demostración requiere un *proceso de traducción* de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica” (p. 431). Plantea tres tipos de errores en la solución de problemas de la geometría euclídea, no excluyentes entre sí y pudiendo cada tipo de error tener consecuencias en los otros. El primer tipo incumbe al factor lingüístico y los otros dos a las particularidades de la asignatura. Los tipos de errores son:

- Errores de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas;

- Errores deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado;
- Errores axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema.

Selden y Selden (2003) realizan un estudio con alumnos de álgebra abstracta, en universidades de los Estados Unidos, Turquía y Nigeria. Proponen una clasificación de los errores que cometen los estudiantes al realizar una prueba, en dos grandes tipos: los que se basan en conceptos erróneos subyacentes y otros que son de naturaleza técnica que se observan repetidamente.

Respecto a los primeros consideran los siguientes subtipos:

- Comenzar la prueba por la tesis: consideran un error de este tipo cuando los estudiantes empiezan la demostración con la conclusión y llegan a una verdad obvia sosteniendo que la prueba está completa.
- Los nombres confieren existencia: este error ocurre cuando un estudiante intenta resolver una ecuación, sin cuestionar si existe una solución.
- Las diferencias aparentes, son reales: la idea errónea subyacente es que hay una correspondencia uno a uno entre los nombres y los objetos matemáticos.
- Usar el inverso de un teorema: la idea errónea consiste en equiparar una implicación y su inversa.
- Las leyes de los números reales son universales: aplican las reglas de los números reales sin discriminar el contexto.
- Conservación de las relaciones: la idea subyacente es que hacer lo mismo a ambos lados de cualquier ecuación preserva la ecuación.
- Interpretación indistinta entre elementos y conjuntos: los estudiantes entienden las proposiciones que involucran elementos más fácilmente que las proposiciones equivalentes sobre conjuntos.
- Respecto a los errores de naturaleza técnica consideran los siguientes subtipos:
- Símbolos sobre extendidos: este error ocurre cuando se usa un símbolo para dos conceptos distintos.
- Debilitar un teorema: este error ocurre cuando lo que se usa es más fuerte que la hipótesis o cuando lo que se prueba es más débil que la conclusión.
- Inflexibilidad de notación: este error surge de la incapacidad de adaptar la notación de un contexto a otro.
- Uso indebido de teoremas: un error de este tipo surge de la incomprensión o el descuido parcial de la hipótesis o la interpretación errónea de la conclusión.
- Circularidad: este error consiste en utilizar en la demostración de un teorema una proposición equivalente a la que se está probando.
- Prueba localmente ininteligible: en este error, no se pueden entender ni la prueba en su conjunto ni la mayoría de las oraciones individuales.
- Sustituir sin justificar: este error consiste en obtener una proposición de otra utilizando una sustitución injustificable.
- Ignorar cuantificadores: este error resulta de no notar restricciones en las variables, se piensa que una variable se cuantifica universalmente cuando no es así.

- Agujeros: este tipo de error consiste en afirmar que una proposición se deriva inmediatamente de resultados previamente establecidos cuando en realidad se requiere un argumento considerable.
- Uso de información fuera de contexto: se usa un argumento de un contexto incorrectamente en otro porque aparecen símbolos idénticos en ambos escenarios.

Ramírez Uclés (2012) en el marco del programa de Estímulo del Talento Matemático en Andalucía realiza un estudio que se propone diseñar buenas prácticas docentes para la mejora de la visualización, con estudiantes entre 14 y 16 años. Para delimitar los errores y dificultades a considerar en el diseño de intervención de la investigación realiza una contrastación entre los errores detectados en una prueba piloto y la revisión bibliográfica realizada. Presenta así los siguientes tipos de errores y dificultades.

- Error al relacionar plano y espacio: falsa analogía plano-espacio. Confunden propiedades en el plano con las correspondientes en el espacio.
- Error al generalizar: no discutir todos los casos posibles y razonar limitándose a ejemplos concretos.
- Errores en los contenidos de enriquecimiento: Confunden los elementos matemáticos de razonamiento y los elementos de contenido matemático.
- Dificultades para la comunicación de las argumentaciones visuales. complicaciones para comprender el razonamiento espacial.
- Dificultad en la terminología. desconocimiento de la terminología adecuada y uso del lenguaje no-convencional.
- Dificultad en la necesidad de utilizar movimientos o elementos del entorno.
- Dificultad para verbalizar los procesos mentales.
- Dificultad para describir las representaciones visuales. muestran carencias de habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales.

Las investigaciones referenciadas anteriormente se proponen en contextos diferentes, sea por el nivel académico de los estudiantes o por los conceptos matemáticos estudiados, al de este trabajo. No obstante, estos aportes se consideran fundamentales para realizar la categorización que se presenta en este artículo.

2. MARCO METODOLÓGICO

Como se mencionó, en este trabajo se pretenden investigar los errores de los alumnos al resolver los problemas planteados en la cátedra de GEE del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina. Respecto a la prueba, Weber (2013) la presenta como un problema a resolver por los estudiantes universitarios, sostiene que éstos necesitan estrategias y heurísticas que les ayuden a decidir cómo encararlas. Esta noción sobre la prueba sintoniza con lo que Pólya (1970) considera problemas de demostrar y es el modo de trabajar con demostraciones en la propuesta de la cátedra.

Se procura detectar, analizar y clasificar los errores de los alumnos, futuros docentes, en el trabajo con demostraciones geométricas con el fin de contar con aportes para optimizar el abordaje de la geometría 3D (particularmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad) y de los procesos de demostración inherentes al método axiomático deductivo.

Esta es una investigación cualitativa pues se ocupa de “la comprensión de los fenómenos sociales desde la perspectiva de los participantes. Esto ocurre a través de la participación, hasta cierto punto, del investigador en la vida de los sujetos durante la investigación” (McMillan y Schumacher, 2005: 19). Una característica de este tipo de investigación es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. Un empleo cuidadoso, de estos datos, proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000).

El alcance del estudio es exploratorio. Según Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2003) “Los estudios exploratorios se efectúan normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes” (p. 115). Si bien existen estudios sobre errores y dificultades, la mayoría no se refieren a errores geométricos. Aquellas investigaciones, a las cuales se tuvo acceso, que abordan el tema de errores geométricos no refieren específicamente a errores que involucran las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 3D ni en contextos similares al de este trabajo con estudiantes de profesorado en Matemática. Según estos autores, el valor de este tipo de estudios consiste en que permiten “establecer prioridades para investigaciones futuras o sugerir afirmaciones y postulados” (p. 116).

En la primera etapa de esta investigación se procesan parciales disponibles, archivados en el departamento de matemática, de una cohorte de estudiantes de la cátedra GEE. La asignatura GEE se ofrece en el primer cuatrimestre de tercer año, la carrera se estructura en cinco años. Tiene como correlativas a Geometría Euclídea Plana y a Taller Informático. Además de estas dos asignaturas, los alumnos tienen el cursado de las materias Matemática Básica (donde, además de otros contenidos, se desarrollan conceptos de lógica), Taller de Métodos de Demostración en Matemática, Cálculo I y II; Álgebra Lineal I y II, entre otras. Así, los alumnos tienen además del bagaje de sus estudios de la escuela obligatoria, experiencias en este nivel en temas de geometría Euclídea y en métodos de demostraciones deductivas al momento de cursar esta asignatura.

A partir de un estudio exploratorio se esboza una tipología de errores considerando los aportes de diversos estudios, entre otros los de Franchi y Hernández de Rincón (2004), Selden y Selden (2003) y Ramírez Uclés (2012) y registros sistemáticos obtenidos por experiencia de las investigadoras. El énfasis está puesto en detectar los errores lo más objetivamente posible poniendo el acento no en las causas del error sino en lo que hace el estudiante. No se busca en esta instancia evitar solapamientos ni establecer el menor número de categorías. Se propone un formato de presentación que haga accesible la interpretación de las demostraciones y de los errores.

El parcial de la asignatura GEE al que se accede consta de los siguientes tres problemas:

1. a) Determinar una condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano. Demostrar.
   b) Demostrar que dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.
2. Dada la proposición: "Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas a y b cualesquiera.
   a) Determinar si es verdadera o falsa.
   b) Si es verdadera demostrarla y si es falsa determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla.
3. a) Obtener y demostrar que transformación se obtiene al componer una simetría especular por una traslación de vector perpendicular al plano de simetría.
   b) Determinar los elementos de la transformación resultante.

Consignas del parcial

Se decide considerar para el análisis los problemas 1.b) y 2 los cuales incluyen los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D. Sólo se escogen las pruebas que tienen por los menos uno de estos dos problemas resueltos.

En una primera instancia se leen varias veces las demostraciones y luego se desglosan en fragmentos y se organizan las producciones en tablas.

Tablas utilizadas para organizar las resoluciones de los estudiantes

Frag.	**Descripción de la resolución**	**Comentarios**
1		

La columna "Frag." contiene los números de fragmentos de la resolución del problema descripto en la fila correspondiente. Estos fragmentos, que respetan el orden de las argumentaciones, son tomados por el investigador para facilitar la descripción de "tramos" de las producciones de los estudiantes. La columna "Descripción de la resolución" contiene un resumen de la resolución del alumno, o en algunos casos transcripciones de párrafos significativos (los que se encuentran entre comillas) y el dibujo realizado, si existe. La columna "Comentarios" contiene acotaciones o aclaraciones referentes a los pasos correspondientes por parte de las investigadoras.

Se analiza la demostración por más que se detecte un error que la invalida, como por ejemplo que no se pruebe lo que se pide o que esté incompleta o que se considere otra propiedad que no es la dada, entre otras. En todos los casos, se analiza la propiedad que el estudiante propone.

El parcial de la cohorte seleccionada lo realizan 21 estudiantes de los cuales 14 cumplen la condición de haber realizado al menos uno de los problemas a analizar. Se enumeran correlativamente del 01 al 14 dichos artefactos escritos.

3. DISCUSIONES Y RESULTADOS

En este apartado se expone la categorización producida a partir del análisis de los parciales analizados y de los referentes teóricos.

3.1. Primera categorización de errores

En esta etapa se estudian artefactos escritos, parciales de estudiantes, y se esboza una primera categorización. Se establecen dos grandes tipos de errores: los generales, que pueden ser de cualquier área de la matemática, y los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. En esta instancia no se pretende establecer el menor número de categorías por lo cual pueden presentarse solapamientos entre ellas.

Respecto a los errores generales se proponen los siguientes tipos:

G1- *Demuestra otra proposición distinta a la pedida.*

G2- *Escribe mal la tesis, la hipótesis o ambas.*

G3- *Hace un dibujo que no representa la situación planteada.*

G4- *Para la demostración emplea elementos que están en la representación.*

G5- *Usa en la demostración una proposición posterior a la que prueba.*

G6- *Demuestra algo que tiene por construcción o hipótesis.*

G7- *Contradice la hipótesis o un paso anterior de la demostración. Deduce incorrectamente información, no justifica todos los pasos o inventa datos.*

G8- *Emplea incorrectamente equivalencias lógicas entre proposiciones: recíproco o inversa.*

G9- *Considera mal el antecedente de una proposición (agrega, quita o considera el consecuente como el antecedente). No verifica las condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc.*

G10- *Usa el lenguaje o escritura geométrica de manera imprecisa.*

G11- *Realiza mal uso de axiomas: los demuestra, los modifica, los contradice. Tratamiento incorrecto de axiomas.*

Respecto a los errores particulares de la Geometría Euclídea Espacial se proponen los siguientes:

P1- *Si una recta tiene un punto en un plano, está incluida en dicho plano.*
Se ignora el axioma que exige que dos puntos de una recta estén en el plano para asegurar que la recta lo está.

P2- *Dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o dos rectas determinan un plano.*
En el desarrollo de la demostración se llega a que dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o que dos rectas siempre determinan un plano

P3- *Si una recta es perpendicular a una recta de un plano, es perpendicular a ese plano.*
Se considera erróneamente la perpendicularidad entre una recta y un plano a partir de la perpendicularidad con sólo una recta de ese plano.

P4- *Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.*

Se encuentra en las demostraciones que los estudiantes parten de dos rectas con la condición de ser alabeadas y se concluye que son perpendiculares.

P5- *Dos puntos determinan un plano o el plano determinado por dos puntos es único.*
Tres puntos no alineados o dos rectas secantes o dos rectas paralelas determinan un plano. Se alega erróneamente que un plano queda determinado por sólo una recta.

P6- *Dos rectas cruzadas se cortan en sus prolongaciones.*
Se concluye que las rectas cruzadas se cortan en un punto. Se visualiza en la prolongación de la representación gráfica de las rectas cruzadas en dos dimensiones que éstas se intersecan.

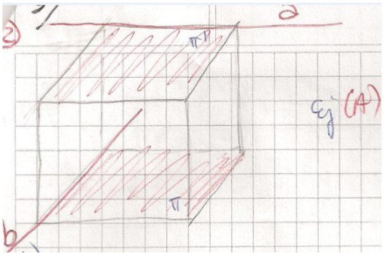
P7- *Empleo incorrecto del concepto de perpendicularidad.*
Se considera que dos rectas perpendiculares son secantes o que existe una única perpendicular a otra recta o que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. Estas afirmaciones son verdaderas en 2D pero no en 3D.

Se presentan ejemplos de los errores detectados a partir de los problemas analizados en las producciones correspondientes a dos estudiantes.

La siguiente tabla corresponde al alumno 02 al resolver el problema: "Dada la proposición: Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas a y b cualesquiera. a) Determinar si es verdadera o falsa. b) Si es verdadera demostrarla y si es falsa determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla".

Tabla del ejercicio 2 correspondiente al alumno 02

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1	"Si **a** y **b** son //→**a** y **b** determinan un plano π → por un punto del espacio exterior a dicho plano π pueden trazarse un solo plano // a ambas, ya que el lugar geométrico de todas las // a un plano por un punto exterior P es otro plano // → podemos trazar por A una recta // a, por ejemplo la recta **a** → esa recta estará contenida en un plano // a π, en este caso es verdadera → solo puede trazarse un solo plano"	*Agrega la condición que el punto sea exterior al plano que las rectas determinan. G1.* *Parece considerar que existe sólo un plano que pasa por una recta ya que el plano que pasa por la paralela a **a** por A coincide con el del lugar geométrico de las paralelas al plano π por A. P5. No justifica que el plano paralelo a π por A sea paralelo a las rectas dadas. G7.*
2	"Si **a** y **b** son secantes → **a** y **b** también determinan un plano π → como en el caso anterior, por un punto del espacio exterior a dicho plano π se puede trazar solo un plano, el que pasa por una recta // a una recta del plano por el punto A → también en este caso es verdadero"	*La misma consideración que en el caso de rectas paralelas.*

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
3	"Si **a** y **b** son cruzadas → ambas están contenidas en planos // (ver Ej. (A))→ si el punto A no pertenece ni a las rectas ni a los planos // → por ese punto A podemos trazar solo un plano paralelo a ambas, dicho plano será 1 plano paralelo a los 2 planos // entre sí, en que están contenidas las rectas **a** y **b**" 	*Justifica a partir del dibujo. G4.*

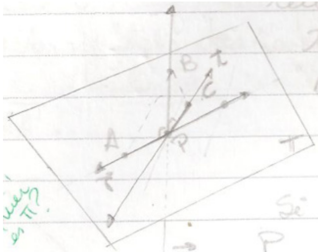
En el fragmento 1 se considera que se presenta un error tipo **G1** ya que al agregar la condición de que el punto sea exterior al plano que las rectas determinan, cuestión que resalta el estudiante con el doble subrayado, se convierte en otra propiedad distinta a la dada, en la que el punto es exterior a dichas rectas. Además, se presenta también un error tipo **P5**, el estudiante parece considerar que existe sólo un plano que pasa por una recta puesto que el plano que pasa por la paralela a **a** por A coincide con el del lugar geométrico de las paralelas al plano π por A. Además, aparece un ejemplo de error tipo **G7** ya que no justifica que el plano paralelo a π por A sea paralelo a las rectas dadas.

En el fragmento 3, aparece un error tipo **G4** dado que el estudiante justifica sólo a partir del dibujo realizado, considera como único plano el que contiene a la recta que incluye a la cara del cubo representado.

La siguiente tabla corresponde al alumno 05 al resolver el problema: "Demostrar que dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra".

Tabla del ejercicio 1 correspondiente al alumno 05

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1	"Hipótesis) **r** y **s** perpendiculares Tesis) Demostrar que por **r** se puede trazar un plano π perpendicular a **s**"	*Considera el recíproco de la propiedad a demostrar. G8*

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
2	Considera que si **r** y **s** son perpendiculares, pueden ser secantes o cruzadas. 	—
3	"Si las rectas se cortan en un punto P y siendo A un punto perteneciente a π y **r** y B otro punto perteneciente a **s**; estos tres puntos APB me determinan un triángulo recto por ser $\hat{P}$ recto	*El plano π está en la tesis como el que se tiene que determinar. ¿Quién es π? G7* *Debería decir triángulo rectángulo. G10*
4	"Luego tomo otra recta secante a **r**, **t** tal que se intersectan en P y que contiene al punto C, a igual distancia de P que A y a igual distancia de B que A"	*No determina la existencia de C. G7*
5	Concluye que los triángulos BPC y APB son congruentes por tener respectivamente los tres lados iguales.	*Esta afirmación no es correcta en todos los casos. G7*
6	"Por ser el triángulo BPC congruente con APB y $A\hat{P}B = C\hat{P}B$ rectos, quiere decir que A y C estarán alineados "	*A y C están alineados, por axioma, no por este argumento. G11- G7*
7	"de donde A y C están en el mismo plano determinado por las rectas secantes **r** y **t** y éste es único"	*A y C están en el mismo plano que el que contiene a las rectas **r** y **t**. Que este plano sea único es falso, pues si A, P y C están alineados, existen infinitos planos G6 y G7*
8	"Luego por ser **s** perpendicular a **r** y como **r** y **t** determinan al plano π, el cual será perpendicular a **s** por ser **r** y **t** perpendiculares a **s**. **t** será perpendicular a **s** por construcción"	*El plano π queda determinado aquí, pero con los datos que tomó no está bien. Hay infinitos planos que cumplen esta condición. **r**, **s** y **t** podrían ser coplanarias y de esta forma no es perpendicular a **s**. G7. Falta justificar que $\pi \perp$ **s**. G7.*
9	"Si las rectas **r** y **s** fueran cruzadas por propiedad sus prolongaciones se cortarían y estaríamos en el caso anterior"	*¿Cuál es la propiedad que menciona? Parece que esto lo determina del dibujo de rectas cruzadas. P6*

En el fragmento 1 de esta resolución se considera que se presenta un error tipo **G8** ya que considera el recíproco de la propiedad a demostrar lo cual se evidencia en cómo escribe la hipótesis y tesis y un error **G2** ya que al explicitar la tesis emplea la palabra *demostrar*.

En el fragmento 3 aparece un error que se cataloga como **G7** dado que el plano π está en la tesis como el que se tiene que determinar. También se presenta en este fragmento un error tipo **G10** pues debería decir triángulo rectángulo en lugar de triángulo recto.

Por otro lado, en el fragmento 4, no determina la existencia del punto C. C podría ser cualquiera de los infinitos puntos que están en la intersección de la superficie esférica de centro P y radio PA y la superficie esférica de centro B y radio BA. Considerando a C en el plano que **r** y **s** determinan, **t** coincide con **r**, pues A, P y C están alineados con lo cual se considera que es un ejemplo de un error tipo **G7**.

La afirmación del fragmento 5 es correcta en el caso que C no pertenezca al plano que **r** y **s** determinan, por lo cual se considera que manifiesta un error tipo **G7**.

En el fragmento 6, afirma que los puntos A y C están alineados debido a la congruencia de dos triángulos que tienen vértices en esos puntos, desatendiendo que por axioma dos puntos determinan una única recta. Se cataloga este error como **G11**.

En el fragmento 7, A y C están en el mismo plano que el que contiene a las rectas **r** y **t** porque A está en **r** y C está en **t**, no porque estén alineados. No es correcto afirmar que este plano es único, pues si A, P y C están alineados, existen infinitos planos que contienen a la recta AP= **r** y PC= **t** pues son coincidentes. Se considera que es un error de tipo **G6**.

En el fragmento 8 deduce incorrectamente que $\pi \perp$ **s**, lo cual se cataloga como error tipo **G7**.

En el fragmento 9 afirma que las rectas cruzadas se cortan en las prolongaciones, lo cual se considera error tipo **P6**.

Este trabajo que se muestra en estos dos ejemplos se realiza en todos los artefactos de la cohorte mencionada y la tipología propuesta surge de este análisis exploratorio.

3.2. Comparación de conceptos en 2D y 3D

De acuerdo a los errores hallados en las demostraciones, particularmente referidos a la geometría, y observando que en varios casos se consideran cuestiones que en la geometría del plano son propiedades, es que se realiza la siguiente comparación entre la geometría Euclídea plana y la espacial, referida específicamente a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad con el fin de comprender con mayor claridad las extrapolaciones realizadas por los estudiantes.

En la geometría euclídea plana los conceptos de paralelismo y de perpendicularidad se definen entre rectas, en cambio en la espacial se definen entre rectas, entre planos y rectas y entre planos, es decir, se amplía la variedad de posibles relaciones. En el plano las rectas perpendiculares son siempre secantes en cambio en el espacio pueden ser secantes o alabeadas. Por otra parte en el plano por un punto pasa una única perpendicular a una recta pero en el espacio por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a una dada. En el plano dos rectas perpendiculares a otra son paralelas o coincidentes y en el espacio tridimensional además de paralelas o coincidentes pueden ser también secantes o alabeadas. En 2D si una recta corta a otra corta a todas sus paralelas, esto no es así en 3D. Lo que se mantiene en ambas es que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella, cuestión distintiva de la geometría euclídea.

Son particularidades de la geometría 3D las siguientes proposiciones en las que se consideran elementos que exceden las dos dimensiones: rectas incluidas en planos perpendiculares son paralelas, oblicuas o perpendiculares; por un punto exterior a un plano pasan infinitas rectas paralelas a él; si un plano corta a otro, corta a todos sus paralelos; si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas y, existe una única recta perpendicular a un plano por un punto.

Estas particularidades aportan especialmente a la identificación de los errores concernientes a la extrapolación de propiedades de estos conceptos de 2D a 3D.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A partir del análisis de las categorías presentadas, de las particularidades referidas a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D y de los aportes de los referentes teóricos se realiza un ajuste de la tipología con la intención de reducir el número de tipo de errores, examinar solapamientos y lograr mayor precisión en la descripción de los errores. Esta categorización cuenta con siete tipos de errores: tres que refieren a la imprecisión en el empleo del lenguaje matemático y de las definiciones, axiomas y propiedades geométricas. Dos que refieren a la acción de demostrar; uno que apunta al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades.

La tipología producida queda de la siguiente forma:

Tipo I (TI) Imprecisión en la redacción de la demostración o notación matemática o geométrica en particular: se tipifican así a los errores cuando se redactan incorrectamente los pasos de una demostración o se utilizan símbolos o relaciones de la teoría de conjunto en forma incorrecta o se utiliza simbología propia. Se considera también el uso incorrecto de los cuantificadores lógicos.

Ampliación: Se utilizan expresiones del lenguaje común que no son correctas en una demostración. Los símbolos de la teoría de conjunto se utilizan sin respetar sus especificaciones y con respecto a los cuantificadores, suele suceder que no se explicitan cuando es necesario hacerlo. Esta categoría incluye a la **G10** de la clasificación anterior además de errores azarosos, de técnica (Franchi y Hernández de Rincón, 2004) y referidos a prueba localmente ininteligible o de ignorar cuantificadores (Selden y Selden, 2003).

Tipo II (TII) Determinación incorrecta de la hipótesis o tesis de una proposición: se explicitan incorrectamente la tesis o la hipótesis de una proposición.

Ampliación: Aunque no es requisito de la consigna del instrumento utilizado discriminar explícitamente la hipótesis y tesis de una propiedad, en algunos casos los estudiantes lo hacen y en ese caso se determina si es correcta o no. Esta categoría incluye a las **G1** y **G2** de la clasificación anterior y también el uso indebido de teoremas (Selden y Selden, 2003).

Tipo III (TIII) Tratamiento incorrecto de teoremas o propiedades: se tipifican así a los errores lógicos, casos en que se utiliza un teorema ya probado, pero se debilitan las condiciones del mismo agregando hipótesis que no se tienen. También cuando se considera el recíproco o la inversa de la propiedad que se debería utilizar o se establece un *círculo vicioso*. Se afirma que una proposición es verdadera y falsa sin trabajar con reducción al absurdo.
Ampliación: Esta categoría incluye a **G1**, **G5**, **G8** y **G9** y a **P3** y **P4** de la clasificación anterior. También a errores de razonamiento (Franchi y Hernández de Rincón, 2004), de circularidad y debilitamiento de un teorema o uso del inverso (Selden y Selden, 2003).

Tipo IV (TIV) Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones: este tipo de errores se evidencia cuando se intenta demostrar un axioma, se lo modifica o se lo contradice o no se respeta una definición acordada.
Ampliación: las definiciones acordadas que pueden diferir, según el texto utilizado, y que hacen a este trabajo se detallan en el cuadro que se presenta a continuación. Por ejemplo, Garguichevich (2007), denomina ortogonales a las rectas que aquí se nombran como alabeadas perpendiculares y las define ortogonales si por un punto de una de ellas se puede trazar una recta paralela a la otra de modo que estas resulten perpendiculares. Esta autora considera la relación de paralelismo cuando los elementos (rectas o planos) no tienen puntos en común o todos los puntos de uno están en el otro.

Esta categoría incluye a **G9** y **G11** y también a **P1**, **P2** y **P5** de la clasificación anterior, además a errores de razonamiento (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Definición de rectas alabeadas perpendiculares: Dos rectas alabeadas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.
Definición de rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común.
Definición de planos paralelos: Dos planos son paralelos si no tienen puntos en común.

Definiciones acordadas

Tipo V (TV) Demostraciones incompletas: se tipifica así a un error si no se justifica un paso de la demostración (agujeros); en el caso de tener que demostrar la existencia y unicidad, sólo se considera la existencia, por ejemplo; se consideran casos accidentales o extremos sin considerar la situación general en las demostraciones; se agregan condiciones a los elementos que no se tienen por hipótesis o, se justifica que un objeto no existe porque no se puede hallar por el método por el que se está tratando de construir. “Si no se puede encontrar un objeto que se está buscando, mediante un método determinado, esto no significa que el objeto no existe" (Fetisov, 1973, p. 39)

Ampliación: En el caso de TIII se agregan condiciones a un teorema que se tiene dentro de los trabajados en la cátedra y aquí se agregan condiciones a los elementos (puntos, rectas, planos, etc.) que no están dados en la proposición. Esta categoría incluye a **G6** y **G7** de la clasificación anterior, además a agujeros o sustitución sin justificar (Selden y Selden, 2003), a errores de generalizar y de razonamiento (Ramírez Uclés, 2012), y a errores deductivos o de razonamiento (Radillo Enríquez, 2011)

Tipo VI (TVI) Uso defectuoso de representaciones gráficas en las demostraciones: se considera a un error de este tipo cuando se extraen relaciones o emplean elementos de una representación gráfica en la demostración sin justificación o se realiza un dibujo que no representa la situación planteada.

Ampliación: Aunque no se pide explícitamente una representación en la consigna, algunos alumnos la realizan y es en este caso en que se valora su corrección. Esta categoría incluye a **G3** y **G4** y también a **P6** de la clasificación anterior, a errores de representación (Radillo Enríquez, 2011), a errores gráficos y a errores propios del lenguaje geométrico (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Tipo VII (TVII) Extrapolación de relaciones a distintos conceptos o de propiedades a distintos contextos: se consideran errores de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que no lo son cuando los elementos que intervienen no están en un plano. También cuando se mantienen las relaciones (paralelismo, perpendicularidad, incidencia, etc.) que establece un teorema pero se modifican los elementos (punto, recta, plano) entre los que se establecen esas relaciones.

Ampliación: Extrapolar significa, según la enciclopedia Espasa, "aplicar las conclusiones obtenidas en un determinado campo del saber a otro dominio distinto, para deducir consecuencias". Por ejemplo la proposición (falsa para rectas que no son coplanares): "Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas entre sí", puede entenderse en el plano o también extrapolarse del teorema "dos planos perpendiculares a otro son paralelos entre sí", sustituyendo planos por rectas. También se puede considerar la propiedad "Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas" que puede pensarse en el plano o de la propiedad de planos "si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas". Esta categoría incluye a **P7** de la clasificación anterior, a errores al relacionar plano y espacio (Ramírez Uclés, 2012), a errores axiomáticos o de aplicación de la teoría (Radillo Enríquez, 2011) o a errores de transferencia (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Esta nueva tipología agrupa las categorías de la anterior, de modo de hacer más eficaz la clasificación y tratar que no haya solapamientos en las mismas. Se adjunta la siguiente tabla la que contribuye a visualizar la relación de ambas tipologías.

	GENERALES											PARTICULARES						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
TI										X								
TII	X	X																
TIII	X				X			X	X					X	X			
TIV									X		X	X	X			X		
TV						X	X											
TVI			X	X													X	
TVII																		X

Esta nueva categorización se utilizará para tipificar los errores en los artefactos escritos con los que se cuenta.

5. REFERENCIAS

Enciclopedia Espasa en línea: http://espasa.planetasaber.com/search/results.asp?txt=extra/polar

Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8* (24), 63- 71.

Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, *8* (25), 196- 204.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Mc Knight, C., Magid, T., Murphy, E. y Mc Knigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Pearson Educación.

Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Recuperado 12 de noviembre de 2018 de https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2018) *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática.* Recuperado el 3 de marzo de 2019 de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL006588.pdf

Pólya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Radillo Enríquez, M. (2011). Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en el nivel licenciatura. *ALME 24*, 429- 437. Recuperado el 15 de noviembre de 2018.

Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, 69-108. México D.F.: Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Errors and misconceptions in college level theorem proving. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. Recuperado el 12 de agosto de 2018 de http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf

Weber, K. (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8 recuperado el 12 de febrero de 2016 de https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof