Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 109, 75-91*

Construcción de infinitos cuadrados mágicos multiplicativos

Luis Barrios Calmaestra
I.E.S. José de Mora. Baza. Granada.

Resumen: *Si p y q son dos números primos, cualquier número de la forma $N=p^n \cdot q^n$, tiene $(n+1)^2$ divisores. En este artículo se expone un procedimiento para construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos de orden 3, 4 y 5, utilizando todos los divisores de N.*
Palabras clave: *cuadrado mágico multiplicativo, divisores de $p^n \cdot q^n$, potencias de $p \cdot q$ con p y q números primos.*

Construction of infinite multiplicative magic squares

Abstract: *Let p and q be two prime numbers. Any number define as $N=p^n \cdot q^n$ has $(n+1)^2$ divisors. This article describes the procedure to construct infinite multiplicative magic squares of order 3, 4 and 5, using all divisors of N.*
Keywords: *multiplicative magic square, divisors of $p^n \cdot q^n$, power of $p \cdot q$ where p and q are prime numbers.*

1. INTRODUCCIÓN

Un cuadrado mágico aditivo está formado por un conjunto de números dispuestos en n filas y n columnas, de forma que la suma de los números situados en cada una de las filas, en cada una de las columnas y en las dos diagonales es siempre la misma. A esta suma se le llama constante mágica.

Un cuadrado mágico multiplicativo está formado por un conjunto de números dispuestos en n filas y n columnas, de forma que el producto de los números situados en cada una de las filas, en cada una de las columnas y en las dos diagonales es siempre el mismo. A este producto se le llama constante mágica.

Sobre el origen y el interés de los cuadrados mágicos aditivos a lo largo de la historia hay muchas publicaciones y se pueden encontrar multitud de cuadrados mágicos de cualquier orden, conteniendo a su vez cuadrados mágicos de orden inferior y con muy diversas propiedades que aumentan su complejidad y su admiración por ellos, constituyendo auténticas obras de ingeniería aritmética.

El más conocido, sin duda, es el cuadrado mágico de orden tres con los nueve primeros números naturales, de constante mágica 15, de origen chino y del año 2800 a. C.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

De orden cuatro, el más conocido es el cuadrado mágico del artista renacentista alemán Alberto Durero. En uno de sus grabados, Melancolía I, realizado en el año 1514, se pueden observar algunos elementos matemáticos y, en la parte superior derecha, el siguiente cuadrado mágico aditivo, construido con los dieciséis primeros números naturales y de constante mágica 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Además de las propiedades que debe tener un cuadrado para considerarse mágico, también suman 34, distintos grupos de cuatro números, entre ellos:

- Los números situados en los cuatro cuadrados centrales.
- Los números situados en las cuatro esquinas.
- Los números centrales de las primera y última filas.
- Los números centrales de las primera y última columnas.
- Los números de los cuatro cuadrados que resultan al dividir por la mitad horizontal y verticalmente.
- Las esquinas de los cuadrados de 3x3 que se pueden formar.

Otro cuadrado mágico de orden cuatro, menos conocido que el anterior, pero no menos interesante, es un cuadrado mágico que se conoce como Chautisa Yantra y que se encuentra en la ciudad india de Khajuraho, en la fachada del templo Parsvanatha. En su puerta hay una inscripción del año 954 d.C. con el siguiente cuadrado mágico aditivo, de constante mágica 34.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

El cuadrado tiene todas las propiedades del cuadrado de Durero y, además:

- los números situados en todos los cuadrados de 2x2 de filas y columnas consecutivas también suman 34.
- los tres números situados en las diagonales secundarias junto con el número situado en la esquina opuesta también suman 34.

Los cuadrados mágicos multiplicativos han sido menos estudiados que los aditivos, aunque, utilizando el producto de potencias con la misma base, a partir de cualquier cuadrado mágico aditivo, se puede construir un cuadrado mágico multiplicativo con potencias de base cualquier número natural distinto de 1 y de exponente cada uno de los números del cuadrado mágico aditivo. Por ejemplo, si n es un número natural mayor que 1, se puede construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, de orden 3 y de constante mágica n^{15}, de la forma.

n^6	n^1	n^8
n^7	n^5	n^3
n^2	n^9	n^4

Otro cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 es el siguiente:

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Analizando este cuadrado se puede observar:

- Está formado por todos los divisores de 36. El número 36 se factoriza como $2^2 \cdot 3^2$ y tiene $(2+1)\cdot(2+1)=9$ divisores.

$$\text{div}(36) = \{1, 2, 3, 2^2, 2\cdot 3, 3^2, 2^2\cdot 3, 2\cdot 3^2, 2^2\cdot 3^2\}$$

- El producto de todos los divisores es $2^9\cdot 3^9=6^9=10077696$. La constante mágica se obtiene como la raíz cúbica del producto de todos los divisores, $2^3\cdot 3^3=6^3=216$.
- La casilla central se obtiene como la raíz cúbica de la constante mágica, $2\cdot 3=6$.

2. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 3

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^2=p^2q^2$ tiene $(2+1)\cdot(2+1)=9$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^2q^2) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2\}$$

Con los nueve divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3, de la siguiente forma:

- La constante mágica se obtiene multiplicando todos los números del cuadrado mágico, es decir, multiplicando todos los divisores y calculando la raíz cúbica del resultado obtenido. El producto de todos los divisores es p^9q^9. Su raíz cúbica es p^3q^3.
- Se empieza colocando en la casilla central el número $p\cdot q$, que se obtiene como la raíz cúbica de la constante mágica.
- Se coloca a continuación el número p^2q^2. Solo hay dos grupos de tres números que, junto con p^2q^2, tengan como producto p^3q^3. Son 1, pq, p^2q^2 y p, q, p^2q^2. Si el número que queremos colocar se sitúa en una esquina, debería haber tres grupos de tres números con producto la constante mágica. Como solo pertenece a dos grupos, se debe colocar en la casilla central de uno de los lados. Lo colocamos en la casilla inferior central.
- Ya se puede completar la columna central y la fila inferior. En la fila inferior da igual el orden de los elementos p y q, se obtendrían dos cuadrados simétricos.
- El resto del cuadrado se puede completar añadiendo los elementos que faltan para completar, en primer lugar, las diagonales y, posteriormente, las columnas.

	pq	

→

	1	
	pq	
p	p^2q^2	q

→

$p^2\cdot q$	1	$p\cdot q^2$
q^2	$p\cdot q$	p^2
p	$p^2\cdot q^2$	q

Se pueden construir infinitos cuadrados mágicos mediante este procedimiento, siendo p y q dos números primos cualesquiera.

2.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^2q^2=2^2\cdot 3^2=36=6^2$
$\mathrm{Div}(6^2) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
Constante mágica: $p^3q^3=216=6^3$

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Si p=2 y q=5 → $p^2q^2=2^2\cdot5^2=100=10^2$
Div(10^2) = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}
Constante mágica: $p^3q^3=1000=10^3$

20	1	50
25	10	4
2	100	5

Si p=3 y q=5 → $p^2q^2=3^2\cdot5^2=225=15^2$
Div(6^2) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225}
Constante mágica: $p^3q^3=3375=15^3$

45	1	75
25	15	9
3	225	5

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^2q^2.

2.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^2q^2=2^4\cdot3^2=144=12^2$
El número 144 tiene (4+1)·(2+1)=15 divisores.
El cuadrado mágico contiene 9 divisores.
Constante mágica: $p^3q^3=1728=12^3$

36	1	48
16	12	9
3	144	4

3. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 3

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

- El producto de los números situados en cada fila es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

- El producto de los números situados en cada columna es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	**1**	18
9	**6**	4
2	**36**	3

12	1	**18**
9	6	**4**
2	36	**3**

- El producto de los números situados en cada diagonal es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	**6**	4
2	36	**3**

12	1	**18**
9	**6**	4
2	36	3

- El producto de los siguientes grupos de cuatro números es $p^4q^4=1296=6^4$.

12	1	**18**
9	6	4
2	36	**3**

12	**1**	18
9	6	**4**
2	**36**	3

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

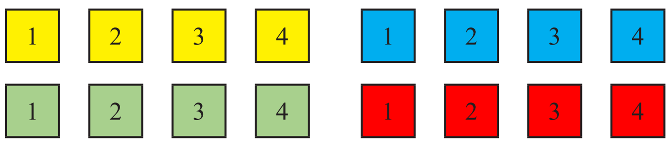
4. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 4

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^3=p^3q^3$ tiene $(3+1)\cdot(3+1)=16$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^3q^3) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^2q^3, p^3q^2, p^3q^3\}$$

Con los dieciséis divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 4, utilizando el procedimiento siguiente.

Hay un pasatiempo formado por 16 tarjetas, coloreadas con cuatro colores distintos, por ejemplo, amarillo, azul, rojo y verde y, enumeradas de con cuatro números diferentes, por ejemplo 1, 2, 3 y 4, de forma que todas las tarjetas son distintas porque se diferencian en el número, en el color o en ambos.



El juego consiste en colocar las tarjetas formando un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales no se pueden repetir números ni colores.

Para construir el cuadrado mágico se necesita hacer una modificación de este juego utilizando solamente números. Se dispone de 16 tarjetas, cada una tiene una pareja de coordenadas (m,n), siendo m y n números enteros comprendidos entre 0 y 3, ambos incluidos. Vamos a construir un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales no se repitan ni la primera ni la segunda coordenada.

Para encontrar una solución:

- En primer lugar, se colocan las cuatro equinas.
- Después se colocan los cuatro cuadrados centrales respetando las condiciones.
- Por último, se completan las casillas vacías.

(0,0)			(2,2)
(1,1)			(3,3)

→

(0,0)			(2,2)
	(1,2)	(3,0)	
	(0,3)	(2,1)	
(1,1)			(3,3)

→

(0,0)	(3,1)	(1,3)	(2,2)
(2,3)	(1,2)	(3,0)	(0,1)
(3,2)	(0,3)	(2,1)	(1,0)
(1,1)	(2,0)	(0,2)	(3,3)

El cuadrado mágico se construye colocando en cada casilla el valor de p elevado a la primera coordenada por el valor de q elevado a la segunda coordenada.

$p^0\cdot q^0$	$p^3\cdot q^1$	$p^1\cdot q^3$	$p^2\cdot q^2$
$p^2\cdot q^3$	$p^1\cdot q^2$	$p^3\cdot q^0$	$p^0\cdot q^1$
$p^3\cdot q^2$	$p^0\cdot q^3$	$p^2\cdot q^1$	$p^1\cdot q^0$
$p^1\cdot q^1$	$p^2\cdot q^0$	$p^0\cdot q^2$	$p^3\cdot q^3$

→

1	$p^3\cdot q$	$p\cdot q^3$	$p^2\cdot q^2$
$p^2\cdot q^3$	$p\cdot q^2$	p^3	q
$p^3\cdot q^2$	q^3	$p^2\cdot q$	p
$p\cdot q$	p^2	q^2	$p^3\cdot q^3$

En el cuadrado con las coordenadas, la suma de la primera o segunda coordenada en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales es igual a 6. Por tanto, la constante mágica de este cuadrado mágico multiplicativo es p^6q^6.

Para cada solución del cuadrado de las coordenadas, se pueden encontrar infinitos cuadrados mágicos multiplicativos mediante este procedimiento siendo p y q dos números primos cualesquiera.

Además, para cada valor de p y q se pueden permutar los exponentes, obteniendo $4!\cdot 4!=24\cdot 24=576$ cuadrados distintos.

4.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^3q^3=2^3\cdot 3^3=216=6^3$
Div(6^3) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 3^6=46656=6^6$

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

Si p=2 y q=5 → $p^3q^3=2^3\cdot 5^3=1000=10^3$
Div(10^3) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 5^6=1000000=10^6$

1	40	250	100
500	50	8	5
200	125	20	2
10	4	25	1000

Si p=3 y q=5 → $p^3q^3=3^3\cdot 5^3=3375=15^3$
Div(15^3) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 125, 135, 225, 375, 675, 1125, 3375}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 3^6=11390625=15^6$

1	135	375	225
1125	75	27	5
675	125	45	3
15	9	25	3375

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^3q^3.

4.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^3q^3=2^6\cdot 3^3=1728=12^3$
El número 1728 tiene (6+1)·(3+1)=28 divisores.
El cuadrado mágico contiene 16 divisores.
Constante mágica: $p^6q^6=2985984=12^6$

1	108	192	144
576	48	27	4
432	64	36	3
12	9	16	1728

5. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 4

Las propiedades de este cuadrado mágico son muy similares a las propiedades del cuadrado mágico aditivo de orden 4 de Alberto Durero.

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

- El producto de los números situados en cada fila es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	**24**	**54**	**36**
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	**18**	**8**	**3**
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	**27**	**12**	**2**
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	**4**	**9**	**216**

- El producto de los números situados en cada columna es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	**24**	54	36
108	**18**	8	3
72	**27**	12	2
6	**4**	9	216

1	24	**54**	36
108	18	**8**	3
72	27	**12**	2
6	4	**9**	216

1	24	54	**36**
108	18	8	**3**
72	27	12	**2**
6	4	9	**216**

- El producto de los números situados en cada diagonal es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	**18**	8	3
72	27	**12**	2
6	4	9	**216**

1	24	54	**36**
108	18	**8**	3
72	**27**	12	2
6	4	9	216

- El producto de los cuatro números situados en las esquinas es igual a $p^6q^6=6^6$. También el producto de los números situados en los cuatro cuadrados centrales.

1	24	54	**36**
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	**216**

1	24	54	36
108	**18**	**8**	3
72	**27**	**12**	2
6	4	9	216

- Si dividimos el cuadrado por la mitad de forma horizontal y verticalmente, se obtienen cuatro cuadrados con cuatro números cada uno. El producto de los números situados en cada uno de los cuadrados es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

- El producto de los dos números centrales de las filas inferior y superior y el producto de los números centrales de las columnas izquierda y derecha es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

- El producto de los números situados en las esquinas de los cuadrados de 3×3 es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

- Otras configuraciones de cuatro números cuyo producto es $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

6. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 5

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^4=p^4q^4$ tiene $(4+1)\cdot(4+1)=25$ divisores:

$$div(p^4q^4) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^3q^3, p^2q^3, p^3q^2, p^4, q^4, pq^4, p^4q, p^2q^4, p^4q^2, p^3q^4, p^4q^3, p^4q^4\}$$

Con los veinticinco divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 5, con un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 en su interior.

La constante mágica se obtiene multiplicando todos los números del cuadrado mágico y calculando la raíz quinta del resultado obtenido. El producto de todos los números es $p^{50}q^{50}$, se puede calcular sumando por separado los exponentes de p y q de todos los divisores. Su raíz quinta será $p^{10}q^{10}$.

El número de la casilla central debe ser p^2q^2, que se obtiene calculando la raíz quinta de la constante mágica.

Para construir el cuadrado mágico de orden 3, cuya casilla central sea p^2q^2, se puede multiplicar por "p·q" los números del cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 anterior.

$p^2\cdot q$	1	$p\cdot q^2$		$p^3\cdot q^2$	$p\cdot q$	$p^2\cdot q^3$
q^2	$p\cdot q$	p^2	→	$p\cdot q^3$	$p^2\cdot q^2$	$p^3\cdot q$
p	$p^2\cdot q^2$	q		$p^2\cdot q$	$p^3\cdot q^3$	$p\cdot q^2$

Se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo de constante mágica p^6q^6.

Se han utilizado los divisores indicados en negrita:

$$div(p^4q^4) = \{1, p, q, \mathbf{pq}, p^2, q^2, \mathbf{pq^2}, \mathbf{p^2q}, \mathbf{p^2q^2}, p^3, q^3, \mathbf{pq^3}, \mathbf{p^3q}, \mathbf{p^3q^3}, \mathbf{p^2q^3}, \mathbf{p^3q^2}, p^4, q^4, pq^4, p^4q, p^2q^4, p^4q^2, p^3q^4, p^4q^3, p^4q^4\}$$

Para completar una de las posibles soluciones del cuadrado de orden 5, se colocan los divisores no utilizados, empezando por las esquinas, después las casillas centrales y, por último, las casillas restantes, procurando que el producto de los números de cada fila, columna y diagonal coincida con la constante mágica.

Se obtiene el cuadrado:

$p^0 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^4$	$p^4 \cdot q^3$	$p^4 \cdot q^0$
$p^3 \cdot q^4$	$p^2 \cdot q^3$	$p^1 \cdot q^1$	$p^3 \cdot q^2$	$p^1 \cdot q^0$
$p^4 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^1$	$p^2 \cdot q^2$	$p^1 \cdot q^3$	$p^0 \cdot q^2$
$p^3 \cdot q^0$	$p^1 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^1$	$p^1 \cdot q^4$
$p^0 \cdot q^4$	$p^4 \cdot q^1$	$p^2 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^1$	$p^4 \cdot q^4$

Se pueden construir infinitos cuadrados mágicos mediante este procedimiento siendo p y q dos números primos cualesquiera.

6.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^4q^4=2^4 \cdot 3^4=1296=6^4$
$Div(6^4)$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 324, 432, 648, 1296}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=2^{10} \cdot 3^{10}=6^{10}$

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

Si p=2 y q=5 → $p^4q^4=2^4 \cdot 5^4=10000=10^4$
$Div(10^4)$ = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 625, 1000, 1250, 2000, 2500, 5000, 10000}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=2^{10} \cdot 5^{10}=10^{10}$

1	125	2500	2000	16
5000	500	10	200	2
400	40	100	250	25
8	50	1000	20	1250
625	80	4	5	10000

Si p=3 y q=5 → $p^4q^4=3^4\cdot 5^4=50625=15^4$
Div(15^4) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 125, 135, 225, 375, 405, 625, 675, 1125, 1875, 2025, 3375, 5625, 10125, 16875, 50625}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=3^{10}\cdot 5^{10}=15^{10}$

1	125	5625	10125	81
16875	1125	15	675	3
2025	135	225	375	25
27	75	3375	45	1875
625	405	9	5	50625

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^4q^4.

6.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^4q^4=2^8 3^4=20736=12^4$
El número 20736 tiene (8+1)·(4+1)=45 divisores.
El cuadrado mágico contiene 25 divisores.
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=12^{10}$

1	64	2304	5184	81
6912	432	12	576	3
1296	192	144	108	16
27	36	1728	48	768
256	324	9	4	20736

7. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 5

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

Por ser un cuadrado mágico multiplicativo, el producto de los números situados en las filas, columnas y las dos diagonales es igual, tanto en el cuadrado de orden 3 como en el de orden 5, a la constante mágica de cada uno de ellos.

Con los veinticinco divisores de 1296 (p^4q^4) se pueden formar doce parejas de números cuyo producto es 1296. Estas parejas están situadas en el cuadrado de forma simétrica respecto de los ejes de simetría horizontal o vertical, o respecto de la casilla central. Esto supone que se puedan combinar en grupos de números cuyo producto sea una potencia de pq=6 y que formen en el cuadrado configuraciones simétricas.

- Algunos grupos de cuatro números cuyo producto es $p^8q^8=6^8$, con la casilla central, $p^{10}q^{10}=6^{10}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de ocho números cuyo producto es $p^{16}q^{16}=6^{16}$, con la casilla central, $p^{18}q^{18}=6^{18}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de doce números cuyo producto es $p^{24}q^{24}=6^{24}$, con la casilla central, $p^{26}q^{26}=6^{26}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de dieciséis números cuyo producto es $p^{32}q^{32}=6^{32}$, con la casilla central, $p^{34}q^{34}=6^{34}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

8. PROPUESTA DE UTILIZACIÓN EN EL AULA

La utilización de actividades de Matemáticas Recreativas en nuestras clases nos permite captar la atención de nuestro alumnado, utilizar estrategias de resolución de problemas y hacer pensar y reflexionar sobre los procedimientos de resolución utilizados y los resultados obtenidos.

Si además estas actividades tienen relación con los contenidos académicos que estemos trabajando en ese momento, nos ayudarán a reforzarlos y a que el alumnado vea utilidad y se sienta más interesado por lo que está estudiando.

Los cuadrados mágicos, tanto aditivos como multiplicativos, despiertan esta curiosidad en el alumnado. Las coincidencias en las sumas o en los productos de filas, columnas y diagonales que tiene un pequeño conjunto de números dispuestos en filas y columnas le dan esa imagen de mágicos que indica su nombre.

Los cursos apropiados para realizar esta actividad pueden ser segundo y tercero de E.S.O. Los contenidos del currículo relacionados son divisibilidad, potencias, raíces, giros, simetrías y valor numérico de una expresión algebraica.

La actividad se puede plantear intentado que, dirigidos por el profesor, sean los alumnos quienes vayan realizando los pasos necesarios para la construcción de los cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos multiplicativos de este artículo están construidos utilizando los divisores de algunos números naturales.

1. Podemos empezar preguntando ¿cuántos números se necesitan para formar un cuadrado mágico? Para el de orden 3 se necesitan 9, para el de orden 4 se necesitan 16, …. Y ahora preguntar ¿qué propiedad común tienen estos números?
2. Para construir un cuadrado mágico con todos los divisores se necesita que el número de divisores sea un cuadrado perfecto. ¿Qué tipo de números tienen esta cantidad de divisores? ¿Cómo se puede calcular el número de divisores de cualquier número? ¿Cómo tiene que ser su descomposición en factores primos?
3. Ahora tenemos que calcular todos los divisores. Se puede empezar calculando la factorización de algunos de los números que vamos a necesitar 36, 216 o 1296, para después proponer, de forma general, el cálculo de los divisores de números cuya factorización sea de la forma $N_1=p^2\cdot q^2$, $N_2=p^3\cdot q^3$, $N_3=p^4\cdot q^4$.
4. Después de calcular todos los divisores, para construir el cuadrado se necesita calcular la constante mágica. Se pueden pedir a los alumnos ideas para su cálculo. Una vez descubierta la forma de calcularla, vamos a hacerlo de forma generalizada. Se multiplican todos los divisores aplicando el producto de potencias con la misma base. Ahora hay que calcular la raíz cúbica, cuarta o quinta, según el orden del cuadrado mágico, para conocer el producto de los elementos de cada línea, que también se puede deducir aplicando propiedades de las potencias.
5. Ya se conoce la constante mágica, ¿cuál puede ser la casilla central en el cuadrado mágico de orden 3? Nuevo turno de propuestas para decidir la mejor opción.
6. Ya estamos en condiciones de colocar el resto de números para construir el cuadrado, el de orden 3 lo pueden decidir los alumnos, los de orden 4 y 5 será el profesor o profesora quién tenga que darles la solución. Aunque si se dispone de

tiempo para realizar la actividad, también puede ser protagonista el alumnado con el procedimiento descrito en este artículo.

7. Vamos a realizar la comprobación de que los cuadrados numéricos construidos verifican las propiedades de un cuadrado mágico multiplicativo y estudiar también el resto de propiedades que encierra el cuadrado obtenido.
8. En cada uno de los cuadrados construidos en este artículo se indica que al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características. Se puede proponer también al alumnado que realice giros de 90º, 180º y 270º o simetrías respecto de los ejes de simetría de un cuadrado y que obtenga los cuadrados resultantes. Sin hacer cálculos, deducir si el nuevo cuadrado también es un cuadrado mágico multiplicativo.
9. Para finalizar, como se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, vamos a repartir entre nuestro alumnado cuadrados mágicos. Les proponemos que elijan dos números primos y que construyan con ellos un cuadrado de orden 3, otro de orden 4 y otro de orden 5, sustituyendo en la expresión general de los cuadrados de cada orden los valores de p y q por los primos elegidos. Pueden hacer algunas comprobaciones para asegurarse de que han obtenido cuadrados mágicos multiplicativos.

9. CONCLUSIÓN

Los cuadrados mágicos han sido objeto de estudio de todas las civilizaciones y de los matemáticos más importantes de toda la historia. Existen multitud de cuadrados mágicos con propiedades adicionales a las que le dan la denominación de mágico.

Cuando nuestros alumnos y alumnas conocen los cuadrados mágicos y les explicamos las propiedades que poseen, también muestran su curiosidad y admiración por estos objetos matemáticos. Si además les hacemos partícipes en su construcción, como se indica en la propuesta de utilización en el aula, haciéndoles pensar y reflexionar en cada uno de los pasos necesarios para obtenerlos, llegarán a una mejor comprensión y a un mayor interés por ellos.

En este artículo se ha podido comprobar que se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos con las propiedades básicas de un cuadrado mágico y otras muchas propiedades similares a las de los cuadrados mágicos aditivos más conocidos.

10. REFERENCIAS

Alegría, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos. *Sigma, 34*, 107-128.

Andrews, W. S. (1960). *Magic squares and cubes*. Dover: Dordrech

Web. *The smallest possible multiplicative magic squares* (S. D.). Recuperado el 17 de noviembre de 2021. http://www.multimagie.com/English/Multiplicative.htm