¿Es ¼ mayor o menor que ½? Dudas en el Siglo de Oro español

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Contar resulta, en cierto modo, consustancial al ser humano. El acto de contar lleva, a través de un proceso de abstracción, a la idea de los números naturales. En un contexto discreto, de colecciones de objetos, las operaciones básicas (cuando están permitidas), la relación de orden asociada a la cardinalidad, etc., tienen un sentido intuitivo muy claro.

Cuando se intentan utilizar los números naturales en el ámbito de la medida, que implica realizar y cuantificar comparaciones, surgen de forma también relativamente natural las fracciones. Históricamente, esto sucedió en un contexto geométrico y musical. Sin embargo, la mayor complejidad conceptual de este nuevo objeto matemático (que ahora llamamos números racionales) hace que se pierda en parte el sentido intuitivo sobre las operaciones, su orden, etc. Un ejemplo típico y clásico es el hecho de que, mientras en el ámbito de los números naturales el resultado de una multiplicación es siempre mayor que ambos factores, esto ya no sucede en el ámbito de los números racionales.

Hoy en día muchos alumnos siguen enfrentándose y superando, con mayor o menor dificultad, estos obstáculos. Como docentes no deben sorprendernos estas dificultades, puesto que en cierto modo reproducen las dificultades colectivas que se vivieron a lo largo del proceso que llevó a la creación y establecimiento definitivo del constructo de número racional.

La lectura de textos antiguos nos permite en ocasiones apreciar que, dificultades y «errores» que se encuentran en las aulas actuales, no hacen sino reproducir las mismas dificultades que encontraron sus autores o los mismos «errores» que estos cometieron. Desde nuestra posición experta es interesante comprender que, en cierto modo es «natural» que surjan estos obstáculos.

Resulta relativamente habitual encontrar dificultades asociadas a la relación de orden definida en los racionales. De ahí la pregunta que se hace en el título de este texto:

¿Es ¼ mayor o menor que ½?

Su respuesta resultará obvia para todos los lectores de este boletín. Quizás incluso crean que es imposible la duda. Sin embargo, parece ser que no es tan «evidente» a juzgar por el contenido de algunos conocidos textos de aritmética publicados en España durante el Siglo de Oro. De hecho, esta duda está íntimamente relacionada con la propiedad de la multiplicación que hemos mencionado anteriormente y, en concreto, con la necesidad de compatibilizar la relación de orden con las operaciones.

Gaspar de Texeda, en su *Suma de Arithmetica práctica y de todas Mercaderías con la Horden de Contadores* (publicada en Valladolid en 1546) realiza la siguiente afirmación:

> ½ veces ½ hace ¼, digo que ¼ es menor en cantidad denominativa que ½ pero es mayor en virtud y sustancia.

Texeda parece tener claro que la cantidad ¼ es menor que la cantidad ½, puesto que para él las fracciones suponen dividir un entero en partes y lógicamente las partes que salen al dividir en cuatro son más pequeñas que las que salen al dividir en dos. ¿A qué se refiere entonces Texeda con «virtud y sustancia»? Seguimos leyendo.

> Que sea mayor se prueba en el génesis donde dice crescite et multiplicamini [creced y multiplicaos] […] por lo cual parece el multiplicar crecer y aumentar. Quien dijere ¿qué es mayor un casar o un diamante? Dirás que el casar es mayor pero preguntado cuál es de más valor y estima y virtud dirás que el diamante, pues así es ¼ en virtud y en sustancia mayor que medio, aunque ½ es mayor en cantidad.

Resulta ciertamente sorprendente recurrir a la Biblia para justificar una afirmación matemática, pero hay que entenderlo como un recurso retórico y un intento de proporcionar al lector–estudiante un argumento que le permita encajar dos hechos contradictorios: que multiplicar siempre aumenta y que el resultado es más pequeño en cantidad.

No obstante, el propio autor parece que no está del todo satisfecho y recurre a otro tipo de argumentos. Conforme los va desgranando se percibe casi una lucha interna y se pueden apreciar distintas ideas y concepciones asociadas a la naturaleza de los distintos tipos de objetos involucrados. Por ejemplo, leemos lo siguiente:

> Pongo el cuadrado *ab* por cada lado 8, tomo ½ y es 4 y así el menor cuadrado por cada lado tiene 4. Multiplica un lado de los menos con otro, es a saber 4 veces 4, es 16 por el menor cuadrado, digo que 16 es ¼ de todo el cuadrado.

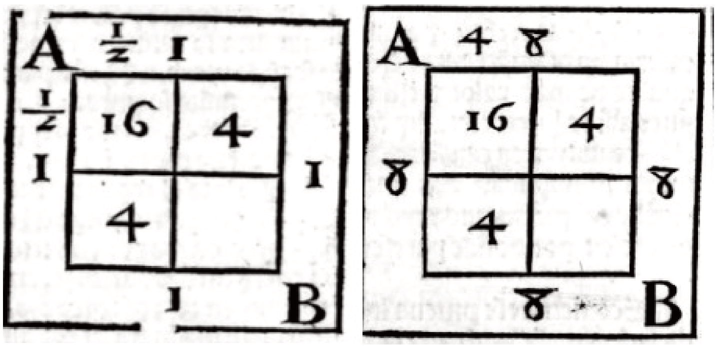


Figura 1

En este fragmento, que va acompañado de varias figuras (ver figura 1), se aprecian dificultades a la hora de distinguir entre la fracción como cantidad de magnitud o como cantidad relativa. Texeda parece concluir (aunque no está del todo explicitado) que 16 (¼ del cuadrado) es mayor que 4 (½ del lado).

Pero, a continuación, se recurre a otro argumento:

> Pruebo como ½ sea mayor en extensión que ¼ por la definición de multiplicar, que dice que multiplicar no es otra cosa salvo hallar un número tercero en el cual tantas veces el uno de los multiplicantes se halle como unidades hay en el otro […] en el ¼ el ½ cabe tantas veces como unidades hay en el otro ½ […] así pues si el ¼ es igual al ½ de ½, menos es que ½ y parece ser mayor el ½.

Resulta muy interesante aquí que Texeda no recurra a la definición de multiplicación como suma reiterada, que es justamente la que lleva a la idea de que multiplicar aumenta, sino a una alternativa que sí parece servirle.

En todo caso, y por si las dudas fueran pocas, encontramos la siguiente argumentación adicional:

> Otros suelen probar ¼ ser mayor que ½ diciendo que todo número cuanto más se aparta de su principio o nacimiento, que es la unidad, tanto es mayor. Así, 3 es más que 2 porque el 3 más se aparta de la unidad que 2. Así por el contrario ¼ se aparta más de la unidad que ½ y por esta razón parece verdadero que ¼ es mayor que ½.

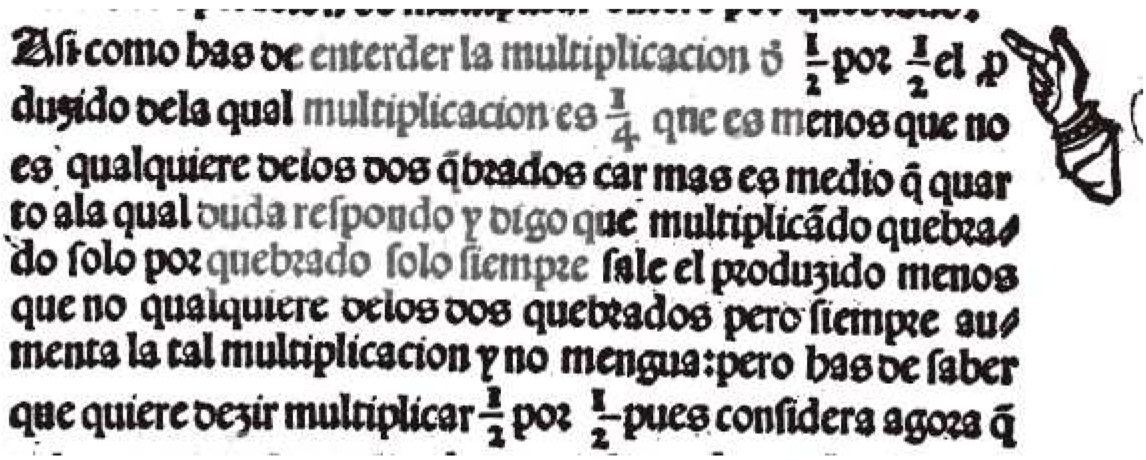
Este fragmento también resulta interesante porque saca a la superficie de forma explícita la necesidad de definir la relación de orden con la que estamos trabajando. De hecho, si llamamos ≤ a la relación de orden «usual» en los racionales, el fragmento define una nueva relación R del siguiente modo:

$$aRb \Leftrightarrow |a-1| \leq |b-1|.$$

El lector puede dedicar un rato a investigar sus propiedades.

El texto de Texeda es relevante por la gran variedad de argumentos, en sentidos contrarios, que se presentan en un espacio muy corto (apenas 3 páginas). No obstante, este tipo de argumentos «contradictorios» no es poco común en esa época. De este modo, en el S*umario breve de la practica de la Aritmethica*, publicado en Zaragoza en 1515, y escrito por el sacerdote zaragozano Juan Andres, leemos (figura 2):

> Digo que multiplicando quebrado solo por quebrado solo siempre sale el producido menos que no cualquiera de los dos quebrados, pero siempre aumenta la tal multiplicación y no mengua.



Aſsi como has de enterder la multiplicacion de $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ el p
duzido dela qual multiplicacion es $\frac{1}{4}$ que es menos que no
es qualquiere delos dos q̄brados car mas es medio q̄ quar
to ala qual duda reſpondo y digo que multiplicādo quebra-
do ſolo por quebrado ſolo ſiempre ſale el produzido menos
que no qualquiere delos dos quebrados pero ſiempre au-
menta la tal multiplicacion y no mengua: pero has de ſaber
que quiere dezir multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ pues conſidera agora q̄

Figura 2

Esta sorprendente afirmación requería una aclaración, y el mosén la proporciona en un contexto comercial:

> Pues considera agora que tú has comprado medio codo de Holanda a razón de medio florín el codo y quieres saber qué monta el medio codo a razón de medio florín el codo valiendo el medio florín 8 dineros […] Pues multiplica agora medio codo por el precio de medio florín y hecha la práctica sale y produce ¼ que es un cuarto de florín que vale 4 dineros […] donde parece que multiplicando medio codo por medio florín sale un cuarto de florín y así digo que la operación aumentó y no menguó.

Con todo lo insatisfactorio que puede resultar este confuso fragmento, pone de manifiesto de nuevo las dudas del autor, la necesidad de compaginar concepciones contradictorias sobre las operaciones y la naturaleza de los objetos implicados, las dificultades a la hora de distinguir entre cantidades absolutas y relativas y de manejarlas simultáneamente en un problema, etc.

En casi cualquier aritmética práctica del siglo XVI podemos encontrar fragmentos similares a estos, por lo que las dificultades parece que eran generalizadas. Resulta de gran interés observar la gran variedad de argumentos: basados en la geometría, en la definición de las operaciones o de la relación de orden, en contextos comerciales, incluso teológicos.

Como docentes, conocer y entender el origen de toda esta variedad de dificultades, obstáculos, contradicciones, etc., presentes en la historia resulta indispensable para poder comprender el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos puesto que, en muchos casos, sus dudas reproducen las surgidas siglos atrás.

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Noviembre de 2021
ISSN: 2386-8821e