Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 57-67*

Matemática superior desde un punto de vista elemental

Oscar Gómez-Rojas
Universidad Distrital Francisco José de caldas
Astrid Cuida
Universidad de Valladolid
Cristina Pedrosa Jesús
Universidad de Córdoba

Resumen: *Por regla general las exposiciones teóricas en matemáticas se hacen con una alta exigencia de rigor lógico. Sin embargo, en muchas ocasiones la idea central de una demostración puede ser relativamente sencilla y fácilmente traducible a una presentación más intuitiva. Atraer la atención sobre este hecho con un ejemplo particular es el propósito del presente artículo.*
Palabras clave: *rigor, conjuntos numerables y no numerables, densidad, medida cero, cubrimiento.*

Higher mathematics from an elementary point of view

Abstract: *As a general rule the theoretical exhibitions in mathematics are made with a high demand for logical rigor. However, in many cases the central idea of a demonstration can be relatively simple and easily translatable into a more intuitive presentation. To draw attention to this fact with a particular example is the purpose of this article.*
Keywords: *Rigor, countable and non−countable sets, density, measure zero, coverage*

1. INTRODUCCIÓN

La matemática más que un conjunto de técnicas es un sistema de ideas con diversos grados de sofisticación. Esta afirmación no constituye una novedad, recordemos que los griegos veían en la práctica de las matemáticas abstractas un valioso método de entrenamiento mental. Como referencia rápida de este hecho podemos recordar el "*No entre aquí quien no sepa geometría*" que presidía la entrada a la academia de Platón.

La alta especialización del conocimiento propio de nuestros días hace difícil que alguien, no iniciado, entre en contacto con un conocimiento con el exclusivo interés de *ejercitar su intelecto*. Es un lugar común el que muchas personas se sienten repelidas por las matemáticas, sin embargo, es posible que, sin ser conscientes de ello, pasemos por alto el hecho de que el rigor, propio de las matemáticas, puede, en ocasiones, constituirse en un muro impenetrable que evita el paso a los posibles curiosos. Esto, en parte, porque aunque la intuición juega un importante papel a la hora de la creación matemática, suele quedar disimulada, o del todo oculta, en las presentaciones formales. Veamos un ejemplo: si una persona camina dando pasos de 70cm y hay en su ruta una franja transversal de 1m de ancho, es claro que necesariamente deberá pisarla. Esta es la idea que se esconde detrás de la demostración de la densidad de los racionales en los reales que mostraremos más adelante.

El objetivo de este artículo es presentar el desarrollo de un tema, que muchas personas podrían considerar complejo, abandonando un poco el rigor y con un fuerte apoyo intuitivo. Al hacer esto buscamos resaltar las ideas más que la presentación rigurosa. Buena parte del camino la haremos guiados por las enseñanzas de Raymond Smullyan en su libro de divulgación matemática *Satán, Cantor y el infinito*.

1.1. Problema

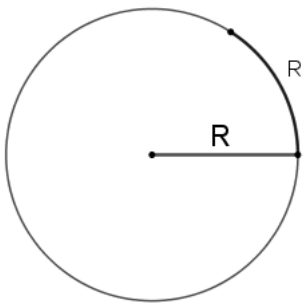


Figura 1

Sobre una circunferencia de radio R se sobrepone un arco de longitud igual al radio, el extremo del arco superpuesto determina un punto sobre la circunferencia (figura 1). A partir de este punto se vuelve a sobreponer el segmento, generándose así un nuevo punto (figura 2). La reiteración de este proceso genera una sucesión de puntos sobre la circunferencia (consideramos como primer punto de la sucesión el inicial de la primera superposición) (figura 3). Sobre esta sucesión $P = \{P_1, P_2, P_3,\ldots\}$ de puntos surgen los siguientes interrogantes:

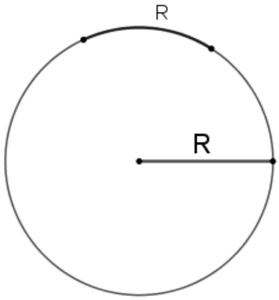


Figura 2

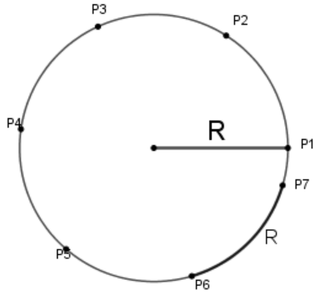


Figura 3

1. ¿En algún momento un nuevo punto coincide con uno ya generado anteriormente? (Una respuesta afirmativa a esta pregunta implica que de este momento en adelante cada uno de los nuevos puntos coinciden con alguno de los ya generados y, en consecuencia, la sucesión constará de un número finito de elementos).
2. Si la respuesta de 1 es negativa, el conjunto de puntos es infinito, en este caso ¿coincidirá este conjunto con la totalidad de puntos en la circunferencia?
3. Si la respuesta de 2 es negativa ¿es el conjunto de puntos denso[1] en la circunferencia?

1.2. Desarrollo

Para responder la primera pregunta supongamos que el k–ésimo punto generado coincide con el primero (esta suposición se fundamenta en el hecho de que si dos puntos de la sucesión coinciden –esto es, si para $1 < m < n$, $P_m = P_n$ entonces, por la forma en que está construida la sucesión, necesariamente $P_{(m-1)} = P_{(n-1)}$. Podemos entonces afirmar que el primer punto que aparece repetido es el primero de la sucesión), entonces, luego de k sobreposiciones habremos dado un número exacto de vueltas, lo que implica que la suma de las longitudes de los k arcos coincide con la longitud de la circunferencia multiplicada por un número entero, llamémosle z. Esto es $kR = (2\pi R)z$ y entonces tendríamos que $\pi = k/2z$ lo cual se contradice con el hecho de que es un número irracional[2]. Por lo tanto, todos los puntos de la sucesión son diferentes y, en consecuencia, el conjunto de puntos es infinito.

Para la discusión de las preguntas 2 y 3 veamos las siguientes figuras en las que aparecen los primeros 100, 200 y 400 puntos de la sucesión respectivamente:

1. Lo que quiere decir la palabra “denso”, en este caso, es que, si tomamos cualquier trozo de la circunferencia, por pequeño que sea (exceptuando el caso extremo de tomar un único punto), este debe contener por lo menos un punto de la sucesión P que estamos considerando.

2. La irracionalidad de π es un hecho del que muy pocas veces hacemos uso.

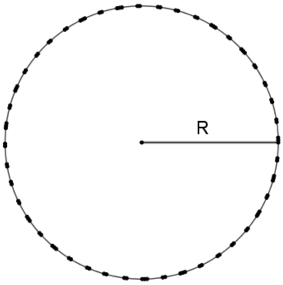


Figura 4 (100 puntos)

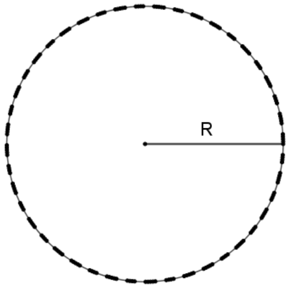


Figura 5 (200 puntos)

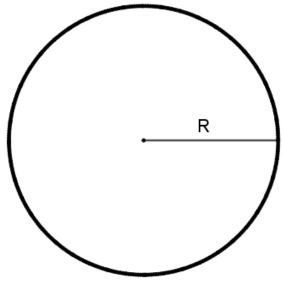


Figura 6 (400 puntos)

Los puntos de la sucesión parecen “llenar” la circunferencia, sin embargo, para responder a esta pregunta es necesario profundizar un poco más sobre la estructura de los números reales. Para ello acudimos a un juego de retos que propone Raymond Smullyan en su libro Satán, Cantor y el infinito. La solución de cada reto por parte del lector lo va introduciendo gradualmente al tema de los cardinales de los conjuntos infinitos.

1.2.1. Reto 1

Imaginemos que yo soy el diablo y ustedes mis víctimas en el infierno. Ahora les notifico que los someteré a una prueba. Les digo: “Estoy pensando en un número entero positivo, que he escrito en este trozo de papel doblado. Cada día, tienen una y solo una posibilidad de acertar de que número se trata. Cuando lo adivinen quedarán libres, pero no antes.” Entonces, ¿existe alguna estrategia mediante la cual podrían estar seguros de salir tarde o temprano?[3]

1.2.2. Reto 2

Con las mismas condiciones anteriores, ahora escribo un número entero positivo o un entero negativo.[4]

3. Aquí vemos la naturaleza de los números naturales, en los cuales se alcanza cualquier elemento comenzando en 1 y sumando 1 en cada paso. Así que el condenado debe decir: 1 el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente; con toda seguridad algún día quedará libre.

4. La solución de este reto muestra que el conjunto $\mathbb{Z}$ es numerable. Un conjunto A es numerable si existe una biyección f entre $\mathbb{N}$ y A, entonces se puede escribir $A=\{f(1), f(2), f(3),..\}$ si hacemos $a_n = f(n)$ entonces se tiene $A = \{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$.Que un conjunto pueda ser escrito de esta manera lo caracteriza como “numerable”.

1.2.3. Reto 3

La siguiente prueba que les planteo a mis víctimas es bastante más difícil. Esta vez escribo dos números en un trozo de papel o quizás el mismo número escrito dos veces (alerta de spoiler: el pie de página contiene la solución)[5].

1.2.4. Reto 4

Ahora pido que no solo adivinen cuáles son los números sino también el orden en el que fueron escritos.

La solución del reto 4 muestra que el conjunto de los números racionales positivos es numerable ya que podemos establecer una biyección entre racionales y parejas ordenadas de enteros, $(a,b) \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Veamos ahora que es imposible que el conjunto de puntos de nuestro problema "llene" la circunferencia. Para entender esto definamos lo que es un cubrimiento de un conjunto de números reales. Supongamos que tenemos el conjunto A = {−5, 0, 2}, el conjunto de intervalos abiertos B[6] = {(−6, −4), (−1, 1), (1, 3)} es un cubrimiento abierto del conjunto A ya que todo elemento de A pertenece a al menos un elemento del conjunto B.

Necesitamos, además, un conjunto de infinitos números positivos que, sin embargo, tengan una suma finita. En efecto, veamos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

Esta suma sigue la lógica de una de las paradojas de Zenón. Se comienza en ½ y siempre se suma la mitad de lo que le falta para llegar a 1. Esto es, con cada nuevo sumando se disminuye a la mitad la distancia a 1[7] (figura 7).

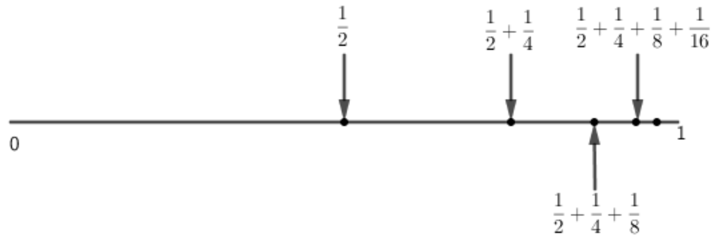


Figura 7

5. Solución: (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), …

6. Un intervalo abierto es un conjunto de números reales de la forma $\{x \,/\, a < x < b\}$, se representa como (a,b).

7. Entonces cada vez estamos más cerca de 1 sin llegar a tocarlo. Claro, también estaremos más cerca de 2, sin embargo la distancia al 1 se hará más pequeña que cualquier número que podamos pensar. Este es el sentido de una suma infinita ya que si al sumar una cantidad finita de términos se obtuviera como resultado 1 entonces, al seguir sumando los números restantes, la suma superaría a 1.

Si A es numerable podemos escribir A = $\{a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ ahora tomamos los intervalos $\left(a_1 - \frac{\varepsilon}{4}, a_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, $\left(a_2 - \frac{\varepsilon}{8}, a_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right)$, $\left(a_3 - \frac{\varepsilon}{16}, a_3 + \frac{\varepsilon}{16}\right)$,… que cubren respectivamente a $a_1, a_2, a_3,\ldots$, donde el primer intervalo mide $\frac{\varepsilon}{2}$, el segundo $\frac{\varepsilon}{4}$, el tercero $\frac{\varepsilon}{8}$, etc., entonces la suma de las longitudes de todos los intervalos del cubrimiento es $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \varepsilon$. Entonces ningún conjunto numerable A puede “llenar” un intervalo abierto, por ejemplo (0, 1), ya que tomando $\varepsilon = ½$, es posible cubrir el conjunto A con un cubrimiento para el cual la suma de las longitudes de todos los intervalos del cubrimiento es ½ mientras que el intervalo (0, 1) tiene una medida de 1. Por la misma razón el conjunto de puntos del problema, que es un conjunto numerable, no puede “llenar” la circunferencia ya que esta tiene una medida de $2\pi R$.

Queda pendiente entonces el tema de la densidad. ¿Es denso el conjunto de puntos sobre la circunferencia? Esto es, ¿cualquier segmento de la circunferencia contiene puntos del conjunto P? Esta propiedad es independiente del tamaño de la circunferencia, si tomamos $R = \frac{1}{2\pi}$ la circunferencia medirá 1. Ahora extendemos esta circunferencia sobre una recta (figura 8).

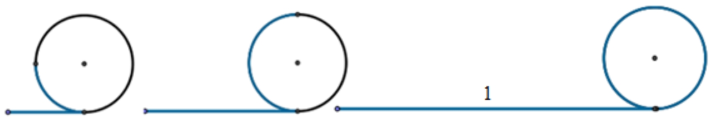


Figura 8

Y así, en adelante vamos a trabajar la circunferencia rectificada sobre el intervalo [0, 1). Todos los puntos del conjunto P corresponden ahora, gracias a esta transformación, a puntos de este intervalo y el segmento de circunferencia arbitrario que debemos tomar para verificar la presencia de puntos del conjunto P se corresponde con un subintervalo de [0, 1).

Vamos a presentar ahora una demostración de la densidad de los racionales en los reales[8]. Esta demostración es de capital importancia en esta discusión ya que es idéntica a la última parte de la demostración que nos ocupa. Entonces, luego de esta demostración, el trabajo que haremos consistirá en desarrollar las herramientas y establecer los resultados que nos permitan crear una analogía entre las dos demostraciones. Una vez hecho esto daremos por terminada la demostración ya que la última parte es análoga, paso a paso, a la que presentamos a continuación.

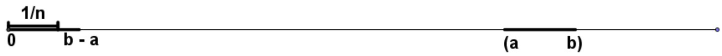
La prueba que mostraremos de la densidad de los racionales sobre ℝ emplea fuertemente la intuición geométrica. Debemos probar que cualquier intervalo (a,b) de números reales contiene por lo menos un racional. Si a < 0 y b > 0 se tiene el resultado ya que $0 \in (a,b)$. Probaremos el resultado para el caso $0 < a < b$ ya que el caso $a < b < 0$ se deduce por simetría a partir de aquel.

Dado el intervalo (a,b):

8. Esto significa que, si tomamos cualquier segmento de la recta real este, necesariamente, contine al menos un número racional. Véase nota 1.

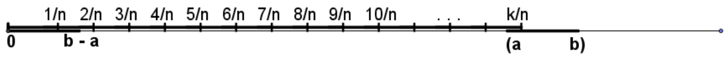
Entonces $b - a > 0$:

Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$:



Este $\frac{1}{n}$ será el tamaño del paso con el que se obtendrán los puntos $1/n$, $2/n$, $3/n$,…:

Como el tamaño del paso es menor que la longitud del intervalo necesariamente luego de k pasos “caeremos” en el intervalo (a,b):



Entonces el racional $\frac{k}{n} \in (a,b)$, que era lo que queríamos demostrar.

Desarrollaremos ahora las últimas herramientas. Recordemos la función piso (floor) que a cada número real x le asigna el mayor entero menor o igual que x. Se representa $\lfloor x \rfloor$. Una manera fácil de entender esta función es que si x es entero entonces $\lfloor x \rfloor$ es x; de lo contrario $\lfloor x \rfloor$ es el primer entero a la izquierda de x. Así $\lfloor 8 \rfloor=8$, $\lfloor 5.42 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -7 \rfloor= -7$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$. La gráfica de esta función es (figura 9).

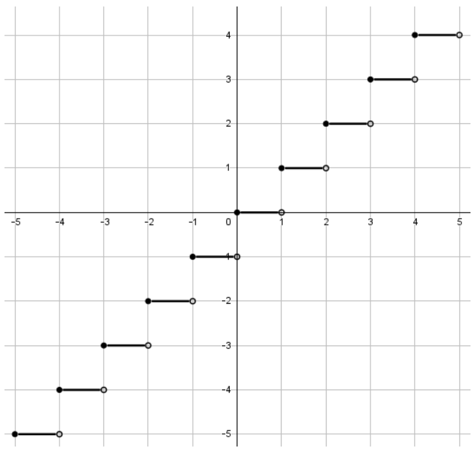


Figura 9

A partir de la función piso podemos definir la función parte fraccionaria, que se nota $\{x\}$ de la siguiente manera

$$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor \qquad (1)$$

La grafica de la función $\{x\}$ es (figura 10)

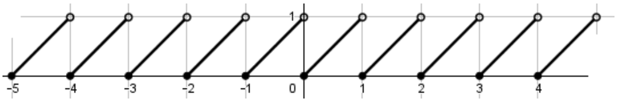


Figura 10

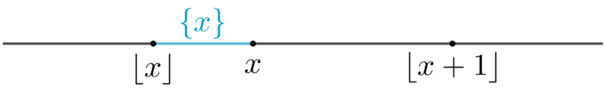
Tenemos que, por ejemplo, $\{5.23\} = 5.23-\lfloor 5.23\rfloor = 5.23-5 = 0.23$ lo cual justifica el nombre. Sin embargo, el caso de los número negativos es un poco diferente, veamos un ejemplo: $\{-4.7\} = -4.7-\lfloor -4.7\rfloor = -4.7-(-5) = 0.3$. Generalizando este ejemplo tenemos que para x no entero

$$\{-x\} = 1-\{x\} \qquad (2)$$

Traduzcamos la definición formal de la función a una representación gráfica que nos permita mejorar la comprensión de la función, así como la visualización de algunas de sus propiedades. Para ello despejamos x en (1) y obtenemos

$$x = \lfloor x\rfloor+\{x\} \qquad (3)$$

que gráficamente queda (recordemos que $\lfloor x\rfloor$ o es x, o está a la izquierda de x):



Entonces todo número real puede escribirse según (3), en donde $0 \leq \{x\} < 1$.
¿Cómo calcular $\{x+y\}$? Veamos: $x+y$ se puede reescribir, empleando 3, como

$$\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lfloor y\rfloor+\{y\} = \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\{x\}+\{y\}$$

Donde $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ es un entero, entonces $\{x+y\}$ depende exclusivamente de $\{x\}+\{y\}$ según la siguiente fórmula:

$$\{x+y\} = \begin{cases} \{x\}+\{y\} & si\ \ \{x\}+\{y\} < 1 \\ \{x\}+\{y\}-1 & si\ \ \{x\}+\{y\} \geq 1 \end{cases}. \qquad (4)$$

Es posible generalizar (4) de la siguiente manera, si $n\{x\} < 1$[9] entonces

$$\{nx\}=n\{x\} \qquad (5)$$

Si $\{x\}\geq\{y\}$ entonces, nuevamente empleando (3) $x-y=\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor+\{x\}-\{y\}$ de donde concluimos que

$$\{x-y\}=\{x\}-\{y\} \qquad (6)$$

Una propiedad interesante que caracteriza a un número irracional es que no posee dos múltiplos naturales que tengan la misma parte decimal. Más precisamente: dado $\alpha \in \mathbb{I}$, no existen naturales distintos m y n tales que $\{n\alpha\}=\{m\alpha\}$. En caso contrario se tendría que $n\alpha - m\alpha = k \in \mathbb{Z}$ y así $\alpha = k / (n-m)$ lo cual es una contradicción.

Veamos ahora un resultado capital en nuestra indagación:

Lema: Dados un número irracional ç$\alpha > 0$ y un real ε con $0 < \varepsilon < 1$ entonces existe un número natural n tal que $\{na\} < \varepsilon$.

En primer lugar sea $N > 1/\varepsilon$. Consideremos el conjunto

$$R=\{\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},\ldots,\{N\alpha\}\}$$

Por la propiedad que acabamos de demostrar sabemos que R está formado por N números diferentes. Sea b el máximo elemento de R. Nótese que R genera una partición del intervalo $[0, b]$ en N subintervalos donde, de ser todos iguales tendrían una longitud de b/N y, en cualquier caso, la longitud del más pequeño no excede a b/N. Sean j y k naturales tales que $\{j\alpha\}$ es el extremo izquierdo del menor de tales intervalos y $\{k\alpha\}$ su extremo derecho. En consecuencia $0 < \{k\alpha\} - \{j\alpha\} \leq \frac{b}{N} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (si el menor de tales intervalos es el primero de la izquierda entonces $k = 1$ y hacemos $j = 0$). Entonces, según la propiedad (6) $0 < \{(k-j)\,\alpha\} < \varepsilon$. Si $k-j > 0$ hacemos $n = k-j$, entonces $\{n\alpha\} < \varepsilon$ y hemos terminado.

El caso $k-j < 0$ requiere un poco más de trabajo. Para este caso sea $-m = k-j$ entonces $\{-m\alpha\} < \varepsilon$. Hacemos $\{-m\alpha\} = \varepsilon^*$, entonces $0 < \varepsilon^* < \varepsilon < 1$. Empleando (3) podemos escribir

$$-m\alpha = \lfloor -m\alpha\rfloor + \{-m\alpha\},$$

entonces

$$-m\alpha = \text{entero negativo} + \varepsilon^* \qquad (7)$$

Sea p el mayor natural tal que $p\varepsilon^* < 1$ (de donde $1 - p\varepsilon^* > 0$), esto implica que $(p+1)\varepsilon^* > 1$[10] o, de forma equivalente

$$1 - p\varepsilon^* < \varepsilon^* \qquad (8)$$

9. Recordemos que $nx=x+x+\cdots+x$ donde x aparece n veces.

10. No es $(p+1)\varepsilon^* \geq 1$ ya que, por definición, ε^* es irracional.

Si multiplicamos (7) por p obtenemos

$$-pm\alpha = \text{entero negativo} + p\varepsilon^*$$

y, por lo tanto $\{-pm\alpha\} = p\varepsilon^*$ entonces (8) se transforma en

$$0 < 1 - \{-pm\alpha\} < \varepsilon^* < \varepsilon.$$

y, aplicando (2), finalmente se tiene

$$0 < \{pm\alpha\} < \varepsilon.$$

Haciendo $n = pm$ se tiene $\{n\alpha\} < \varepsilon$. Que era lo que se quería demostrar.

Acabamos de obtener la última pieza del rompecabezas. Retomemos: si $R = \frac{1}{2\pi}$ la circunferencia medirá 1 y al ser "extendida" coincidirá con el intervalo [0, 1). La representación del punto P_n en el intervalo [0, 1) queda determinada por $\{\frac{n}{2\pi}\}$. La figura 11 ilustra el caso de la primera vuelta completada y el punto correspondiente en [0, 1).

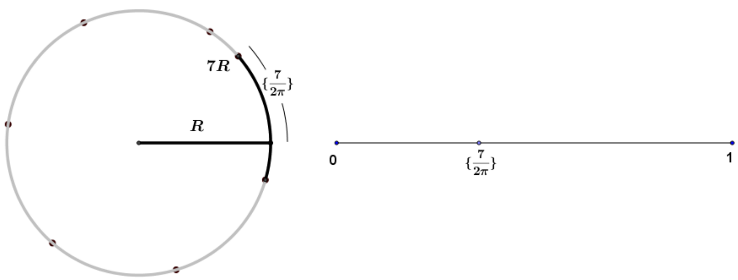


Figura 11

Para demostrar la densidad del conjunto de puntos en [0, 1] tomamos un intervalo abierto $(a,b) \subset [0,1)$ (figura 12) calculamos $\varepsilon = b - a$ y empleamos el lema donde $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ y así obtenemos n tal que $\{\text{na}\} < \varepsilon$ y entonces procedemos igual que en la demostración de la densidad de los racionales en los reales. La conclusión queda justificada por (5) ya que se tendría $\text{k}\{\text{n}\alpha\} = \{(kn)\alpha\}$.

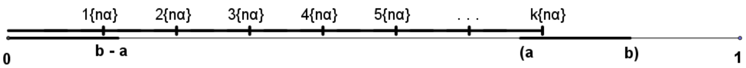


Figura 11

2. CONCLUSIÓN

Quien hace una demostración se ayuda de intuiciones geométricas, algebraicas, etc., y luego consigna todo esto en una estructura rigurosa. Quien hace una primera lectura de una demostración generalmente verifica la corrección lógica de esta línea por línea. Sin embargo, más que esta verificación lo que desea el lector es *ver* algo del pensamiento del autor al concebir su idea. La forma rigurosa que se estila para consignar este tipo de razonamientos no siempre ayuda a aclarar esta visión y, principalmente, el lector principiante puede sentirse intimidado por la complejidad de la estructura que se le presenta. Buscar, en lo posible, las intuiciones subyacentes constituye un método muy adecuado para la profunda comprensión de las demostraciones matemáticas.

3. REFERENCIAS

Smullyan, R. (2007). *Satán, Cantor y el infinito*. Barcelona: RBA Desafíos matemáticos.

Niven, I. (1956). *Irrational numbers*. Carus Mathematical Monographs 11. The Mathematical Association of America.

Staib, J. H. y Demos, M. S. *On the limit points of the sequence* {sin *n*}. Drexel Institute of Technology. http://users.auth.gr/~siskakis/sin(n).pdf