Estrategias de resolución en un problema sobre probabilidad condicional en la XXIX Olimpiada aragonesa

por

J. M. Rubio-Chueca, José M.ª, Muñoz-Escolano, Pablo Beltrán-Pellicer

(Universidad de Zaragoza)

En el currículo estatal y autonómico aragonés la probabilidad condicional aparece explícitamente en 4.º de ESO. Queda fuera de toda duda que se trata de una de las nociones básicas de probabilidad que todo estudiante de secundaria debería comprender, bien por su importancia e interés en la estocástica, como por los potentes razonamientos informales que se sustentan alrededor de ella (Borovcnick, 2012). Sin embargo, junto con la idea de independencia de sucesos, los problemas asociados a la probabilidad condicional constituyen una fuente habitual para la expresión de sesgos de razonamiento y de dificultades para el alumnado (Batanero, 2014). Por otro lado, como varios elementos sobre los que se construye la idea de probabilidad condicional aparecen desde el comienzo de la secundaria (por ejemplo, tablas o diagramas de árbol), una pregunta que nos podemos plantear es si el alumnado es capaz de desarrollar estrategias intuitivas en situaciones donde aparecen sucesos condicionados. Si esto fuera así, estas estrategias podrían servir de base para el diseño de secuencias didácticas (Martínez-Juste y otros, 2015).

Teniendo esto en consideración, resulta particularmente interesante analizar el siguiente problema, propuesto en la final de la XXIX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón:

olimpiada Matemática aragonesa XXIX

Fase Final

22 de mayo de 2021

Problema 3 *Película al azar*

Pilar quiere ver una película en una plataforma de streaming de TV con sus dos amigos Jorge y Julia, pero no saben cuál elegir. A Pilar se le ocurre lo siguiente:

—Vamos a utilizar el azar para la elección de la película. Para ello introduciremos unas bolas en dos bolsas de la siguiente manera. En la bolsa A introduciremos 3 bolas blancas y 4 negras, mientras que en la bolsa B introduciremos 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Una vez introducidas las bolas, Jorge cogerá una bola de la bolsa A y la introducirá en la bolsa B. Finalmente, Julia extraerá una bola de la bolsa B y si la bola es blanca veremos la película "Hero-n" y si es negra veremos la película "Escuela de Rubik"—

Sin embargo, Pilar tiene una duda: con esta forma de elegir la película que van a ver, ¿las dos películas tienen la misma probabilidad de ser elegidas o hay alguna de ellas que tiene más probabilidad?

Número

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Respuesta razonada

Contexto y participantes

Este año, debido a la situación sanitaria extraordinaria vivida por la pandemia, en la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO participaron finalmente cuarenta y siete alumnos y alumnas de distintas localidades de Aragón (Sierra, 2021). Esta fase final de la olimpiada autonómica se llevó a cabo el sábado 22 de mayo de 2021 en el aula magna de la Facultad de Ciencias. En ella, se propusieron seis problemas durante dos sesiones, de una hora cada una, con contenidos relacionados con el currículo utilizando los estudiantes para resolverlos diferentes procedimientos interesantes de analizar.

Tipos de estrategias en las respuestas correctas de los participantes

De forma verbal e intuitiva

La resolución a dicho problema se puede llevar a cabo con un razonamiento verbal, desde un significado intuitivo de la probabilidad. Para ello, suponiendo que las bolas son indistinguibles, se ha de observar lo que ocurre en los casos:

— Caso 1: sacar bola blanca en la bolsa A e introducirla en la B.
— Caso 2: sacar bola negra en la bolsa A e introducirla en la B.

En el primer caso, la probabilidad de sacar bola blanca en la extracción de la bolsa A es menor que la de sacar bola negra, puesto que hay menos bolas blancas. Entonces, al pasar una bola blanca a la bolsa B nos encontramos con que habrá 4 bolas blancas y 2 negras. Por lo tanto, la probabilidad de sacar bola blanca en la urna B es mayor puesto que habrá más bolas blancas.

En el segundo caso, la probabilidad de sacar bola negra en la bolsa A es mayor que la de sacar bola blanca. Al pasar una bola negra a la bolsa B tendremos el mismo número de bolas blancas que de negras, por lo que la probabilidad de sacar bola blanca en la bolsa B es la misma que sacar bola negra en la B.

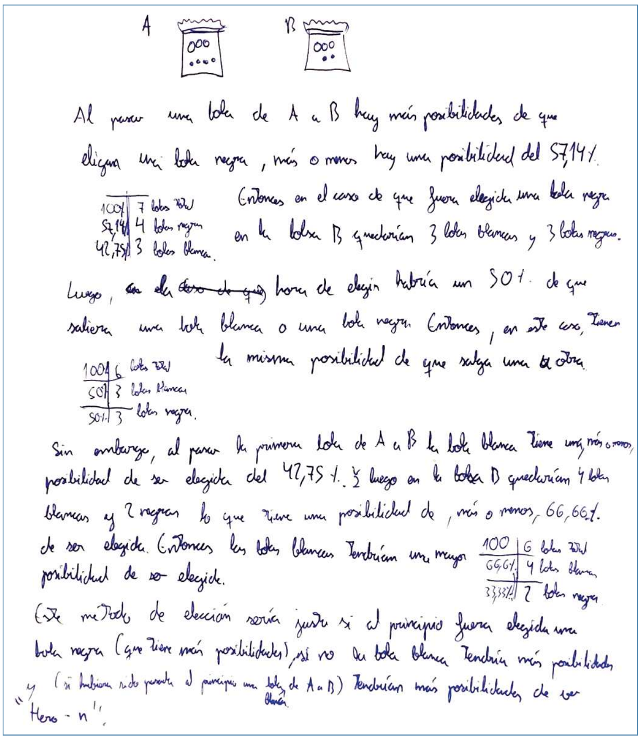
Como en uno de los casos es más probable terminar sacando una bola blanca de la bolsa B y en el otro es igual de probable sacar bola blanca que sacar bola negra, se deduce que en términos globales es más probable sacar bola blanca.

En el análisis de las resoluciones del alumnado se contabilizan diez participantes que utilizaron un razonamiento verbal de tipo similar. Cuatro de ellos dieron una solución correcta al problema sin hallar ningún tipo de probabilidad, como la estrategia seguida por el estudiante que se muestra en la figura 1. Para argumentar el resultado no le ha sido necesario calcular ninguna probabilidad. Simplemente ha tenido en cuenta el número de bolas que aparece en la bolsa B una vez introducida la bola que se haya obtenido de la bolsa A. Para dicho participante, el hecho de ser más probable obtener una determinada bola depende del número de bolas que haya de cada color (a mayor número de bolas más probabilidad de obtener esa bola).

Tiene más probabilidad de salir la blanca ya que en el hipotético caso de que
al sacar una bola ~~negra~~ de la Bolsa A fuera negra sí que habría la misma
probabilidad de sacar una blanca que una negra en la B. ~~sin embargo~~
también puede
Pero ~~al~~ sacar una bola, de la A y meterla en la B por tanto en la B habría
blanca
4 bolas blancas y 2 negras es decir que habría más proplabilidad de que
se sacase una blanca. Eso significa que hay más probabilidad de que vean
la pelicula "Hero-n" que que vean "Escuela de Rubik"

Figura 1. Resolución correcta usando un razonamiento verbal cualitativo

Y seis de ellos, aunque no se pedía explícitamente el cálculo de probabilidades, calcularon algunas como el que se muestra en la figura 2 para dar soporte a su razonamiento. El estudiante se apoya en el conocimiento de la probabilidad simple observando los resultados en cada una de las situaciones que nos podemos encontrar: pasar una bola negra de la bolsa A a la bolsa B o pasar una bola blanca de la bolsa A a la bolsa B calculando las probabilidades de obtener bola blanca en la bolsa B en cada caso (probabilidades condicionales).


A B

Al pasar una bola de A a B hay más posibilidades de que eligan una bola negra, más o menos hay una posibilidad del 57,14%.

100% | 7 bolas total
57,14% | 4 bolas negras
42,75% | 3 bolas blanca.

Entonces en el caso de que fuera elegida una bola negra en la bolsa B quedarían 3 bolas blancas y 3 bolas negras.

Luego, a la ~~hora de que~~ hora de elegir habría un 50% de que saliera una bola blanca o una bola negra. Entonces, en este caso, tienen la misma posibilidad de que salga una u otra.

100% | 6 bolas total
50% | 3 bolas blancas
50% | 3 bolas negra.

Sin embargo, al pasar la primera bola de A a B la bola blanca tiene una, más o menos, posibilidad de ser elegida del 42,75%. Y luego en la bolsa B quedarían 4 bolas blancas y 2 negras lo que tiene una posibilidad de, más o menos, 66,66% de ser elegida. Entonces las bolas blancas tendrían una mayor posibilidad de ser elegida.

100 | 6 bolas total
66,6% | 4 bolas blancas
33,33% | 2 bolas negras

Este método de elección sería justo si al principio fuera elegida una bola negra (que tiene más posibilidades), así no la bola blanca tendría más posibilidades y (si hubiera sido pasada al principio una bola blanca de A a B) tendrían más posibilidades de ser "llevada".

Figura 2: Resolución correcta usando un razonamiento verbal cuantitativo (probabilidades condicionales)

Resulta curioso que, de los diez estudiantes que emplean este enfoque intuitivo, la mayoría (seis) se vea en la necesidad de ofrecer algún dato cuantitativo y calcular las probabilidades de algunas de las extracciones previas o finales, a pesar de que no era necesario realizar ninguno de esos cálculos para resolver correctamente el problema, como hemos visto en las producciones que seguían una estrategia cualitativa. Quizás el motivo de este fenómeno pueda situarse en la asunción implícita por parte de los estudiantes de ciertas cláusulas del contrato didáctico escolar habitual (y que también puede estar vigente en las olimpiadas) como que, para resolver cualquier tarea de matemáticas, sea obligatorio operar con números del enunciado para dar un resultado numérico al problema.

Desde el significado clásico

Otra forma de resolver el problema sería desde el significado clásico de la probabilidad, calculando la suma de las probabilidades de las intersecciones, obtenidas a su vez empleando las probabilidades condicionadas. Es decir, la probabilidad de terminar sacando una bola blanca de la bolsa B es igual a la suma de las probabilidades de obtener bola blanca en cada uno de los dos casos posibles. Para simplificar la notación, designaremos por bA al suceso «sacar blanca en la bolsa A», nA al suceso «sacar negra en la bolsa A», bB al suceso «sacar blanca en la bolsa B» y nB al suceso «sacar negra en la bolsa B». Simbólicamente:

$$p(bB) = p(bA \Rightarrow bB) + p(nA \Rightarrow bB) = p(bA)\cdot p(bB / bA) + p(nA)\cdot p(bB / nA) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

$$p(nB) = 1 \Rightarrow p(bB) = 1 \Rightarrow \frac{4}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

Comparando ambas probabilidades se confirma que sacar bola blanca es más probable, por lo que *Hero-n* tiene una probabilidad mayor de ser la película elegida.

Ocho de los participantes aportaron una resolución correcta usando el cálculo de las probabilidades condicionadas e intersecciones de esta manera, como se puede ver en la figura 3, para finalmente sumar las probabilidades. En este caso, se observa que el participante se apoya en un diagrama de árbol y halla todas las probabilidades de forma correcta para dar su resultado.

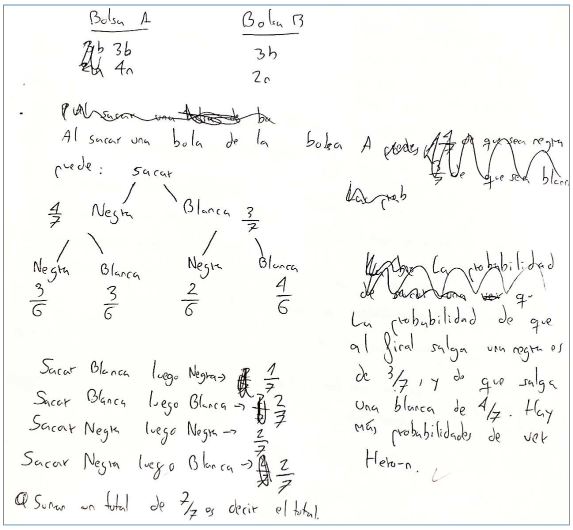


Figura 3. Resolución correcta usando cálculo de probabilidades condicionadas e intersecciones

Mediante técnicas combinatorias

Dos de los participantes utilizaron técnicas combinatorias para elaborar todas las posibilidades que encontramos en el espacio muestral del experimento. Este tipo de resolución se fundamenta en considerar como espacio muestral el conjunto de posibles resultados: $E = \{NN, NB, BN, BB\}$ y contabilizar el número de casos para cada uno de ellos. Este proceso de conteo no es trivial, ya que exige distinguir los dos posibles escenarios, dependiendo de si la bola que pasa de una bolsa a otra es blanca o negra.

De esta manera, hay 12 combinaciones de tipo *NN* (sacar bola negra en la bolsa *A* y bola negra en la bolsa *B*), que surgen de combinar las 4 bolas negras de la bolsa *A* con las 3 bolas negras que habría en la bolsa *B* al pasar una de esas bolas negras. Análogamente se obtienen 12 combinaciones de tipo *NB*, 6 de tipo *BN* y 12 de tipo *BB*. En total hay 42 casos posibles, acabando en 24 de ellos (la suma de *NB* y *BB*) con la extracción de una bola blanca en la bolsa *B*. Considerando que todos estos casos son equiprobables, se obtiene que acabamos con bola blanca con una probabilidad de 24/42.

Los dos participantes que emplearon una técnica de este estilo se apoyaron en algún tipo de representación (diagramática y tabular) para hallar sus resultados. En la figura 4 podemos ver cómo el alumno utiliza un diagrama de árbol para hallar el recuento de todas las posibilidades que nos podemos encontrar averiguando el espacio muestral del experimento aleatorio: «extraer una bola de *B* una vez que hemos pasado una bola de la bolsa *A*». De forma similar, en la figura 5 se observa cómo el participante usa una tabla con el mismo fin.

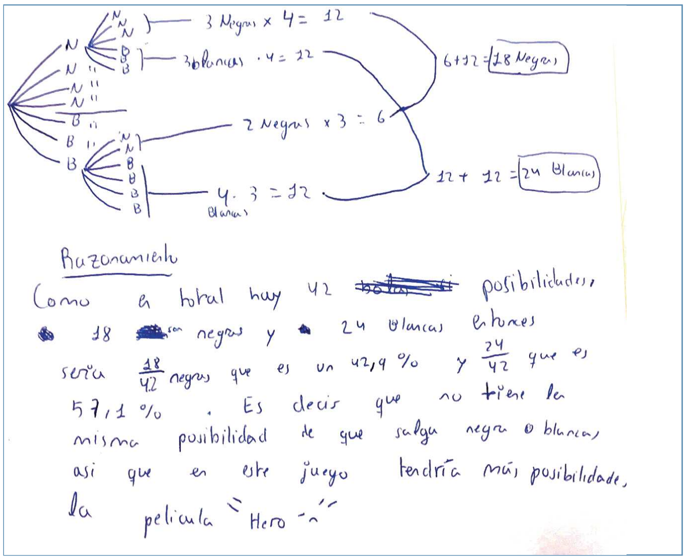


Figura 4. Resolución correcta usando técnicas combinatorias (diagrama de árbol)

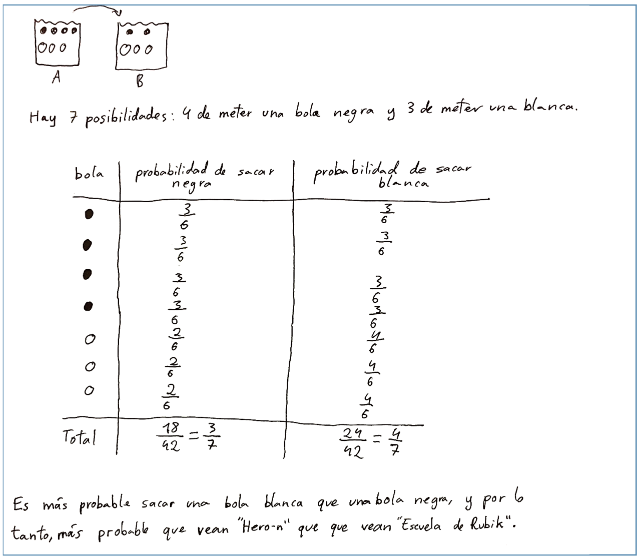
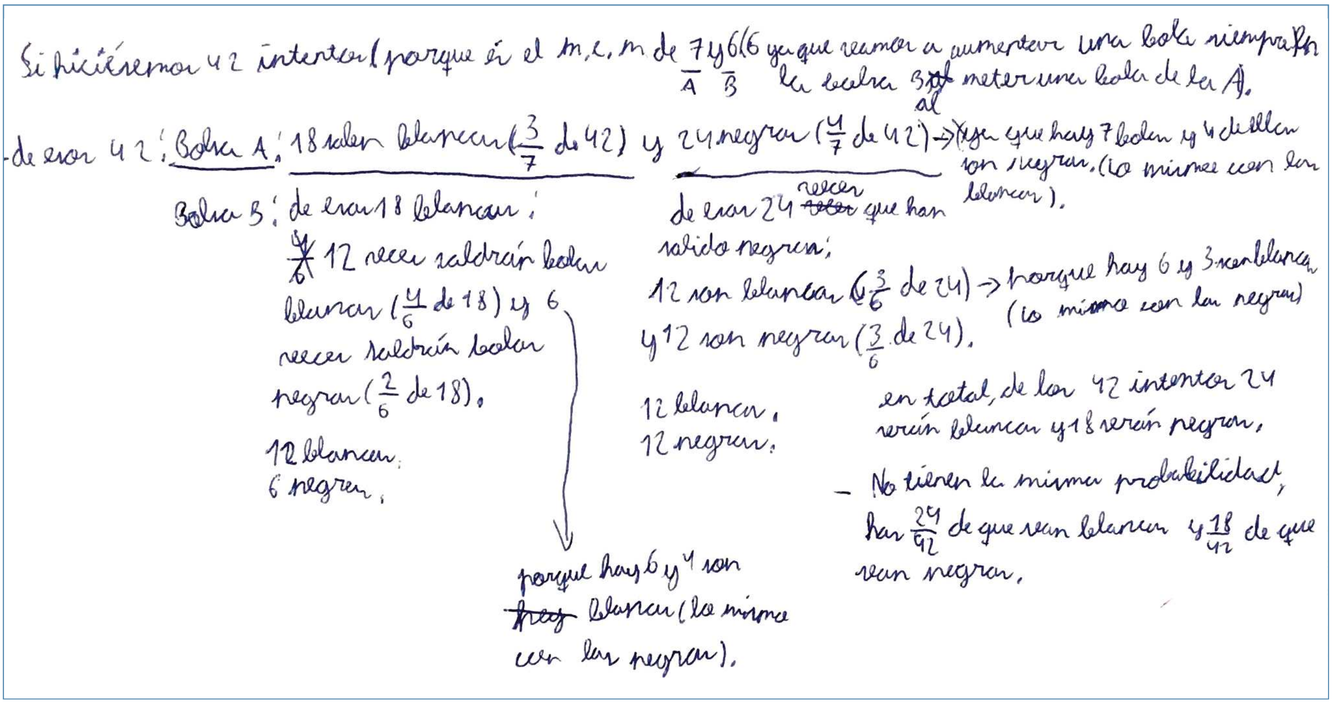


Figura 5. Resolución correcta usando técnicas combinatorias (tabla)

Una especie de ábaco probabilístico

Uno de los participantes utilizó una estrategia muy interesante, que recuerda a un ábaco probabilístico (Engel, 1975, 1976), a pesar de no incluir una representación gráfica, como vemos en la figura 6. Podemos imaginar este ábaco en forma de árbol, como el de la figura 3, solo que, en lugar de emplear sus ramas para representar probabilidades, lo que hacemos es introducir por su entrada un número de cuentas o fichas e irlas distribuyendo por las ramas. La elección del número inicial de fichas no es trivial, ya que debe permitir la distribución de cantidades enteras de fichas por todas las ramas del árbol (ábaco).

En la figura 6 vemos cómo el participante calcula el mínimo común múltiplo del número de bolas en la primera bolsa y la segunda obteniendo 42. Para llegar a este 42 es imprescindible considerar esa bola que pasamos de la bolsa *A* a la *B*. Es decir, el 42 se obtiene multiplicando las 7 bolas que hay en la bolsa *A* y las 6 que hay en la *B* cuando hemos pasado ya una de las bolas de la bolsa *A*. Una vez ha obtenido ese número, el participante analiza lo que «se esperaría» si se repitiera el experimento 42 veces, lo cual es equivalente a ver la distribución esperada de 42 fichas que circulasen por una especie de máquina de Galton con las probabilidades adecuadas en las intersecciones. De esta forma, en la primera etapa, deduce que salen 3/7 de 42 = 18 bolas blancas y 4/7 de 42 = 24 bolas negras de la primera bolsa. En la segunda etapa, de esas 18 bolas blancas, 4/6 de ellas (es decir, 12) darán lugar a una extracción de bola blanca en la bolsa *B*, mientras que 2/6 de las 18 (es decir, 6) darán lugar a una bola negra. Por otro lado, de las 24 bolas negras, 3/6 de 24 =12 darán lugar a una bola blanca y otras 12 a una bola negra. En definitiva, se concluye que de los 42 intentos, 24 dan lugar a bola blanca frente a 18 que dan lugar a bola negra, por lo que es más probable terminar extrayendo bola blanca de la urna *B*.


Si hiciéramos 42 intentos (porque es el m.c.m de 7 y 6 (6 ya que vamos a aumentar una bola siempre a la bolsa B al meter una bola de la A).

de esos 42: Bolsa A: 18 salen blancas ($\frac{3}{7}$ de 42) y 24 negras ($\frac{4}{7}$ de 42) → ya que hay 7 bolas y 4 de ellas son negras. (lo mismo con las blancas).

Bolsa B: de esas 18 blancas: 12 veces saldrán bolas blancas ($\frac{4}{6}$ de 18) y 6 veces saldrán bolas negras ($\frac{2}{6}$ de 18).

12 blancas. 6 negras.

porque hay 6 y 4 son blancas (lo mismo con las negras).

de esas 24 veces que han salido negras: 12 son blancas ($\frac{3}{6}$ de 24) → porque hay 6 y 3 son blancas (lo mismo con las negras) y 12 son negras ($\frac{3}{6}$ de 24).

12 blancas. 12 negras.

en total, de los 42 intentos 24 serán blancas y 18 serán negras.

– No tienen la misma probabilidad, hay $\frac{24}{42}$ de que sean blancas y $\frac{18}{42}$ de que sean negras.

Figura 6. Resolución correcta usando ábaco probabilístico

Conclusiones

En la tabla 1 resumimos los resultados del análisis realizado. Teniendo en cuenta que la probabilidad condicional no aparece de forma explícita en los cursos de 1.º y 2.º de ESO en el currículo, sorprende ver el uso del diagrama de árbol para representar intersecciones y probabilidades condicionadas. Se trata de las resoluciones menos argumentadas por parte de los participantes y podría ser indicativo de haber recibido instrucción específica en este sentido, ya que se trata de una técnica estándar.

Estrategia utilizada	*Número de participantes*
Razonamiento verbal cualitativo	4
Razonamiento verbal cuantitativo. Cálculo de probabilidades condicionadas e intersecciones	68
Técnicas combinatorias	2
Enfoque frecuencial similar al ábaco probabilístico	1
Otras estrategias (incorrectas)	25
Soluciones en blanco	1

Tabla 1. Número de participantes que emplearon cada una de las estrategias ($N = 47$)

Tras el análisis de las resoluciones, es importante destacar que los resultados obtenidos muestran razonamientos informales de los estudiantes muy interesantes que pueden ser incorporados de manera previa al estudio formal de la probabilidad condicional.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2014), «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Dordrecht.

Borovcnick, M. (2012), «Multiple perspectives on the concept of conditional probability», *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5–27.

Engel, A. (1975), «The probabilistic abacus», *Ed. Stud. Math.*, 6(1), 1–22.

— (1976), «Why does the probabilistic abacus work?» *Ed. Stud. Math.*, 7(1– 2), 59–69.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén, (2015), «Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 351-359.

Sierra, D. (2021), «Crónica», *Entorno Abierto*, 40, 1–2.