Un problemita de probabilidad del siglo XVII

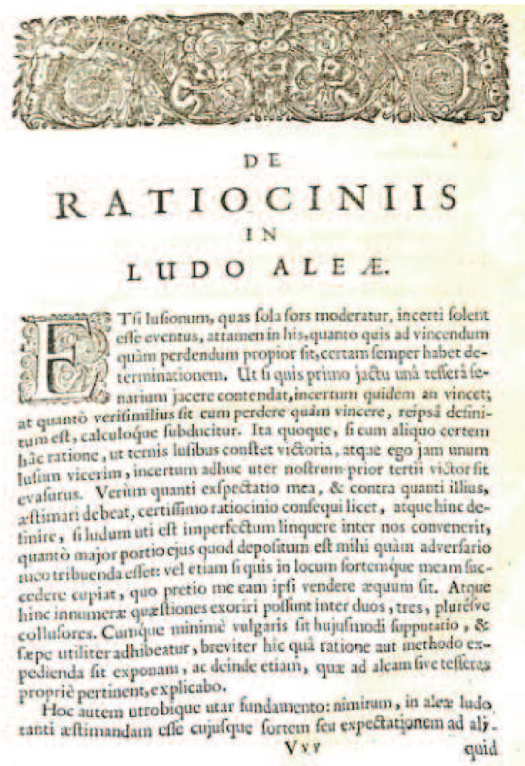
por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Las evidencias históricas de que el juego acompaña al ser humano desde su origen son abundantes. Por ejemplo, existen documentos que hablan de versiones antiguas del ajedrez en el siglo VII, y el *go* aparece ya mencionado en las *Analectas* de Confucio hace unos 2 500 años. Respecto a los juegos de azar, ya se jugaba a las tabas en la Grecia y Roma clásicas y restos de juegos de tablero, quizás parecidos al parchís, se han encontrado en ruinas sumerias de unos 5 000 años de antigüedad.

Jugar es una de las actividades humanas que se encuentran en la base y motivan la aparición del pensamiento matemático. De hecho, tanto el azar como la estrategia, ingredientes que forman parte en proporción variable de casi cualquier juego que uno pueda imaginar, son susceptibles de ser abordados matemáticamente.

Pese a su antigüedad, el tratamiento sistemático de los juegos de azar tuvo que esperar hasta el siglo XVII. En el siglo anterior, Cardano compuso un *Liber de ludo aleæ* pero no fue publicado hasta 1663. Así, los primeros pasos importantes dirigidos a abordar lo que hoy llamaríamos cálculo de probabilidades se dieron en un intercambio epistolar entre Fermat y Pascal a mediados del siglo XVII. En esta correspondencia se cita la obra *Ars conmutationes*, escrita por el aragonés Sebastián de Rocafull y Español. Desafortunadamente, toda la obra matemática de Rocafull se perdió durante la Guerra de Sucesión, puesto que las tropas borbónicas incendiaron su casa natal en Báguena.

Ya en 1657 Christian Huygens publicó su *De ratiociniis in ludo aleæ*, que es el primer texto publicado (que se conserve) en el que se aborda el tema de forma sistemática.


DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possint inter duos, tres, plurésve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hic quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad ali-

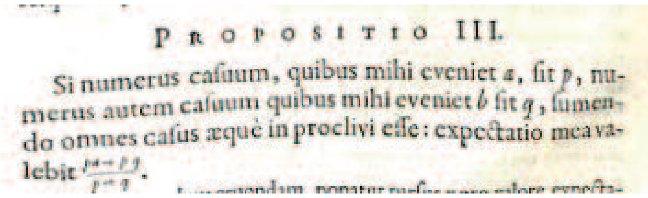
V v v quid

La breve obra de Huygens, que ocupa tan solo 14 páginas, comienza con las siguientes palabras:

> Aunque en los juegos que solo dependen de la suerte, los sucesos son siempre inciertos, cuánto más cerca se está de ganar que de perder, siempre puede determinarse de modo cierto.

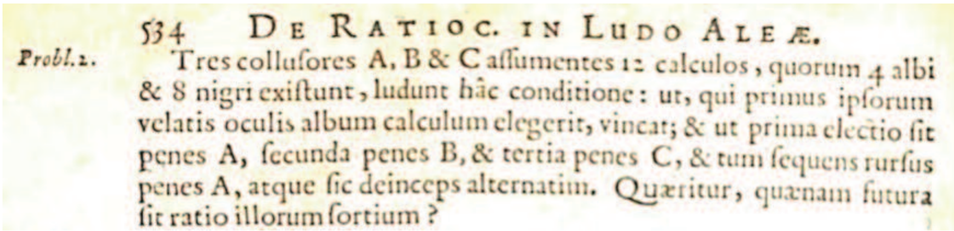
Como quizás pueda deducirse de estas palabras, la obra de Huygens introduce, en cierto modo, la idea de esperanza (*expectatio*). Así, por ejemplo, podemos encontrar lo siguiente:

> Si el número de casos en los que me sucede a es p, y el número de casos en los que me sucede b es q, suponiendo todos los casos igualmente proclives, mi esperanza valdrá $\frac{pa+qb}{p+q}$.


PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

El breve tratado termina con cinco problemas propuestos para su resolución (de alguno se da solo la solución numérica). Cabe señalar que esta práctica de incluir listas de problemas, muy común especialmente desde el siglo XIX, era extremadamente inusual en la época de Huygens.


534 DE RATIOC. IN LUDO ALEÆ.

Probl. 2. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

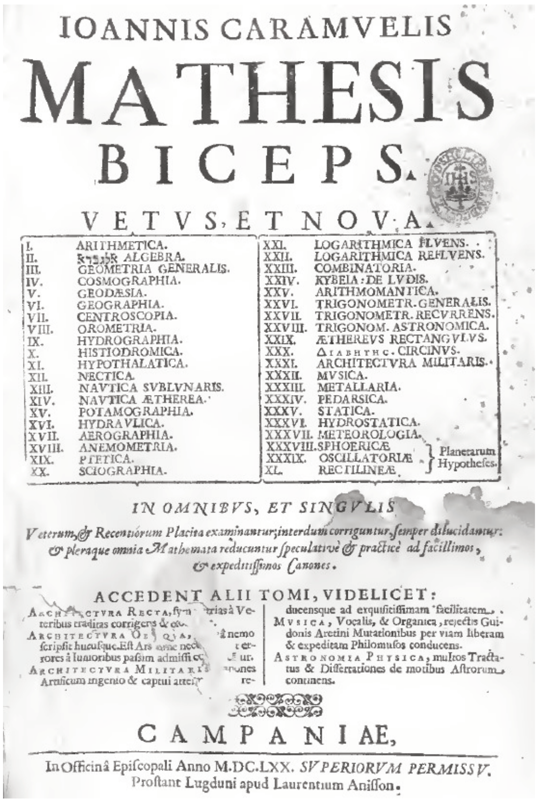
La traducción aproximada del latín sería esta:

> Tres compañeros de juego A, B y C tienen 12 piedrecillas de las cuales 4 son blancas y 8 negras. Juegan con la condición de que el primero que extraiga una piedra blanca con los ojos vendados, gana. Primero elige A, segundo B, tercero C y así sucesivamente. Pregunto, ¿cuáles serán las razones entre sus probabilidades de ganar?

Como sucede en tantas ocasiones con los problemas de matemáticas (lo que quizás debería hacernos reflexionar un poco) el enunciado no aparenta sus 350 años de edad. Sin embargo, la pregunta que plantea Huygens sí que se aparta quizás de lo que se esperaría en un problema actual. No se pregunta por la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores, sino de la razón entre dichas probabilidades. Evidentemente, ambas cuestiones son equivalentes (ya que las probabilidades suman 1) pero el matiz es importante. De hecho, en el contexto de un juego de azar entre varios jugadores, lo importante no es tanto la probabilidad de ganar de cada uno independientemente sino la comparación (multiplicativa) entre dichas probabilidades. Sobre esto volveremos más adelante, cuando resolvamos el problema.

Pocos años después de la obra de Huygens, en 1670, se publicó en Campania un libro titulado *Mathesis biceps*. Su autor fue el cisterciense español Juan Caramuel Lobkowitz, nacido en Madrid en 1606. Entre los numerosos contenidos que abarca la obra, de casi 2 000 páginas, encontramos un capítulo de 24 páginas titulado *Kybeia* y dedicado al azar.

El texto de Caramuel contiene gran cantidad de material original. Por ejemplo, realiza el análisis de un juego popular en la época en España e Italia (según dice el autor) denominado *pasa-diez*. Sin embargo, la segunda mitad consiste en una transcripción literal de la obra de Huygens (que atribuye por error a un astrónomo danés) que acabamos de comentar. Hay que decir, no obstante, que también se incluyen dos páginas de comentarios al hilo del texto de Huygens, que demuestran claramente que Caramuel no se limitó a reproducir el material.


IOANNIS CARAMVELIS

MATHESIS

BICEPS.

VETVS, ET NOVA.

I.	ARITHMETICA.	XXI.	LOGARITHMICA FLVENS.
II.	אלגברא ALGEBRA.	XXII.	LOGARITHMICA REFLVENS.
III.	GEOMETRIA GENERALIS.	XXIII.	COMBINATORIA.
IV.	COSMOGRAPHIA.	XXIV.	KYBEIA: DE LVDIS.
V.	GEODÆSIA.	XXV.	ARITHMOMANTICA.
VI.	GEOGRAPHIA.	XXVI.	TRIGONOMETR. GENERALIS.
VII.	CENTROSCOPIA.	XXVII.	TRIGONOMETR. RECVRRENS.
VIII.	OROMETRIA.	XXVIII.	TRIGONOM. ASTRONOMICA.
IX.	HYDROGRAPHIA.	XXIX.	ÆTHEREVS RECTANGVLVS.
X.	HISTIODROMICA.	XXX.	Διαβητης. CIRCINVS.
XI.	HYPOTHALATICA.	XXXI.	ARCHITECTVRA MILITARIS.
XII.	NECTICA.	XXXII.	MVSICA.
XIII.	NAVTICA SVBLVNARIS.	XXXIII.	METALLARIA.
XIV.	NAVTICA ÆTHEREA.	XXXIV.	PEDARSICA.
XV.	POTAMOGRAPHIA.	XXXV.	STATICA.
XVI.	HYDRAVLICA.	XXXVI.	HYDROSTATICA.
XVII.	AEROGRAPHIA.	XXXVII.	METEOROLOGIA.
XVIII.	ANEMOMETRIA.	XXXVIII.	SPHOERICÆ } Planetarum Hypotheses.
XIX.	PTETICA.	XXXIX.	OSCILLATORIÆ
XX.	SCIOGRAPHIA.	XL.	RECTILINEÆ

IN OMNIBVS, ET SINGVLIS

Veterum, & Recentiorum Placita examinantur; interdum corriguntur, semper dilucidantur: & pleraque omnia Mathemata reducuntur speculativè & practicè ad facillimos, & expeditissimos Canones.

ACCEDENT ALII TOMI, VIDELICET:

ARCHITECTVRA RECTA, symmetrias à Veteribus traditas corrigens & ... ARCHITECTVRA OBLIQVA, ... nemo scripsit hucusque. Est Ars ... errores à iunioribus passim admissi ... ARCHITECTVRA MILITARIS ... Artificum ingenio & captui ... ducensque ad exquisitissimam facilitatem.

MVSICA, Vocalis, & Organica, rejectis Guidonis Aretini Mutationibus per viam liberam & expeditam Philomusos conducens.

ASTRONOMIA PHYSICA, multos Tractatus & Differtationes de motibus Astrorum continens.

CAMPANIAE,

In Officinâ Episcopali Anno M.DC.LXX. *SVPERIORVM PERMISSV.*

Prostant Lugduni apud Laurentium Anisson.

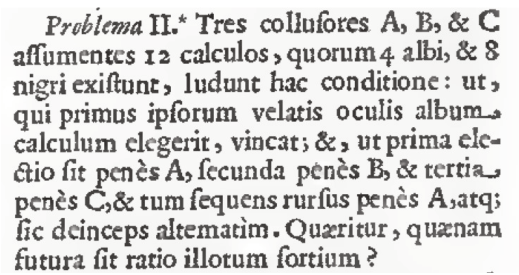
La mayor parte de estos comentarios son muy interesantes, por cuanto involucran reflexiones relacionadas con la naturaleza del concepto de probabilidad en un momento en que este aún no estaba bien establecido. Por ejemplo, encontramos comentarios sobre la influencia de la forma sobre la equiprobabilidad de los resultados de lanzamientos:

> Si jugamos con un dado, todos los números son igualmente posibles. Si usamos una taba, cuya figura es diversa, algunas partes destacan.

Y también sobre los valores más probables al lanzar varios dados:

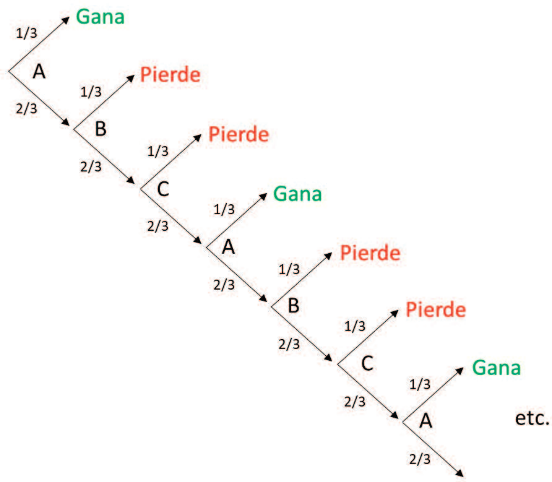
> Si usamos dos dados, el número óptimo es 7 […] Si finalmente usamos tres dados, los números óptimos son 10 y 11.

Como hemos dicho, en el libro de Caramuel se transcriben también los cinco problemas finales de Huygens y, en particular el que hemos presentado antes.


Problema II.* Tres collusores A, B, & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri existunt, ludunt hac conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; &, ut prima electio sit penès A, secunda penès B, & tertia penès C, & tum sequens rursus penès A, atq; sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Aunque no es lo que pide el autor, vamos a resolverlo calculando directamente cuál es la probabilidad de que cada jugador gane el juego. Además, suponemos que las extracciones son con reemplazamiento. Huygens no lo indica, pero se presupone en toda su obra que siempre es así. Quizás el lector quiera detenerse aquí y tratar de calcular estas probabilidades por sus propios medios.

Comenzamos por el primer jugador. La probabilidad de sacar una bola blanca es 1/3 y la probabilidad de sacar una bola negra es 2/3. El siguiente diagrama de árbol ilustra la situación desde el punto de vista del jugador A.



De este modo, la probabilidad de que gane el jugador A es

$$p(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^n+\ldots=\frac{9}{19}.$$

Se pueden hacer los árboles correspondientes a los jugadores B y C y obtener de forma similar que:

$$p(B)=\frac{6}{19},\quad p(C)=\frac{4}{19}.$$

Esto resuelve el problema completamente. Sin embargo, si abordamos la pregunta original que realmente plantea Huygens, hay una forma mucho más rápida y directa de resolverlo. Recordemos que Huygens (y Caramuel) no piden calcular la probabilidad de que gane cada jugador, sino las razones entre ellas.

El modo de razonar esta sugerido en el diagrama, pero se puede abordar directamente teniendo en cuenta lo siguiente. Si el primer jugador pierde, el segundo pasa a ocupar el papel del primero. Como el primero pierde $2/3$ de las veces, el segundo se convierte en el primero $2/3$ de las veces y esa es justamente la razón entre sus probabilidades de ganar. Del mismo modo, para que el tercero pase a ser el primero, los dos anteriores deben perder, lo que sucede $4/9$ de las veces. Como hemos comentado antes, esta discusión nos permite entender completamente el juego, sin necesidad de calcular las probabilidades individuales. Nos basta con saber que esperamos que de cada 19 partidas jugadas, A ganará 9, B ganará 6 y C ganará 4.

Por otro lado, este enfoque abre la puerta a introducir el lenguaje de la proporcionalidad aritmética en el ámbito de la probabilidad. Por ejemplo, podemos pensar (de nuevo con un cierto abuso del lenguaje) que la probabilidad de ganar de un jugador representa «las veces que gana ese jugador por cada vez que se juega una partida». Así, retomando la última frase del párrafo anterior, de cada partida jugada, esperamos que A ganará $9/19$, B ganará $6/19$ y C ganará $4/19$, que son las probabilidades que hemos calculado antes por otros medios más expeditivos.

Para terminar, planteo aquí dos de los otros cuatro problemas que cierran la obra de Huygens. En ambos, el propio autor da la solución numérica (de la que podemos fiarnos, o no). El lector interesado puede tratar de resolverlos como mejor sepa.

Problema III.
A acuerda con B que, de 40 cartas, de las que 10 son de cada palo, sacará 4 de forma que todas serán de diferente palo. Y se ve que sus probabilidades de ganar son de 1 000 a 8 139.

Problema V.
A y B tienen 12 monedas cada uno y juegan con 3 dados bajo la siguiente condición. Si salen 11 puntos, A le dará a B una moneda, pero si salen 14 puntos, entonces B le dará a A una moneda; de modo que ganará el juego aquel que se quede con todas las monedas. Las probabilidades de victoria respectivas están en la razón de 244 140 625 a 282 429 536 481.