Dados no transitivos
Juegos y regularidades numéricas

Alicia Mirta Giarrizzo
Institutos Superiores de Formación Docente N°11 y N°102.
Buenos Aires, Argentina

Resumen: *Este trabajo se inicia con una secuencia didáctica sobre juegos de azar con dados no transitivos que fue propuesta a los alumnos de cuarto año de una escuela secundaria para que calcularan las probabilidades de ganar de cada jugador. Pero lo interesante de esta experiencia fue que los alumnos encontraron regularidades numéricas entre los números que figuran en las caras de estos dados que los motivaron para continuar con la búsqueda. Las estrategias de intervención de la profesora resultaron claves para orientarlos en las representaciones, enunciados y generalizaciones logrando que construyeran nuevos conocimientos a partir de sus intereses.*
Palabras clave: *Dados no transitivos. Juegos. Regularidades numéricas.*

Non-transitive dice
Games and numerical regularities

Summary: *This work begins with a didactic sequence about games of chance with non-transitive dice that were proposed to students of a secondary school, to calculate the probabilities of winning for each player.*
But the interesting thing about this experience was that the students found numerical regularities between the numbers that appear on the faces of these dice that motivated them to continue with the search. The teacher´s intervention strategies were the keys to guide them in the representations, statements and generalizations, promoting learning advancement from their interests.
Keywords: *Non-transitive dice. Games. Numerical regularities.*

1. INTRODUCCIÓN

Existe una mirada social y también de varios educadores que relacionan los juegos con el entretenimiento de los niños pequeños. Sin embargo, en la educación secundaria solo algunos docentes los reconocen como situaciones motivadoras que pueden proponerles a sus alumnos a la hora de organizar la enseñanza.

Cuando los juegos plantean problemas matemáticos se convierten en recursos didácticos que facilitan la resolución de diferentes actividades a partir de las cuales los alumnos pueden avanzar en sus aprendizajes interactuando con sus compañeros y con el docente quien deberá intervenir para "problematizar el juego" estableciendo nuevas condiciones que promuevan formas distintas de producir conocimientos.

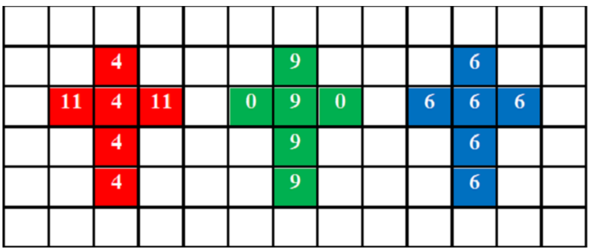
Los dados también son recursos didácticos valiosos cuando se los utiliza en actividades que no son planificadas para "jugar por jugar" sino para que posibilite la compresión de los conceptos, procedimientos, propiedades y relaciones entre los diversos objetos del campo numérico.

2. JUEGOS CON DADOS NO TRANSITIVOS

Una de las variables didácticas a tener en cuenta por los docentes es el tipo de dados que intervienen en los juegos. En esta oportunidad se trabajó con algunos conjuntos de dados no transitivos entre los cuales no se cumple la propiedad transitiva para la relación *"es más probable sacar un número mayor que"* al compararlos luego de sus lanzamientos.

La siguiente secuencia didáctica fue propuesta por una profesora a sus alumnos[1] para que analizaran las chances de ganar en juegos de azar con dados no transitivos. Las variables didácticas para aumentar el grado de complejidad de las actividades se basaron en las características y la cantidad de los dados[2].

Actividad 1. *Se juega en parejas con tres dados hexaédricos que en sus caras tienen los números que se muestran a continuación.*



Uno de los jugadores elige primero un dado y el otro jugador después elige otro entre los dos restantes. Gana el que obtiene el valor mayor. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tiene cada uno? ¿Cuál es el dado más conveniente para cada jugador?

1. Edad promedio 16 años.
2. Debido a la extensión de este artículo se han seleccionado algunas producciones, comentarios y sugerencias a modo de orientación.

Los alumnos representaron la situación en tablas de doble entrada y organizaron las probabilidades de ganar según cada elección (Tabla 1).

Se dieron cuenta que no se cumple la propiedad transitiva y que no importa el dado que se elija, sino el orden en que se elija para poder ganar.

Elección del Jugador 1	Probabilidades de ganar			Elección del Jugador 2
R	R g V	V g A	A g R	**A**
	20/26	24/36	24/36	
V	V g A	A g R	R g V	**R**
	24/36	24/36	20/26	
A	A g R	R g V	V g A	**V**
	24/36	20/26	24/36	

Tabla 1. Probabilidades de ganar para ambos jugadores[3]

Actividad 2. *¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tiene cada jugador con los siguientes dados? Dado blanco: (1, 4, 4, 4, 4, 4) Dado gris: (3, 3, 3, 3, 3, 6)*

Dado negro: (2, 2, 2, 5, 5, 5)

Propongan alguna variación entre los números de los dados para que se cumpla la propiedad transitiva.

El dado blanco le gana al dado gris (25/36), el dado gris le gana al dado negro (21/36) y el dado negro le gana al dado blanco (21/36). Propusieron variar solamente el dado negro y obtuvieron dos conjuntos de dados no transitivos (a y b) y tres conjuntos de dados transitivos (c, d y f):

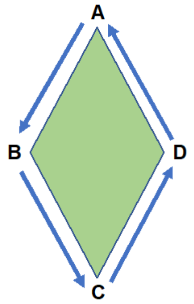
a) Para (1, 1, 1, 4, 4, 4): B g G (25/36), G g N (21/36) y N g B (21/36).
b) Para (3, 3, 3, 6, 6, 6): B g G (25/ 36), N g G (33/36) y N g B (21/36).
c) Para (2, 2, 2, 3, 3, 3): B g G /25/36), G g N (21/36) y B g N (30/36).
d) Para (3, 3, 3, 3, 3, 3): B g G (25/36), G g N (30/36) y B g N (30/36).
e) Para (1, 1, 1, 3, 3, 3): B g G (25/36), G g N (21/36) y B g N (30/36).

Actividad 3. *¿Cuáles son las probabilidades de ganar cuando los dos jugadores deben elegir entre los dados de este conjunto de Efron?*

(0, 0, 4, 4, 4, 4) (3, 3, 3, 3, 3, 3) (2, 2, 2, 2, 6, 6) (1,1, 1, 5, 5, 5)

3. Los alumnos indicaron con g la relación *"X tiene mayores probabilidades de ganarle a Y"*.

En la Figura 1 y en la Tabla 2 representaron las probabilidades de ganar al relacionar dos de los dados de Efron.



	A: (0, 0, 4, 4, 4, 4)	B: (3, 3, 3, 3, 3, 3)	C: (2, 2, 2, 2, 6, 6)	D: (1,1, 1, 5, 5, 5)
A: (0, 0, 4, 4, 4, 4)		**24/36**	16/36	12/36
B: (3, 3, 3, 3, 3, 3)	12/36		**24/36**	18/36
C: (2, 2, 2, 2, 6, 6)	20/36	12/36		**24/36**
D: (1, 1, 1, 5, 5, 5)	**24/36**	18/36	12/36	

Figura 1. Casos favorables entre los dados de Efron

Tabla 2. Casos favorables entre los dados de Efron

No importa qué dado elija el primer jugador porque el segundo jugador siempre puede elegir otro que le gana con probabilidad 2/3. Si elige el dado B, con todas sus caras iguales a 3, el dado A gana con probabilidad 2/3 si sale 4. En cambio, si elige primero el dado A, el dado D le gana con probabilidad 2/3 "(6/36 cuando sale el 1 y 18/36 cuando sale el 5).

2.1. Prolongaciones posibles

- *¿Es verdad que, si cada jugador tira dos veces un dado de los que se muestran en la Actividad 1 y suma los números obtenidos, siempre gana el que eligió primero?*
  El segundo jugador siempre tendrá mayores probabilidades de ganar.

  Por ejemplo: V g R, A g V y R g A.

  Pueden incluirse otras operaciones aritméticas o solicitarles a los alumnos que propongan variantes para luego socializarlas en una puesta en común.

- *Si ahora se juega con los dados de la Actividad 2 pero son tres los jugadores, ¿Cuál es la mejor elección para ganar?*
  Las probabilidades de ganar para cada dado son: dado blanco 75/216, dado gris 51/216 y dado negro 90/216. Entonces el dado negro es la mejor opción como ocurre cuando son dos los jugadores.

- *Realizar las mismas u otras variantes con un conjunto de dados diferentes para que comparen las conclusiones anteriores:*

  (2, 2, 4, 4, 9, 9), (1, 1, 6, 6, 8, 8), (3, 3, 5, 5, 7, 7)

No necesariamente debe complejizarse la situación fundamental manteniendo su enunciado y a partir de él generar otras actividades, sino que también pueden generarse actividades diferentes, aunque no se vinculen con el enunciado de la primera, siempre que no se cambien los contenidos seleccionados y que esas variantes sean variables didácticas. (Giarrizzo, 2021, p.40)

3. REGULARIDADES NUMÉRICAS ENTRE LOS NÚMEROS DE LAS CARAS DE LOS DADOS NO TRANSITIVOS

Ante las regularidades encontradas por los alumnos entre los números de las caras de los dados no transitivos durante el desarrollo de los juegos anteriores la profesora intervino con nuevas consignas con el propósito de que las representaran, analizaran, enunciaran y generalizaran, de ser posible.

3.1. Dados tetraédricos no transitivos

¿Existirá alguna ley de formación entre las sumas de los números de las caras de estos grupos de dados tetraédricos no transitivos?

G1: (1, 4, 4, 4) (2, 2, 5, 5) (3, 3, 3, 6)
G2: (1, 4, 7, 7) (2, 6, 6, 6) (3, 5, 5, 8)

Ordenaron los números de las caras de los diferentes dados del Grupo 1 de menor a mayor (Tabla 3) y calcularon las sumas correspondientes a los que pertenecen al mismo orden (n). Las simbolizaron: $Sn = 6 + 3 (n – 1)$. Para el Grupo 2 obtuvieron la fórmula: $Sn = 12 + 3 (n – 1)$ a partir de $n = 2$.

	n	D1	D2	D3	Sn
GRUPO 1	1	**1**	**2**	**3**	S1 = **6**
	2	**4**	**2**	**3**	S2 = **9**
	3	**4**	**5**	**3**	S3 = **12**
	4	**4**	**5**	**6**	S4 = **15**
SDm		SD1 = **13**	SD2 = **14**	SD3 = **15**	S1 + S2 + S3 + S4 = **42** SD1 + SD2 + SD3 = **42**

Tabla 3. Sumas de los números de las caras de los dados

Las sumas SDm de los números de las caras de cada dado de ambos grupos son números sucesivos y difieren en 6 unidades.

La suma de las sumas de los números de las caras de los diferentes dados coincide con la suma de los números de las caras de cada dado. Para el Grupo 1 es 42 y para el Grupo 2 es 60 (18 + 42 = 60), siendo 18 el producto entre 6 (diferencia entre las sumas de las caras de los dados del grupo anterior) y 3 (cantidad de dados).

Destacaron con diferentes colores las casillas con los números del 1 al 6 para mostrar la ley de formación de sus repeticiones.

3.2. Dados de Quimby

Analicen si se cumplen las mismas regularidades entre los números de las caras de los cinco dados hexaédricos de Quimby. Establezcan, de ser posible, nuevas relaciones entre ellos.

En la Tabla 4 se ordenaron de menor a mayor los números de las caras de los dados y se observan en la primera fila los números triangulares. Las casillas sombreadas tienen los números sucesivos del 1 al 14 y las casillas restantes se completan con los números sucesivos del 15 al 24.

Las sumas en forma diagonal de los números de los cuadrados de 2x2 de la Tabla 4 son iguales, excepto para los cinco cuadrados de la Tabla 5.

1	3	6	10
2	4	7	11
16	5	8	12
17	20	9	13
18	21	23	14
19	22	24	15

Tabla 4. Números de las caras de los dados

2	4	16	5	5	8	20	9	9	13
16	5	17	20	20	9	21	23	23	14

Tabla 5. Cuadrados con diferentes sumas en forma diagonal

En la columna **O1** de la Tabla 6 los números de las caras de los dados están ordenados de menor a mayor y en la columna **O2** en pares de números equidistantes. Las sumas entre los pares de números equidistantes (**Se)** son iguales a 25 para **D2** y **D4** y suman 50 entre ellas. Para **D1** y **D3** son diferentes, pero también suman 50.

D1			D2			D3			D4		
O1	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**
1	1	**20**	3	3	**25**	6	6	**30**	10	10	**25**
2	19		4	22		7	24		11	15	
16	2	**20**	5	4	**25**	8	7	**30**	12	11	**25**
17	18		20	21		9	23		13	14	
18	16	**23**	21	5	**25**	23	8	**17**	14	12	**25**
19	17		22	20		24	9		15	13	

Tabla 6. Relaciones entre las sumas de los números de las caras de los dados

3.3. Dados octaédricos de Mitwin

¿Cuáles son las regularidades numéricas que se cumplen entre los números de las caras de los tres dados octaédricos de Mitwin? Enunciarlas y expresarlas, de ser posible, simbólicamente.

En la Tabla 7 se destacaron las repeticiones de los números de las caras de los dados dodecaédricos cada dos de ellos.

D1 y D2	**13**	17	**29**	31	37	**43**	**47**	53	**67**	71	73	**83**
	13	19	23	**29**	41	**43**	**47**	59	61	**67**	79	**83**
D2 y D3	13	**19**	**23**	29	**41**	43	47	**59**	**61**	67	**79**	83
	17	19	23	**31**	**37**	41	**53**	59	61	**71**	**73**	79
D3 y D1	17	**19**	**23**	31	37	**41**	53	**59**	**61**	71	73	**79**
	13	**17**	29	**31**	**37**	43	47	**53**	67	**71**	**73**	83

Tabla 7. Repeticiones de los números de las caras de los dados

Las sumas de los números de las caras de cada dado son iguales a 564.

Construyeron uno de los dados para identificar las caras opuestas (Imagen 1 y Figura 2) donde se ubican los números equidistantes en la sucesión (Tabla 8)

Imagen 1. Dado construido por los alumnos

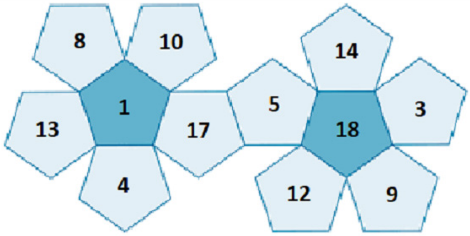


Figura 2. Desarrollo plano de uno de los dados

Caras opuestas del D1	13	17	29	31	37	43
	83	73	71	67	53	47

Tabla 8. Caras opuestas del dado D1

Motivar a los estudiantes implica intervenir para que los que aún tienen dificultades, mejoren sus capacidades relacionadas con el pensamiento intuitivo y reflexivo y para que los que ya pueden implementar estrategias superadoras, se animen a proponer nuevas reglas o a imaginar nuevos juegos (Giarrizzo, 2019, p. 48).

3.4. Prolongaciones posibles

- *Buscar información sobre los dados no transitivos e investigar la existencia o no de regularidades numéricas entre los números de sus caras.*

  Existen otros conjuntos de dados de Efron

  A: (2, 3, 3, 9, 10, 11) (0, 1, 7, 8, 8, 8) (5, 5, 6, 6, 6, 6) (4, 4, 4, 4,12,12)
  B: (1, 2, 3, 9, 10, 11) (0, 1, 7, 8, 9, 9) (5, 5, 6, 6, 7, 7) (3, 4, 4, 5, 11, 12)

  Y también los dados de Mugre (James Grime)

  Las sumas de los números de las caras de estos dados dispuestas en las diagonales son: 4, 7, 9, 10, 10, 35, 26, 18, 11, 5 y 0, 6, 8, 16, 20, 25, 20, 19, 12, 9. En la Tabla 9 se pueden observar dos ejemplos: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 y 4 + 3 + 2 + 6 + 5 = 20.

0	**1**	2	3	**4**
5	1	**2**	**3**	4
5	6	**2**	**3**	4
5	**6**	7	3	**4**
5	6	7	8	4
5	6	7	8	9

Tabla 9. Números de las caras de los dados

Si se suman las sumas equidistantes en cada caso se obtienen los mismos múltiplos sucesivos de 9:

4 + 5 = **9**; 7 + 11 = **18**; 9 + 18 = **27**; 10 + 26 = **36**; 10 + 35 = **45**
0 + 9 = **9**; 6 + 12 = **18**; 8 + 19 = **27**; 16 + 20 = **36**; 20 + 25 = **45**

- *Incluir el dado D4: (1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 14, 17, 18) al conjunto de dados de Miwin*[4]
  Las sumas de los números equidistantes de las caras de D4 ordenados de menor a mayor se repiten en forma simétrica:

1 + 18 = **19**; 3 + 17 = **20;** 4 + 14 = **18;** 5 + 13 = **18;** 8 + 12 = **20;** 9 + 10 = **19.**

4. REFLEXIÓN FINAL

Los diseños curriculares incluyen contenidos relacionados con sucesiones cuya complejidad aumenta en función de los conocimientos disponibles de los alumnos. Es tarea de los docentes planificar propuestas de enseñanza para que ellos observen, descubran, analicen y generalicen regularidades, patrones y leyes de formación en distintos contextos.

Y cuando sucedan esos maravillosos encuentros donde los alumnos pregunten para avanzar más allá de lo esperado y los docentes los acompañen en sus descubrimientos, la enseñanza y la evaluación serán compartidas porque "habrán aprendido matemática haciendo matemática".

4. Otro conjunto de dados de Miwin: (1, 2, 5, 6, 7, 9) (1, 3, 4, 5, 8, 9) (2, 3, 4, 6, 7, 8).

La imaginación en clase de matemáticas necesita ser cultivada. El sentido común también. Imaginación y sentido común no son facultades innatas y además interesa su estimulación, en nuestro caso, en la dirección adecuada: la de la creatividad matemática. Y como la imaginación también puede tener una dimensión grupal y ser compartida, su cultivo va más allá del progreso individual y puede ser un objetivo de clase. (Alsina, 2007, p. 12)

5. REFERENCIAS

Alsina, C. (2007). Educación matemática e imaginación. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11*, 9-17. Recuperado el 15 de octubre de 2021, de https://bit.ly/3E13pGf

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2010). Diseño curricular para la Educación Secundaria. Ciclo Superior. ES4: Matemática. Disponible en https://bit.ly/3G80fSU

Giarrizzo, A. (2019). Juego y matemática en la escuela primaria. Un recurso para producir conocimientos geométricos. *Revista Novedades Educativas, 31*(344), 48-54.

Giarrizzo, A. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria. Materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. *Revista de Educación Matemática*, Volumen 36, N°2, 51-70. Unión Matemática Argentina - FAMAF (UNC). DOI: https://doi.org/10.33044/revem.34268

Hans Martín, J. A., Muñoz Santonja, J., Fernández-Aliseda Redondo, A. (sf.). *Juegos de azar no transitivos*. Grupo Alquerque de Sevilla. Recuperado el 12 de octubre de 2021, de https://bit.ly/30Q9I15