Ecuaciones en 2.º ESO desde la Historia de las Matemáticas

por
Mari Carmen Morales Barnés y Christian H. Martín Rubio
(IES San Juan Bosco, Lorca, Murcia; IES Clara Campoamor Rodríguez, Zaragoza)

> Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.
>
> Bell, E. T. (1985) *Historia de las Matemáticas*

> Hasta el niño más inteligente se encuentra con dificultades muy grandes, por regla general, al iniciarse en álgebra. La utilización de las letras es un misterio cuyo único propósito parece la mistificación. (…) El hecho es que en álgebra se enseña primero al espíritu a considerar verdades generales, verdades de las que no se afirma que lo sean para esta o aquella cosa en particular, sino para cualquiera de las de todo un conjunto de cosas… Normalmente se continúa con el método adoptado en aritmética: se enuncian las reglas sin una explicación adecuada de sus bases; el alumno aprende a usarlas ciegamente, y al poco tiempo, cuando es capaz de obtener la respuesta que espera el profesor, cree que ha dominado las dificultades de la materia. Pero probablemente no ha comprendido profundamente casi nada de los procedimientos utilizados.
>
> Russell, B. «El estudio de las matemáticas», en *Mística y Lógica* [1]

La función didáctica de la Historia de las Matemáticas, como instrumento de comprensión de sus fundamentos, de la evolución y dificultades de sus conceptos, de sus métodos vivos y como fuente de respuesta a los retos de su aprendizaje, parece asentada en la comunidad educativa, aunque su uso en el aula sigue siendo más bien esporádico. En general, nuestros libros de texto presentan los conceptos y las ideas matemáticas de una forma cerrada y acabada, bajo la premisa, además, del actual paradigma matemático, caracterizado por que «las verdades matemáticas no necesitan verse ni imaginarse. Simplemente se exige la consistencia lógica interna del encadenamiento proposicional» (Hormigón, 1995:116). No es de extrañar que, como nos señala Russell, hasta la niña más inteligente, hasta el niño más curioso, tenga dificultades con nuestra materia. Y en álgebra, necesitada de una mayor capacidad de abstracción, muchas más.

Partiendo de estos análisis previos, se planteó el trabajo de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en varios cursos de 2.º ESO. Estos cursos venían de una práctica casi nula en las ecuaciones. Las especiales circunstancias en que se desarrolló el final del curso pasado —y se está desarrollando el presente [2]—, hizo que apenas vieran álgebra en 1.º ESO y mucho menos, ecuaciones. Esto, por un lado, permitía poder iniciar este estudio casi desde cero, a la vez que, por otro lado, obligaba a tratar este año lo correspondiente a dos cursos. A partir de esta situación se pretendió diseñar una manera de poder trabajar la resolución de problemas desde el comienzo del tema, sin tener que esperar a tratar con la trasposición de términos en las expresiones algebraicas y postergar, al final del tema, los «problemas». Podemos sintetizar los objetivos buscados en: la asociación, desde el inicio, del álgebra con la búsqueda de soluciones de problemas; mostrar diferentes formas de encontrar la solución correcta en un problema concreto; alejarnos de la formalización abstracta del algoritmo estanco que presenta el producto final; usar la resolución de problemas como elemento director del álgebra e intentar una transición más continua y cómoda entre el trabajo en aritmética y en álgebra.

Tras una breve investigación en las formas históricas de resolución de problemas asociados a ecuaciones de primer y de segundo grado, observamos cómo los métodos algebraicos fueron relegando a los métodos aritméticos.

Estos, utilizados durante siglos, son mucho más intuitivos pero su objetivo era resolver tipos concretos de problemas, creando distintas colecciones de ellos, con un propósito claramente práctico y sin justificar la regla utilizada. Los métodos algebraicos, por el contrario, son métodos canónicos de resolución, concentrando todos los problemas en torno a un solo tipo, más eficaces y coherentes con el actual paradigma matemático, al que hacíamos antes referencia. Y ahí es donde se sitúa el coste a pagar, son mucho más abstractos. ¿Podríamos comenzar resolviendo problemas por medio de métodos aritméticos y pasar más tarde a la formalización algebraica y sus métodos? ¿Podríamos emular mínimamente la historia de las matemáticas en una pequeña aula?

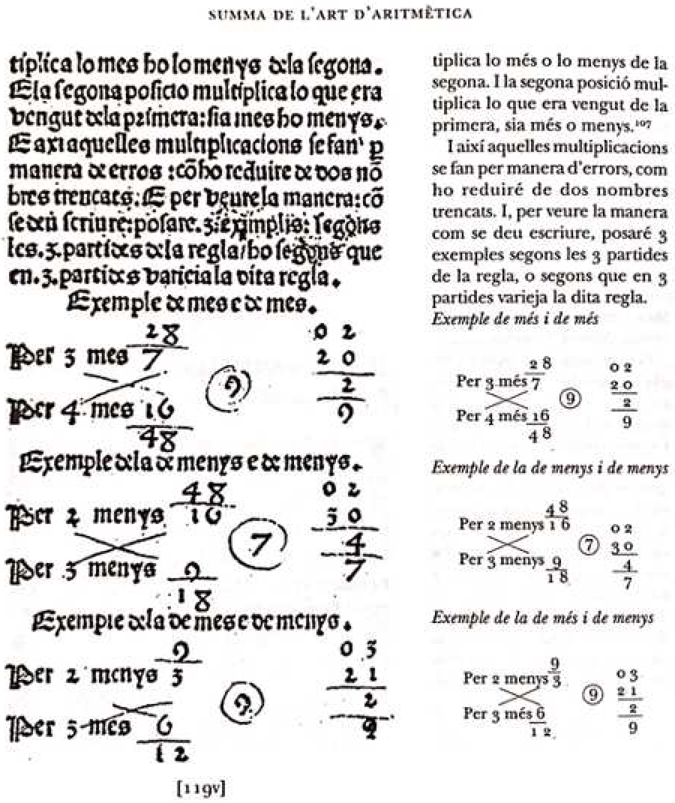


Figura 1. *Summa de l'art d'Aritmètica* (Santcliment, 1482)

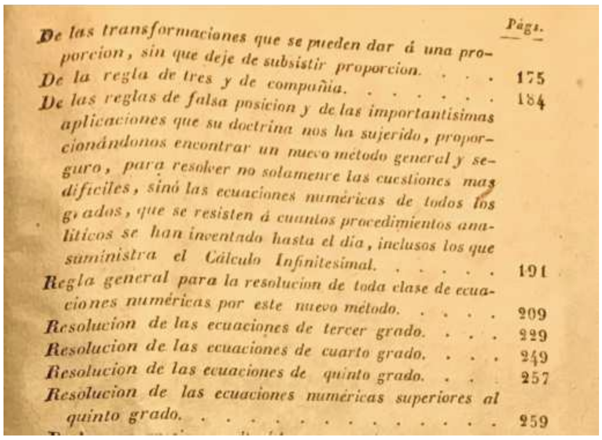


Figura 2. *Compendio de matemáticas puras y mistas, Tomo I* (*Vallejo, J. M.*, 1840)

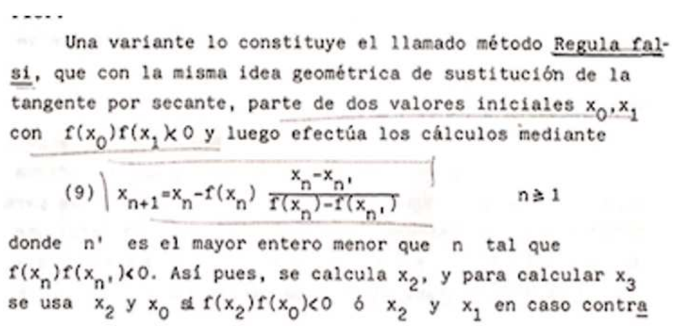


Figura 3. *Cálculo Numérico. Resolución de ecuaciones y sistemas* (Gasca, 1987)

El *método de la falsa posición* es un método aritmético ya presente en las civilizaciones de la Edad Antigua y utilizado comúnmente hasta el siglo XVIII. Por poner dos ejemplos significativos, podemos encontrarlo en la resolución del problema 24, del *Papiro de Ahmes* o *Papiro Rhind* (1650 a. C.) o en el capítulo 12 y 13 del *Liber Abaci* (1202), de Leonardo de Pisa —Fibonacci—. También nos lo encontraremos en el primer libro de matemáticas publicado en España, precisamente en Zaragoza, en castellano: *Summa de l'art d'Aritmètica* (1482) de Francesc Santcliment [3] y una muestra de la posible importancia que pudo llegar a tener nos la proporciona el *Compendio de matemáticas puras y mistas, Tomo I* (1840) de José Mariano Vallejo, que en esta 4.ª edición le dedica varias páginas a explicar este método que resolverá «(…) ecuaciones numéricas de todos los grados, que se resisten á cuantos procedimientos analíticos se han inventado hasta el día, inclusos [sic] los que suministra el Cálculo Infinitesimal». No nos sorprendamos e intenten recordar si este método es uno de los que el lector o lectora estudió en la Facultad de Matemáticas. Los autores de este artículo sí, concretamente en la asignatura Cálculo Numérico de 3.º curso explicada mediante el libro de Mariano Gasca, del mismo título que la asignatura, concretamente en el tema X, «Métodos de resolución de ecuaciones no lineales: generalidades», y en el tema XI, «Métodos de resolución aproximada más usados».

La regla de la falsa posición que vamos a utilizar para resolver ecuaciones lineales, parte de un valor cualquiera (método simple) o de dos valores (método doble) y a partir de los errores cometidos al tomar esos valores, se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad. Veamos el método simple para resolución de ecuaciones del tipo $ax=b$ y para ello supongamos el siguiente enunciado, uno de los primeros que utilizamos en el aula:

En un pueblo había cinco hornos en los que se coció el mismo número de panes. Al mediodía, dos de los hornos habían vendido todos los panes, el tercer horno tenía vendida la mitad, el cuarto horno, la tercera parte y el quinto horno, la cuarta parte. Si se habían vendido en total 296 panes. ¿Cuántos panes coció cada horno?

Utilizando el método algebraico, la forma de resolverlo sería por medio de la ecuación:

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=296.$$

Cuya resolución es:

$$\frac{12x+12x+6x+4x+3x}{12}=296 \quad\Rightarrow\quad \frac{37x}{12}=296 \quad\Rightarrow\quad 37x=12\cdot 296 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{12\cdot 296}{37}=96 \text{ panes.}$$

Algo no muy asequible para alguien que una hora antes no había tenido el placer de conocer una ecuación.

Por la regla simple de la falsa posición, suponemos que cada horno ha cocido un número determinado de panes, por ejemplo, 12. Si fuera ese número, el número de panes vendidos hubiera sido $12+12+6+4+3=37$ panes, es decir, la proporción entre los panes cocidos por cada pan vendido es $12/37$, luego para los 296 panes vendidos, será:

$$x=\frac{12}{37}\cdot 296=\frac{12\cdot 296}{37}=96 \text{ panes.}$$

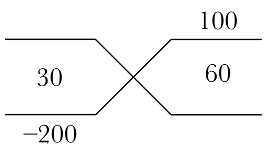
Lo que resulta mucho más comprensible para una persona que acaba de dar fracciones y proporcionalidad.

Estudiemos ahora la regla compuesta de la falsa posición, para ecuaciones de la forma $ax+b=K$. Para ello utilizaremos otro ejemplo, resuelto el segundo día de clase, y una versión propia de la regla, pensada para facilitar su explicación en el aula. Supongamos el enunciado:

Ana y su madre cruzan una calle por el paso de cebra. Ana necesita 35 pasos, y su madre, solo 25. Si un paso de la madre es 20 cm más largo que uno de Ana, ¿cuánto mide el paso de cada una?

Esta vez dejaremos la resolución por el método algebraico para alguna persona que aún pueda sentir cierta desconfiada por los métodos históricos y veamos cómo lo solucionamos de esta otra forma. A diferencia de la anterior, esta vez tomaremos dos posibles valores para la longitud del paso de, por ejemplo, Ana. Supongamos que mide 30 cm[4]. Por tanto, el de la madre medirá: $30+20=50$ cm. Si Ana ha dado 35 pasos, ha recorrido $30\cdot 35=1\,050$ cm al cruzar la calle y la madre habrá recorrido: $500\cdot 25=1\,250$ cm. Como han recorrido el mismo espacio, el error cometido al considerar el paso de Ana de 30 cm en lugar de su medida exacta, x cm (error de $(30-x$ cm$)$, es de $1\,050-1\,250=-200$ cm. Supongamos ahora otra medida del paso de Ana, por ejemplo, 60 cm. Volviendo a realizar los cálculos anteriores, obtenemos que esta vez el error cometido en la medida del paso: $60-x$ cm, nos da un error en el recorrido de $2\,100-2\,000=100$ cm.

La regla compuesta de la falsa posición nos dice que la respuesta correcta se obtiene haciendo los productos cruzados y dividiendo por la diferencia de los errores, es decir:



$$x=\frac{30\cdot 100-60\cdot(-200)}{100-(-200)}=\frac{15000}{300}=50 \text{ cm.}$$

Pero es cierto que estamos dando otra regla «mágica», que necesita justificación. De las diferentes que podemos dar, y algunas de ellas se pueden encontrar en el material compartido de la presentación en la IV JEMA, nos parece interesante mostrar, en 1.º o 2.º ESO, la que sigue, ya que nos va a permitir introducir, de una manera más natural, cómoda y menos rupturista, la notación algebraica y la transposición de términos.

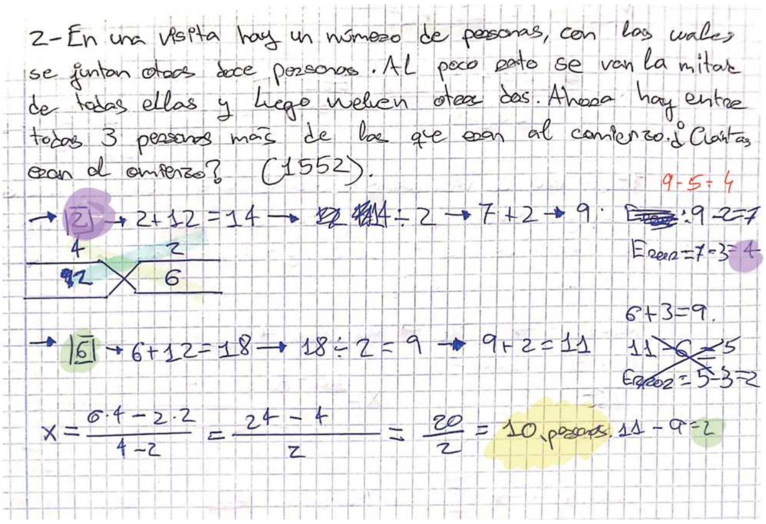


Figura 4. Solución de una alumna a un problema del Libro primero, de *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel (Meavilla, 2013)

Volvamos al final del razonamiento anterior, justo antes de aplicar la regla. Lo interesante es que la proporción del error cometido es una constante en este problema, es decir que:

$$\frac{30-x}{-200}=\frac{60-x}{100}.$$

Y como el alumnado ha trabajado el significado de fracciones equivalentes, sabe que eso significa que:

$$100\cdot(30-x)=-200\cdot(60-x)\Rightarrow 3\,000-100\cdot x=-12\,000+200\cdot x.$$

Como $3\,000=-12\,000+15\,000$ y como $200=-100+300$, la expresión anterior queda en:

$$-12\,000+15\,000-100\cdot x=-12\,000-100\cdot x+300\cdot x.$$

Lo que nos permite olvidarnos de los sumandos iguales y buscar la x que haga realidad esa igualdad, es decir, buscar la x que cumpla que $15\,000=300\cdot x$, o lo que es lo mismo, el número x que multiplicado por 300, nos dé 15 000… el paso de Ana medirá 50 cm y el de su madre 70 cm.

En ir combinando estas dos formas y saber en qué momento podemos pasar a la formulación exclusivamente algebraica, estará el reto de minimizar el trauma de dejar atrás las matemáticas más utilizadas hasta ese momento, la aritmética, y comenzar con esta nueva faceta abstracta.

El caso de las ecuaciones de segundo grado es mucho más intuitivo, visual y claro, al utilizar el famoso método griego del algebra geométrica, tan común y que tantos frutos ha dado en nuestra historia: planteamiento algebraico y resolución geométrica. Lo que haremos es simplemente completar cuadrados, algo que numéricamente tiene una gran dificultad para la práctica totalidad del alumnado de la ESO. Sin embargo, hacerlo geométricamente provocó en nuestras alumnas y alumnos una gran simpatía que manifestaron varias quejas al llegar el momento de explorar la fórmula.

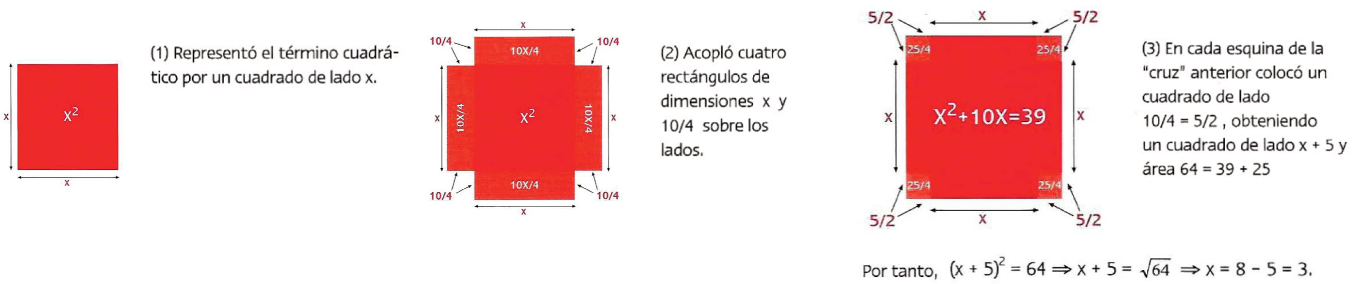


Figura 5. Resolución de al-Khwarizmi de la ecuación $x^2+10x=39$

Para las ecuaciones de la forma $x^2+bx-c=0$, el procedimiento es muy claro. Veámoslo en el caso de la ecuación $x^2+10x-39=0$, es decir, $x^2+10x=39$.

El primer término corresponde a la figura 6 que tan sólo necesita completarse con un cuadrado de $5 \cdot 5=25\,u^2$ para obtener el cuadrado completo de lado $(x+5)^2$. Es decir, como la parte sombreada es 39, tenemos que:

$$(x+5)^2=39+25 \;\Rightarrow\; (x+5)^2=64 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+5=8 \;\Rightarrow\; x=8-5=3 \\ x+5=-8 \;\Rightarrow\; x=-8-5=-13 \end{cases}.$$

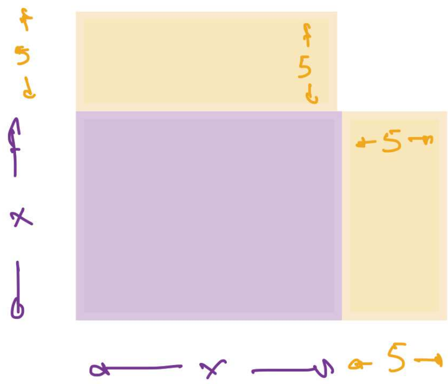


Figura 6

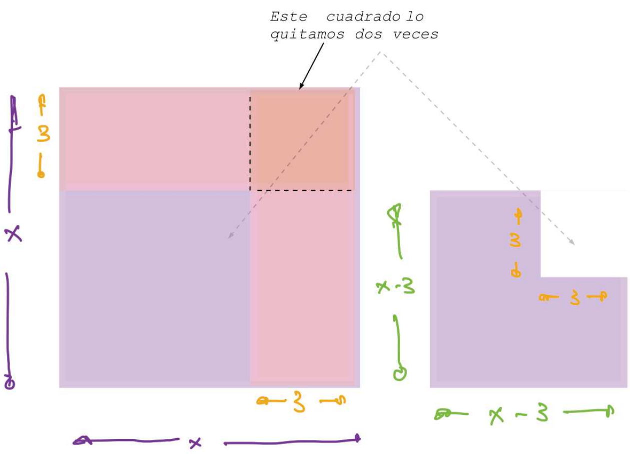


Figura 7

Para las ecuaciones de la forma $x^2-bx+c=0$, simplemente debemos tener en cuenta que en el término de la izquierda hay un cuadrado que se quita dos veces y tan solo debemos quitarlo una. Veámoslo en el caso de la ecuación $x^2-6x+5=0$, es decir, $x^2-6x=-5$.

El primer término se corresponde a la figura 7. Para completar el cuadrado es necesario añadir un cuadrado de $3 \cdot 3=9\,u^2$ y se obtendrá entonces el cuadrado de lado $(x-3)^2$. Por tanto:

$$(x-3)^2=-5+9 \;\Rightarrow\; (x-3)^2=4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \;\Rightarrow\; x=2+3=5 \\ x-5=-2 \;\Rightarrow\; x=-3+3=1 \end{cases}.$$

Evidentemente, así también resolveremos ecuaciones con una solución doble o sin solución y con fracciones o sin ellas. Ejemplos de esos casos se pueden encontrar en el material presentado en la IV JEMA.

Más métodos y más experiencias

Otro de los métodos utilizados en el aula, antes de introducir la transposición de términos para la resolución de ecuaciones, es el que el propio alumnado bautizó como el «método de las balanzas».

Esta actividad se podría hacer con balanzas didácticas, pero hemos optado por la balanza digital (figura 8) de Rafael Losada, para trabajar con GeoGebra.

Para resolver una ecuación tenemos que ir añadiendo o quitando cubos para poder averiguar el valor de la incógnita. Paralelamente los alumnos resuelven esta ecuación en su cuaderno. Aconsejamos escribir de colores distintos las cantidades que se añaden o se quitan para ir tomando conciencia de que la igualdad se mantiene.

Una vez asimilado cómo resolvemos las ecuaciones como si fuese una balanza, intentamos que los alumnos observen que, por ejemplo, +4 en el miembro de la izquierda está ahora

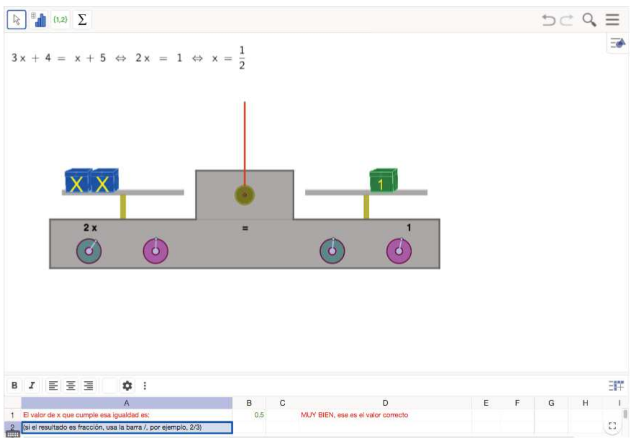


Figura 8. Balanza digital de Rafael Losada en GeoGebra

en el miembro de la derecha, pero con −4 o el +2 que multiplicaba todo el miembro de la izquierda, está ahora en el miembro de la derecha dividiendo.

Esto lo conseguimos gracias a preguntas del tipo: ¿hay alguna relación entre el +4 y el −4 de la ecuación?; ¿se te ocurre un procedimiento más rápido para resolver las ecuaciones? Los alumnos suelen darse cuenta de que al final siempre que tenemos un +4 y le sumamos −4 se anula, pero en el miembro de la derecha se queda este término por el que hemos sumado. Propiciando en la clase un ambiente de preguntas, entre todos se llega al acuerdo de lo que se conoce como la transposición de términos.

Y, ¿cómo trabajamos las ecuaciones de segundo grado?

Se pide a los alumnos calcular las dimensiones de la zona ajardina de la casa de Izarbe, sabiendo que todo el jardín tiene un área de 32 m² (figura 9).

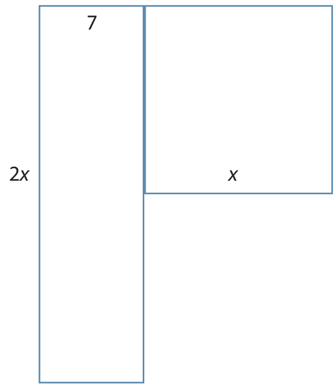


Figura 9. El jardín de la casa de Izarbe

A continuación, se les da la idea de cortar el rectángulo por la mitad para colocarlo como en la figura10.

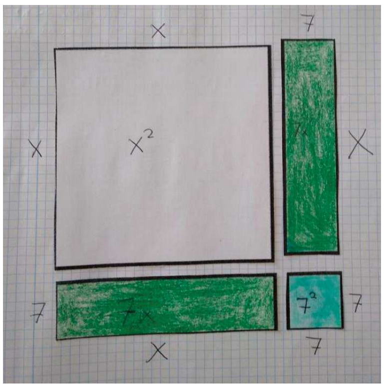


Figura 10

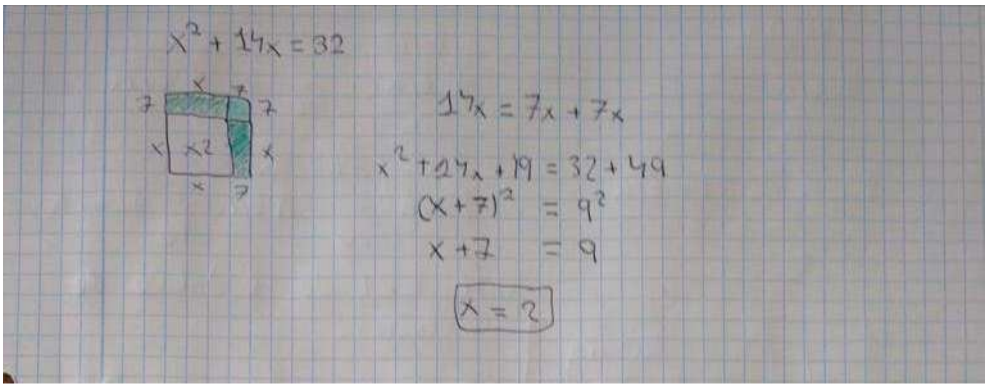


Figura 11

Con esta idea algunos alumnos suelen ver inmediatamente que necesitarían un cuadrado de 7 m de lado para conseguir un cuadrado mayor.

Con ayuda del papel demuestran al resto de la clase que es necesario añadir un cuadrado de área 49 m² para conseguir un cuadrado de lado $x + 7$. Y la pregunta que se le hace a continuación es, ¿cómo afecta esto a la ecuación inicial?

Como los alumnos resuelven las ecuaciones por el método de la balanza, ven claramente que, si suman 49 a un miembro, también deben sumarlo al otro. Además, como ya se ha trabajado previamente las identidades notables, identifican la que se nos queda y proponen resolver la ecuación como aparece en la figura 11.

Es cierto que en esta forma de razonar los alumnos solo obtienen la solución positiva, así que es el momento idóneo para recordar que los babilonios tenían este mismo problema: como trabajaban con áreas y longitudes, sus incógnitas eran solo positivas. Se les explica a los alumnos que si prescindimos del problema asociado a la geometría también tienen sentido las soluciones enteras.

Con el tratamiento del álgebra basado en problemas, balanzas y geometría vemos que se incide en:

— La atención a la diversidad. Los alumnos con más dificultades se enganchan muy rápido a la resolución de ecuaciones ya sea por medio de la balanza, por pintar y recortar figuras geométricas, por construir, etc. Los alumnos con más capacidad matemática solicitan más ecuaciones para resolver y, de hecho, se plantean otras ecuaciones.
— Con este tratamiento del álgebra todos los alumnos han trabajado activamente. Les ha atraído el «juego» de quitar y poner platillos, así como la construcción de cuadrados.
— Se comprende lo que se hace. No hay recetas ni aprendizaje memorístico.

Y los momentos que no olvidaremos son:

— Se han creado corrillos sobre la resolución o estrategias para resolver las ecuaciones.
— Los alumnos piden resolver más ecuaciones así.
— Los alumnos nos dicen que las clases de esta manera, «molan».

Con este trabajo hemos querido romper con la idea de que las matemáticas son simplemente recetas. Las matemáticas se tocan y se construyen para resolver los problemas.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1994), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos.
Gasca, M. (1987), *Cálculo numérico: Resolución de ecuaciones y sistemas*, Ed. Librería Central
Hersh, R., y V. John-Steiner (2012), *Matemáticas: una historia de amor y odio*, Ed. Crítica.
Hormigon, M. (1995), *Paradigmas y Matemáticas: un modelo teórico para la investigación en historia de las matemáticas*, Cuadernos de Historia de la Ciencia, 8. Universidad de Zaragoza.
Meavilla, V. (2013), *¿Cuánto vale la X?,* Ed. Almuzara.
Orts, A. (2007), «Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un método histórico», *Suma*, 56, 55-61.
Santcliment, F. (1998), *Summa de l'art d'Aritmètica*, Eumo Editorial.
Sessa, C. (2007), *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas,* Libros de Zorzal.
Sigler, L. E. (2003), *Fibonacci's Liber Abaci: A Traslation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer.
Vallejo, J. M. (1840), *Matemáticas puras y mistas. Tomo I*, Imprenta Garrasayaza.
VV. AA. (2008), *El rostro humano de las matemáticas*, Ed. Nivola.
Balanza digital de Rafael Losada en Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/dw99fHKB#material/nfED2UTg>.

1 Cita obtenida de (Hersh y John-Steiner, 2012).

2 Hay que tener en cuenta que este trabajo se presentó en marzo de 2021. Se refiere al curso 19-20 y 20-21.

3 Explica el método simple en las páginas 115r-117v y el compuesto en las páginas 119r-123r.

4 En clase se puede (se debe) pedir al alumnado que propongan ellos posibles soluciones iniciales para realizar los cálculos y utilizar estás cuestiones para plantear el sentido o sinsentido de determinadas soluciones en los problemas. Seguro que no nos extrañará que un alumno o alumna proponga un paso de 1 cm. Por otro lado, aunque elija cada persona una solución inicial distinta, comprobaremos que obtenemos siempre la misma solución final. Es decir, aunque les sorprenda, ¡los problemas no se resuelven sólo de una forma!