Actividades para la enseñanza del sistema de numeración de base dos (binario)

por

Óscar Carrión Lostal

(IES Valdespartera)

Aunque en el currículo de la asignatura de Matemáticas, tanto en primero como en segundo de ESO no aparecen explícitamente como contenido los sistemas de numeración, es del todo conocido por nuestra experiencia docente, que a nuestros alumnos les explicamos las diferencias entre un sistema de numeración posicional de otro no posicional, y se ven ejemplos de representación de números en distintas bases, en especial en base decimal y base binaria, aunque esta última se ve con más detalle en otras áreas como Tecnología, Informática o Electrónica.

Los objetivos que nos proponemos es que nuestros alumnos:

— Aprendan otro sistema de representación de números, en concreto, el de base dos, relacionándolo con el que ellos conocen, que es el sistema decimal o de base 10 y su importancia en campos como la tecnología, informática y la electrónica.
— Pasen de un sistema de representación a otro, en especial, aprendan a pasar de binario a decimal y de decimal a binario.
— Sepan ordenar los números tanto en decimal como en binario a través de una tabla y argumenten diferentes métodos para rellenar dichas tablas.
— A partir de las tablas anteriores, sean capaces de construir códigos, por ejemplo, que al pasar de un número a otro en representación binaria, tan solo varíe un bit (dicho código es muy usado en electrónica).
— Aprendan a sumar números en representación binaria.

Contexto

Para lograr alcanzar los objetivos propuestos anteriormente se les planteó a nuestros alumnos de tres grupos de 2.º de ESO, una serie de actividades que debían realizar en pequeño grupo (de 4 o 5 alumnos), durante tres sesiones de clase.

Anteriormente en clase se les había explicado todos los contenidos relacionados con las actividades que tenían que desarrollar en grupo, por lo que el trabajo realizado a lo largo de las tres sesiones era un repaso de lo visto con anterioridad.

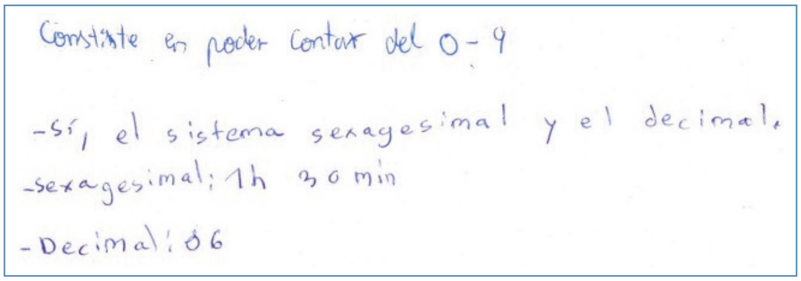
Resultados

A continuación, vamos a ir desglosando los resultados obtenidos y deteniéndonos en los ejercicios más novedosos respecto a lo que se hace habitualmente en este tópico en clase:

Ejercicio 1. Explica en qué consiste un sistema de numeración posicional y pon algún ejemplo. ¿Conoces algún tipo de sistema de numeración que no sea posicional?, indica cuál y pon algún ejemplo.

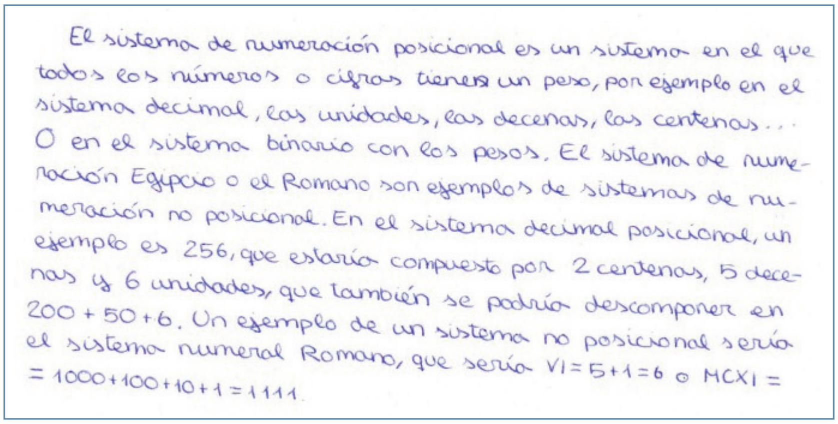
En general este ejercicio les salió bastante flojo, porque en general los alumnos no son capaces de expresar correctamente sus razonamientos de una forma clara y precisa, aspecto que estamos trabajando constantemente en clase, ya que es uno de los objetivos de la asignatura.

Ejemplo de respuesta errónea:


Consiste en poder contar del 0 - 9

-sí, el sistema sexagesimal y el decimal.
-sexagesimal: 1h 30 min
-Decimal: 06

Ejemplo de respuesta válida:


El sistema de numeración posicional es un sistema en el que todos los números o cifras tienen un peso, por ejemplo en el sistema decimal, las unidades, las decenas, los centenas... O en el sistema binario con los pesos. El sistema de numeración Egipcio o el Romano son ejemplos de sistemas de numeración no posicional. En el sistema decimal posicional, un ejemplo es 256, que estaría compuesto por 2 centenas, 5 decenas y 6 unidades, que también se podría descomponer en 200 + 50 + 6. Un ejemplo de un sistema no posicional sería el sistema numeral Romano, que sería VI = 5+1 = 6 o MCXI = = 1000+100+10+1 = 1111.

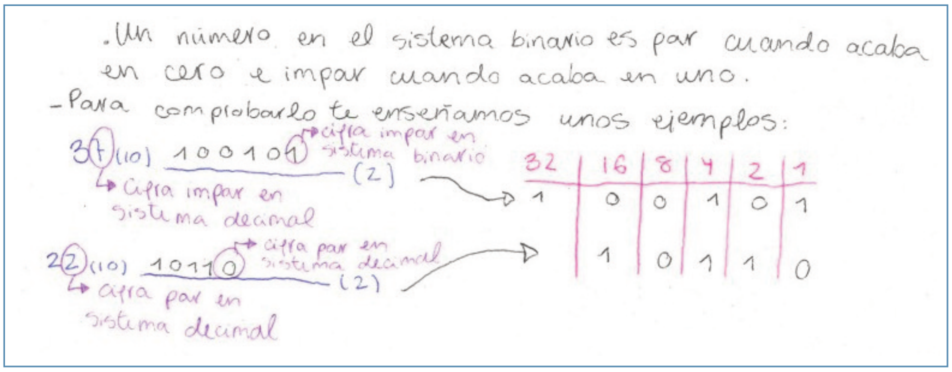
Los ejercicios 2 y 3 les salieron bien a nuestros alumnos ya que consistían en pasar de decimal a binario o viceversa, y es lo típico que se trabaja en clase con ellos. Cabe indicar que en el caso del paso de decimal a binario, lo hacían de las dos maneras indistintamente:

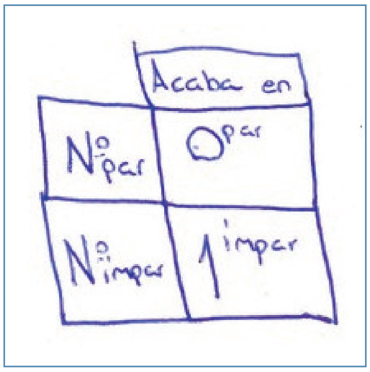
— Usando los pesos (potencias de 2) cuya suma fuera el número deseado.
— Ir dividiendo por la base (en este caso 2) hasta que el último cociente fuera menor que el divisor, formando el número tomando el último cociente y todos los restos de abajo a arriba.

Ejercicio 4. Al igual que en el sistema decimal sabemos que un número es par cuando acaba en {0, 2, 4, 6, 8} e impar cuando acaba en {1, 3, 5, 7, 9}. ¿Cuándo un número es par o impar en el sistema binario?
Ayuda: Fíjate en los ejercicios anteriores para sacar tus conclusiones.

En general todos los grupos realizaron bien dicho ejercicio, pero muchos de los grupos no supieron argumentarlo con los ejemplos de los ejercicios anteriores.

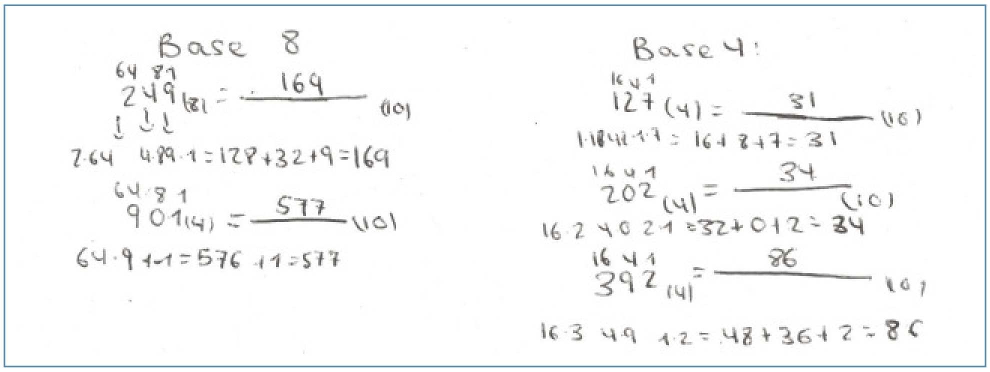
Ejemplos de respuesta argumentada (izquierda) y no argumentada (derecha):





Ejercicio 5. Basándote en lo que has aprendido sobre el paso del sistema de numeración decimal a binario y viceversa, invéntate y resuelve al menos cinco ejemplos, donde los sistemas de numeración no sean el decimal (base 10) y el binario (base 2). (Nota: Recuerda que otros sistemas de numeración que se usan en informática son el octal y el hexadecimal).

Muchos de los grupos se decantaron por pasar de una base cualquiera a la base decimal, y no viceversa. Y muchos de los errores que cometieron fue usar dígitos no permitidos en las bases escogidas, como puede observarse en este caso:



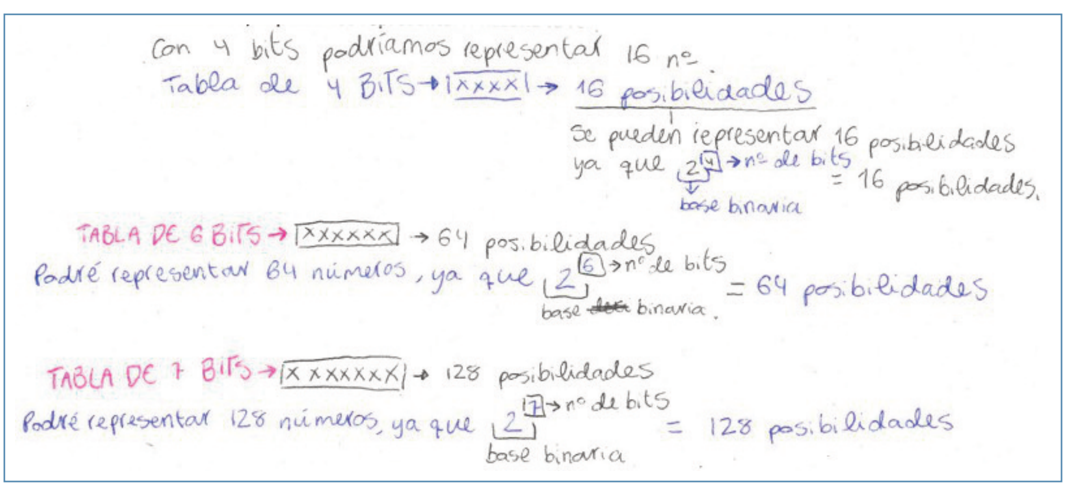
En los ejemplos de la columna izquierda, el primer caso 249(8), usa el dígito 9 que no es válido en la base 8, y en el segundo caso 901(4), el dígito 9 no es válido. En la columna de la derecha, en el primer caso 127(4), se usa el dígito 7 que no es válido en base 4, y en el último 392(4), el dígito 9 no es válido en base 4.

Ejercicio 6. Con cuatro bits, _ _ _ _, ¿cuántos números podríamos representar?
Con seis bits, _ _ _ _ _ _, ¿cuántos números podré representar?, ¿cuál es el último?
¿Y si fueran siete bits? Razona tu respuesta.
¿Podrías obtener una fórmula, que relacione el número de bits (*n*) con la cantidad de números que podemos representar? Razona tu respuesta.

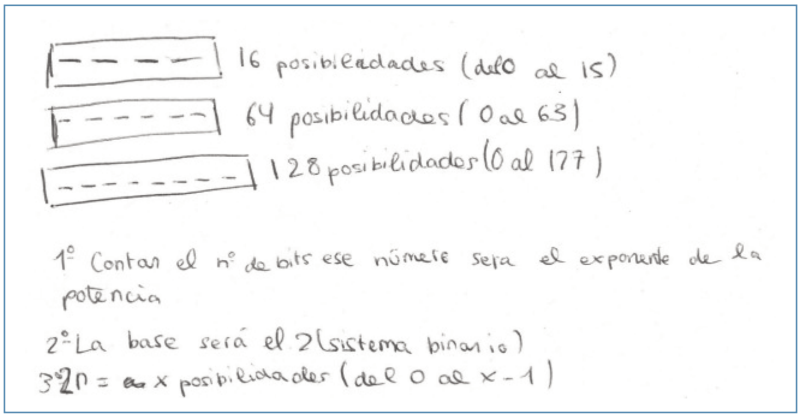
En general los alumnos contestaron bien a este ejercicio, ya que en clase se había hecho hincapié constantemente en las potencias de dos.

Aun así hubo un pequeño porcentaje que contestó mal, y de los que contestaron bien, un pequeño porcentaje no razonó bien la respuesta. Y ninguno de ellos supo expresar de qué número a qué número se podía representar en forma de fórmula.

Respuesta argumentada del número de posibilidades, pero sin indicar de qué número a qué número se pueden representar:



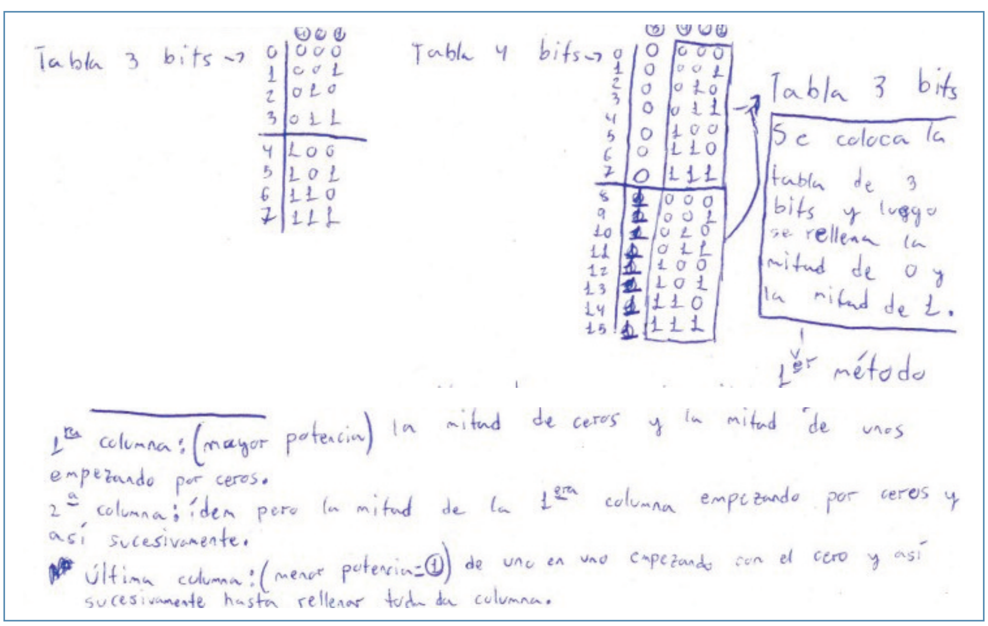
Respuesta correcta indicando el número de posibilidades y de qué número a qué número se pueden representar, sin argumentar, pero indicando el procedimiento a seguir:



Ejercicio 7. Ya sabes realizar tablas donde se relacionan los números en decimal con los números expresados en binario. Si nos fijamos por ejemplo en la tabla de tres bits y la de cuatro bits, ¿hay alguna relación entre ellas? Expresa el método de cómo construir dichas tablas con el lenguaje matemático preciso correspondiente. ¿Hay más de un método? Descríbelos.

Un pequeño porcentaje del alumnado contestó mal a la pregunta, y una de las causas es que lo confundieron con el siguiente ejercicio, el de variar un dígito entre un número y otro en binario, ya que no prestaron atención al enunciado del ejercicio.

Respuesta correcta:



Una forma de ordenar grupos de *bits,* muy importante en electrónica, es aquel que solo cambie un único *bit* de un estado (un número) a otro (otro número). Con anterioridad a que se les propusiese el ejercicio 8 a los alumnos, que trata de este tópico, se les explicó brevemente el método o procedimiento correspondiente aplicado al caso de dos bits.

Deben fijarse en la tabla de dos bits ordenada del 0 al 4:

00	01	10	11

La ordenación natural de los números binarios no cumple las condiciones que exige este criterio, ya que del número (01) al (10) cambian dos dígitos, el dígito de la izquierda vemos que el 0 se convierte en 1, y el dígito de la derecha, vemos que el 1 se convierte en un 0.

¿Se podrían ordenar los cuatro números anteriores, de forma que solo cambie un bit de un número a otro de forma cíclica, es decir, también se tiene que cumplir del último número al primero? La respuesta es que sí, ya que si los ordenamos de la siguiente manera tan solo varía un dígito al pasar de un número a otro:

00	01	11	10

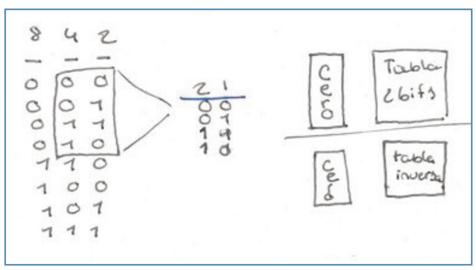
Ya que del primer número al segundo solo cambia el dígito de la derecha, del 0 al 1 (en rojo), del segundo número al tercer número cambia el dígito de la izquierda, del 0 al 1 (en azul), del tercer número al cuarto cambia el dígito de la derecha, del 1 al 0 (en verde), y del último número al primero cambia el dígito de la izquierda, del 1 al 0 (en morado).

Al ser cíclico, hay muchas soluciones. Otra solución por ejemplo sería ordenarlos así: 01−11−10−00, o cualquiera que se nos pudiera ocurrir…

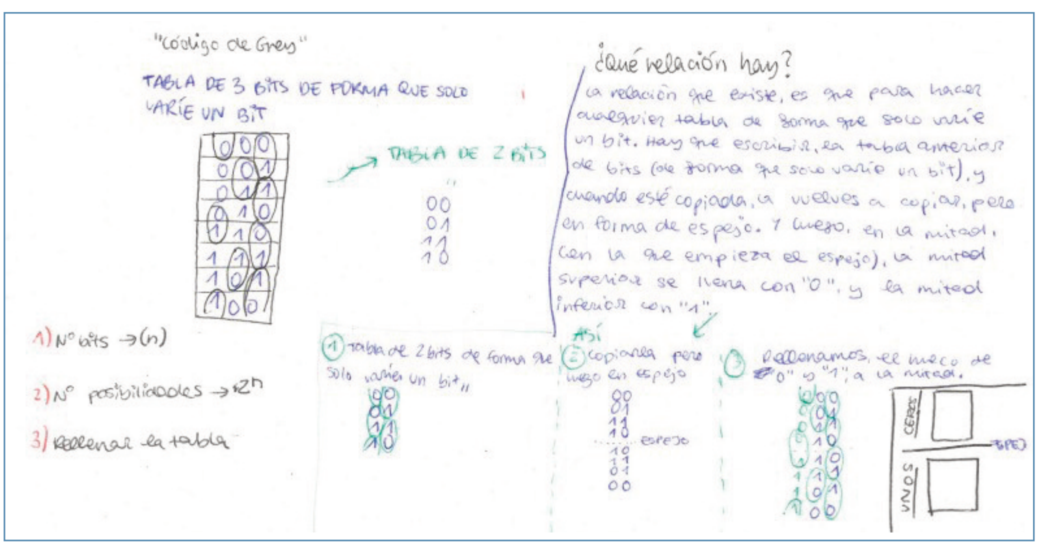
Ejercicio 8. ¿Serías capaz de ordenar según este criterio los números de tres bits? Para ello empieza por el 000. Una vez que tengas la tabla de tres bits ordenada según este criterio, ¿hay alguna relación entre la tabla de dos bits y la que has construido de tres bits? Expresa el método que hay que emplear para construir dichas tablas con el lenguaje matemático preciso correspondiente.

Este ejercicio les costó más tiempo realizarlo, ya que tuvieron que ir probando hasta que obtuvieron la solución. Se debe incidir en que los alumnos no tienen la capacidad interiorizada de ir probando distintas estrategias en la resolución de problemas, en especial la de ensayo y error, hasta alcanzar la solución deseada, ya que tan solo les preocupa que se les dé inmediatamente el método o solución del problema. Por ello, conviene trabajar sobre este aspecto constantemente con ellos en clase.

Respuesta esquemática:

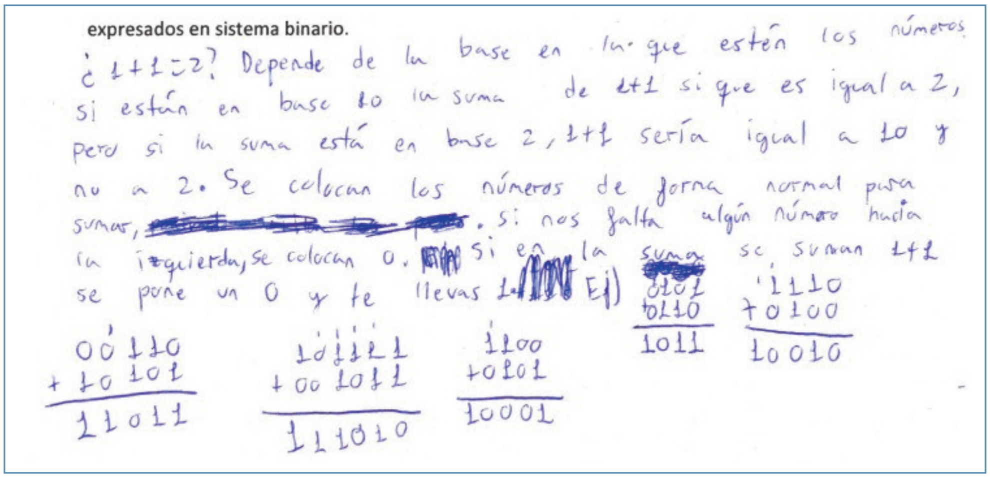


Respuesta argumentada y explicada, además de esquemática:



Ejercicio 9. Por último una última pregunta, ¿1 + 1 = 2? Describe el método para sumar en el sistema binario y pon al menos cinco ejemplos de sumas de números expresados en sistema binario.

Esta pregunta la contestaron correctamente todos los grupos y presentaron distintos ejemplos para poner de manifiesto ese hecho.


expresados en sistema binario.

¿1+1=2? Depende de la base en la que estén los números si están en base 10 la suma de 1+1 si que es igual a 2, pero si la suma está en base 2, 1+1 sería igual a 10 y no a 2. Se colocan los números de forma normal para sumar, . Si nos falta algún número hacia la izquierda, se colocan 0. Si en la suma se suman 1+1 se pone un 0 y te llevas 1. Ej)

0101 + 0110 = 1011

1110 + 0100 = 10010

00110 + 10101 = 11011

101111 + 001011 = 111010

1100 + 0101 = 10001

Ejercicio 10. En el libro de lectura *Ernesto el aprendiz de matemago* de José Muñoz Santonja, en su capítulo 14 titulado «Un descubrimiento increíble», incluye un juego de seis tarjetas, que le permite al mago adivinar el número que ha pensado Ernesto, con tan solo la información de en qué tarjetas aparece dicho número. Describe en qué se basa dicho juego y cómo se construyen las tarjetas y aplícalo para el caso de tres, cuatro, cinco y siete tarjetas.

Tarjeta 1							
1	3	5	7	9	11	12	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Tarjeta 2							
2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
33	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Tarjeta 3							
4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Tarjeta 4							
8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 5							
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 6							
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Previamente a que el alumnado tratase de responder a este ejercicio, en clase se realizó la lectura del capítulo citado y se abordaron las diferentes dudas que tuvieron los alumnos, que en concreto fue la explicación del truco de las tarjetas.

Aun así, los alumnos tuvieron dificultades para expresar en lenguaje matemático y por escrito en qué se basa el truco del juego de las tarjetas y de poner en práctica entre ellos dicho truco. Para ello uno de los alumnos debía asumir el papel de Ernesto y otro el papel del mago. Donde no tuvieron dificultad es en la realización de las tarjetas ya que consistía en el manejo de las tablas de paso de decimal a binario.

Explicación de la realización de las tarjetas:

FORMACIÓN DE TARJETAS JEGO (TABLA DE 7 BITS)

Para hacer el juego de las 7 tarjetas debes hacer una tabla de 7 bits ⇒ 125 posibilidades (del 0 al 127).

Cuando hayas hecho la tabla debes fijarte en las columnas, cada columna corresponde a una tarjeta, para formar la tarjeta número 1 (última columna ⇒ peso $2^0 = 1$) debes fijarte en los unos de esa columna y en los números laterales (base decimal) que coinciden con los unos de esa columna y situar en la tabla esos en que el uno coincide.

Explicación del truco:

Como sabe el mago el número pensado

Alguien piensa en 1 nº y le da al mago las tajetas en las que aparece el nº pensado, el mago tiene que adivinar cual es el nº pensado Lo que tiene que hacer es sumar el primer nº de las tajetas dadas y el resultado es el nº en el que ha pensado.

Ejemplos de aplicación del truco:

- Sara ha pensado en el número 109, y le ha dicho a Lorena, que ese número está en la tarjetas 1, 3, 4, 6, 7, porque si se suman cada primer número de las tarjetas 1, 3, 4, 6, 7 en forma de pontecias de 2, da el número en el que estaba pensando Sara.

$$\underset{1}{2^0} + \underset{4}{2^2} + \underset{8}{2^3} + \underset{32}{2^5} + \underset{64}{2^6}$$

$1 + 4 + 8 + 32 + 64 = 109 \rightarrow$ el número que estaba pensando Sara.

EJEMPLO JUEGO DE CARTAS → 7 TARJETAS

Por ejemplo: nº 107.

El número 107 aparece en las tarjetas: 1, 2, 4, 6 y 7

Sumamos los primeros números de las tarjetas:

$1 + 2 + 8 + 32 + 64 = 107$ ✓

EJEMPLO Adivinar Número 7 tarjetas

El número es el 76. Está en la tarjetas 3, 4 y 7. El número se adivina sumando los primeros números de cada tarjeta en la que esté el número que hemos pensado. En este caso es $4+8+64 = 12+64 = \boxed{76}$

Juego de siete tarjetas:

Juego de 7 Tarjetas

TARJETA 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

TARJETA 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
33	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	75	76	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

TARJETA 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

TARJETA 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

TARJETA 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

TARJETA 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

TARJETA 7

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

Conclusiones

Aunque los ejercicios propuestos en este trabajo en equipo eran de repaso, a los alumnos les cuesta en primer lugar entender lo que les preguntan en cada ejercicio, por otro lado, también presentan dificultades en verbalizar la argumentación de resolución de los mismos entre ellos y aún más, en la expresión escrita. Por lo que hay que trabajar con ellos la lectura de textos científicos, en concreto, matemáticos, para ayudarles a desarrollar la comprensión lectora y también a escribir textos en un lenguaje matemático preciso, ya que no están acostumbrados a argumentar y a indicar todos los pasos en la resolución de ejercicios y problemas en la asignatura.

Por tanto, debemos incidir concretamente en el objetivo número 1 del currículo de primer y segundo curso de las Matemáticas de la ESO, es decir, «utilizar correctamente el lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa» y en el número 9, «desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, con la curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas y con la responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo».

Referencias bibliográficas

Muñoz, J. (2003), *Ernesto el aprendiz de matemago,* Nivola, Madrid.
Talleres de Conexión Matemática impartidos por el autor del presente artículo.