La estrella mudéjar: en 3.º de principio a fin

por

ARANCHA LÓPEZ LACASTA, TERESA CEPERO FUSTERO Y DANIEL SIERRA RUIZ

(CPI El Espartidero, Zaragoza)

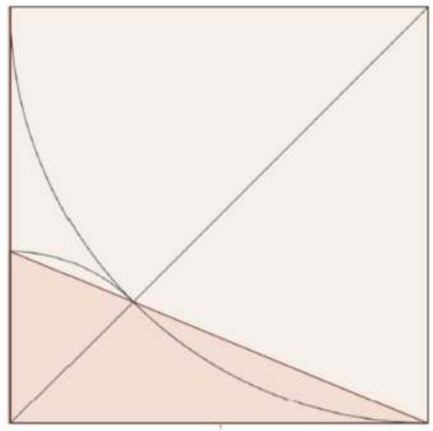


Figura 1. El cuadrado del que partimos, y la forma de obtener el triángulo rectángulo

Se podría decir que la idea inicial de esta experiencia que presentamos tiene su origen en Conexión Matemática. Originalmente uno de los objetivos del programa era establecer vínculos entre el profesorado. Tras el taller de rigor en el IES Salvador Victoria, en conversación con los compañeros, comentaron que estaban buscando una forma de generar una estrella mudéjar a partir de varias copias de dos o tres figuras geométricas sencillas. Además, idealmente se tendría que poder hacer *algo más* con estas piezas, como por ejemplo cuadrar la estrella.

Posteriormente, dándole vueltas en casa, observamos que la estrella mudéjar se puede generar a partir del cuadrado y del triángulo rectángulo que se ven en la figura 1. En este enlace se puede ver un vídeo (de mala calidad) del proceso para llegar a la estrella partiendo de un cuadrado.

El hecho de que la medida del cateto pequeño del triángulo rectángulo sea $\sqrt{2}-1$, nos puso en la pista de que quizás pudiéramos utilizar esta construcción para trabajar los números irracionales haciendo uso de su expresión radical.

Como bien es sabido, el curso 20-21 se presentaba con unas cuantas dificultades y muchas incertidumbres. Todos los docentes nos encontramos con el problema de que el alumnado empezaba el curso sin haber trabajado una buena parte del currículo del anterior curso. Por su parte, el Departamento de Educación planteaba en su plan de refuerzo que los contenidos del curso entrante no podían ser una mera suma de los no impartidos en el curso anterior y de los que habían de impartirse en él. Así pues el reto era importante y nosotros realizamos un esfuerzo para darles coherencia eliminando los elementos redundantes.

En ese contexto, en el CPI El Espartidero, los docentes implicados en impartir 3.º académicas en el curso 20-21, decidimos comenzar de forma diferente.

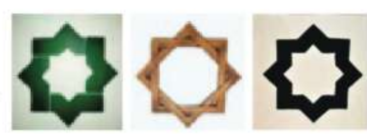


Figura 2

No utilizamos libro de texto, y quisimos *enlazar* los contenidos de 3.º con lo trabajado en 2.º, a partir de algo muy de Aragón, como es la *estrella mudéjar* (figura 2).

Planteamos el trabajo como unidad inicial del curso y como hilo conductor del temario.

En la unidad inicial pretendimos:

— Repasar contenidos de 2.º que se fueran a ampliar en 3.º. Esta fue la selección:
  - Geometría plana. Perímetros y áreas. Teorema de Pitágoras.
  - Proporcionalidad numérica y geométrica. Escala.
  - Semejanza de figuras. Teorema de Thales.
  - Redondeo de números. Números irracionales.
  - Movimientos en el plano.
  - Álgebra.

— Ofrecer contenidos nuevos.

— Encadenar actividades, que no fueran cosas aisladas, que el producto final fuera cúmulo de todas (hacerles ver que las matemáticas no son bloques estancos).

Teniendo clara esta parte, planteamos diferentes tareas enlazadas entre sí, con los contenidos a repasar y a ampliar, intentando combinar el trabajo manipulativo con el escrito, y el trabajo individual con el trabajo en grupo (gran o pequeño grupo), con una duración de 20 sesiones (por la semipresencialidad con la que comenzamos el curso 20-21), concluyendo con prueba objetiva (tabla 1)

Apartados	*Contenidos a trabajar*
0 Un poquito de historia	
1 El puzzle 2 Optimizando papel	Semejanza de figuras.
3 Construcciones diferentes del triángulo rectángulo necesario, ¿misma área? 4 ¿Sobra el mismo trozo de papel?	Geometría plana. Áreas.
5 A hacer el puzzle. Estrella mudéjar	Geometría plana. Perímetros y áreas. Semejanza. Redondeo.
6 Tarea de precisión. Cálculo de los lados del triángulo.	Teorema de Pitágoras. Proporcionalidad directa. Números irracionales.
7 Movimientos en el plano. Construcción de la estrella.	Movimientos en el plano.
8 Generalizamos. Del 1 a la *x*.	Teorema de Pitágoras. Números irracionales.Cálculo de perímetros y área. Álgebra.

Tabla 1

Comenzamos la unidad con un poquito de historia, explicando qué era la estrella mudéjar, saber su importancia, símbolo de Teruel, muy presente en su artesanía, en sus construcciones, en la autovía…

A partir de la imagen de una estrella, les pedimos que *hicieran un puzzle* con figuras geométricas, lo más sencillas posibles.

Tras localizar el puzzle *más sencillo* (de cara al número de figuras geométricas distintas y lo más sencillas posibles) con 8 cuadrados iguales y 16 triángulos rectángulos iguales (figura 3), vimos la relación entre ambos y pasamos a hacer cada uno su estrella.

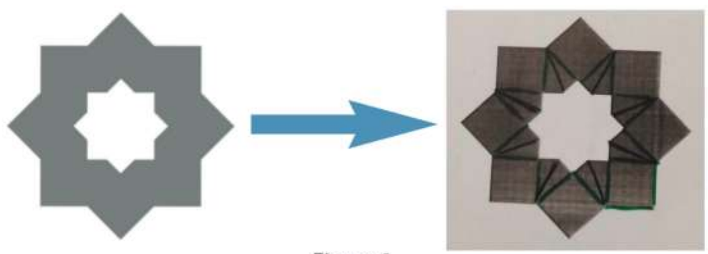


Figura 3

Necesitábamos generar los triángulos y cuadrados, necesitábamos hacer pliegues al papel y seleccionar tamaños. Planteamos que se optimizara el uso de papel, calculando el número total de folios necesarios según tamaño seleccionado de estrella. Esto dio juego para trabajar la proporcionalidad directa.

En clase los alumnos no tuvieron problema a la hora de confeccionar cuadrados, no fue así con el tema de los triángulos, vimos la relación entre ambos y que de un cuadrado podíamos obtener 4 triángulos rectángulos iguales.

Llegados a este punto, un grupo se dio cuenta de que se podían plantear dos alternativas (figura 4).

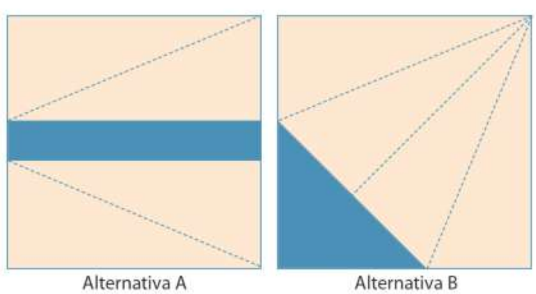


Figura 4

Este hecho dio juego para:

— Poder recuperar conceptos de geometría plana, se les solicitó comprobar que sobraba la misma cantidad de papel en ambas construcciones.
— No todos los alumnos tenían el mismo tamaño de papel, por lo que trabajamos la proporcionalidad geométrica, teorema de Thales aplicado a triángulos (figura 5).

Construcción 1

Construcción 2

Figura 5. Trabajo de un alumno

Con las piezas hechas, comparadas según la escala seleccionada, nos pusimos manos a la obra: cada uno a montar su estrella (figura 6).

Con la estrella hecha, planteamos el cálculo de perímetros y áreas totales, para ello se repasó el uso del teorema de Pitágoras, la aproximación de números y la proporcionalidad, comprobando de esta forma que las cuentas estaban bien hechas.

Para localizar las medidas, los alumnos trabajaron de manera manipulativa, localizamos en gran grupo un proceso de plegado que nos facilitaba los datos necesarios (figura 7).

Llegados a este punto, nos centramos en los números, les hicimos ver que las cuentas estaban bien hechas y, sin embargo, no todos teníamos los mismos resultados, había cierta imprecisión, por diferentes motivos. Por ejemplo:

— Al manipular el papel, los pliegues no son exactos, lo que nos llevó a repasar la aproximación de números decimales, con cifras muy pequeñas.
— Se planteó, también, los diferentes tamaños de las estrellas, se volvió sobre el concepto de constante de proporcionalidad longitudinal y de superficie, y planteamos hacer cálculos todos con la misma unidad, seleccionada-

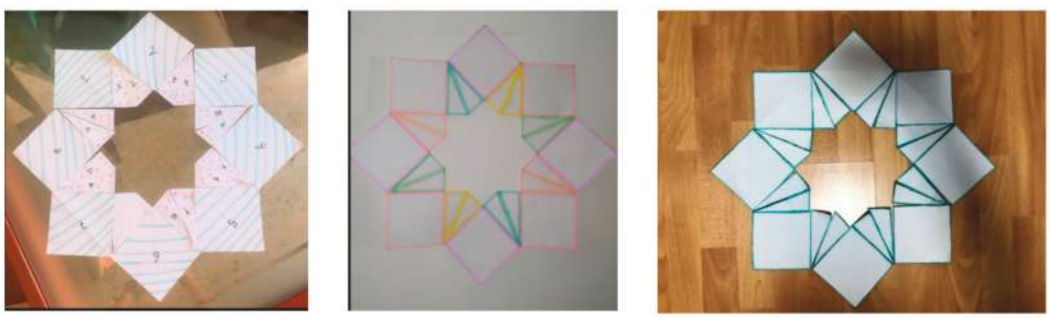


Figura 6. Algunos de los resultados de los alumnos

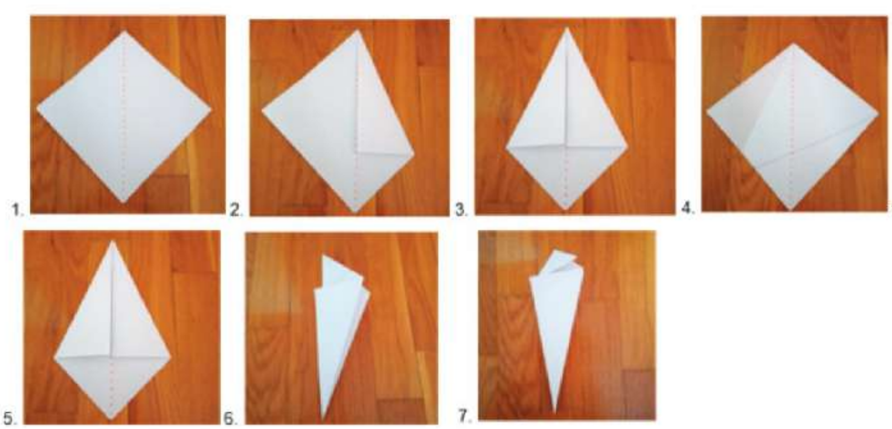


Figura 7. Proceso de plegado planteado por el grupo

mos1 u como medida del lado del cuadrado y repetimos el proceso de cálculos. Seguían saliendo aproximaciones, lo que nos dio pie para introducir el concepto de números irracionales, concepto nuevo para 3.º de ESO.

Llegados a este punto, teniendo claro el proceso de construcción de la estrella a partir de dos figuras tan sencillas como un cuadrado y un triángulo rectángulo, introducimos el concepto de movimientos en el plano, nuevo del temario, y muy fácilmente de reconocer por parte de los alumnos, ya que habían manipulado y construido su propia estrella, pero sin dar nombres.

Para concluir con la unidad, quisimos *generalizar*, hacerles ver que había álgebra en todo este proceso. Habíamos comenzado con unas medidas concretas, cada alumno las que hubiera elegido según el corte del folio, para evitar imprecisiones habíamos pasado a tomar, todos, la misma unidad de medida, repitiendo el proceso aritmético. Ahora se plantea ver que esas cuentas tenían un orden, que se podían localizar expresiones algebraicas que nos permitieran agilizar el cálculo de perímetros y áreas. Se plantea tomar como unidad de medida x.

Se les entregó la tabla 2, con las cuentas hechas por ellos hasta el momento.

Cuadrado	*Diagonal del cuadrado*	*Cateto menor*	*Triángulo* *Cateto mayor*	*Hipotenusa*	*Perímetro de la estrella* *(interior + exterior)*	*Área de la estrella*
10,5 cm	14,8	4,3	10,5	11,3	236,8 cm	1243,2 cm^2
15 cm	21	6	15	16,1	336 cm	2520 cm^2
1 u						
2 u						
3 u						
4 u						
5 u						
x u						

Tabla 2

Para completarla, se planteó, en gran grupo, verbalizar los procesos llevados a cabo en cada paso y se les pidió que completaran la tabla por columnas, a fin de ver las relaciones existentes. El hecho de verbalizar un proceso matemático es algo que ayuda a organizar las ideas, y es algo que habitualmente pasamos por alto o no le dedicamos el tiempo necesario; no es fácil para ellos y es un proceso que deben hacer.

Con esta unidad, pudimos trabajar de forma conjunta muchos contenidos, a partir de «jugar con un trozo de papel». La idea era que se dieran cuenta de que no son bloques aislados, no es geometría, estadística, aritmética…, todo está enlazado. Y eso hicimos, enlazar y poder generar un hilo conductor para el curso.

Tras estas 20 sesiones de trabajo semipresencial y una prueba objetiva, comenzamos las unidades de 3.º de ESO Académicas, empezando o terminando cada una de ellas con aspectos relativos a la estrella mudéjar. En diferentes unidades además se les pidió que fueran ellos los encargados de *enlazar* la estrella con lo trabajado en el aula, con invención de problemas.

Así mismo, durante nuestra semana matemática, planteamos una pequeña exposición con las estrellas mudéjares confeccionadas por nuestros alumnos (figura 8).

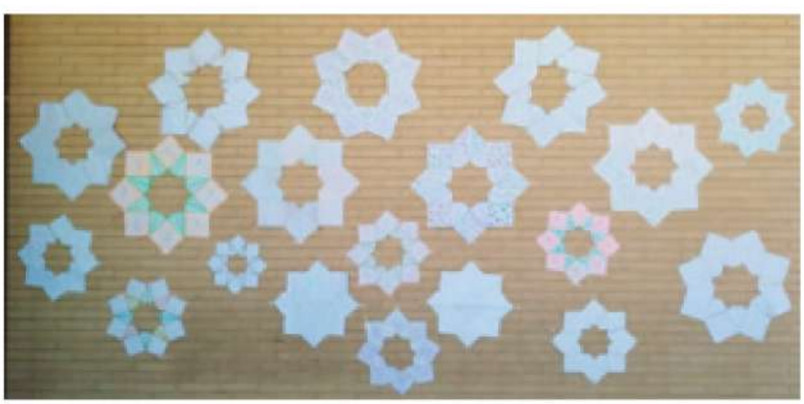


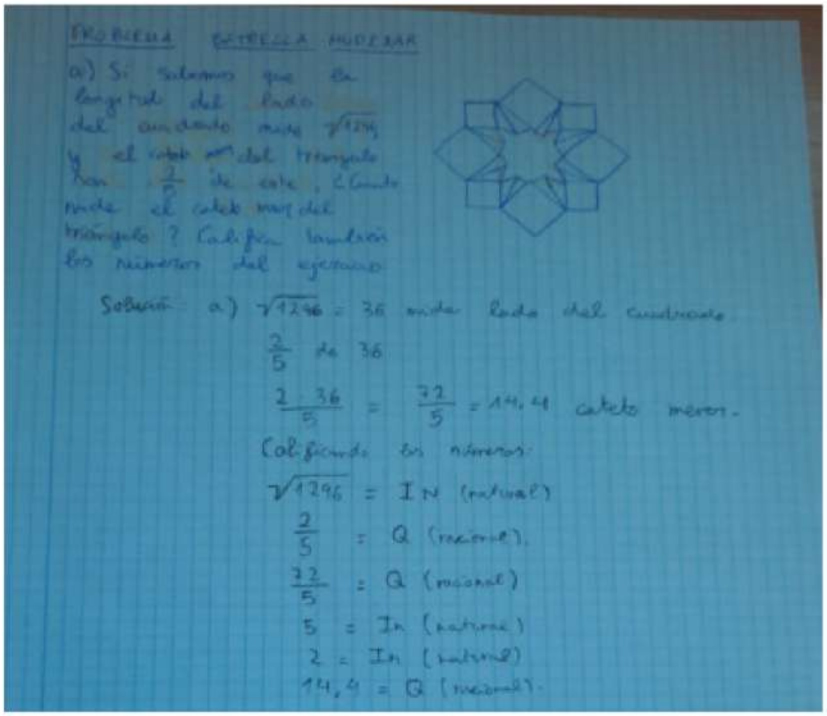
Figura 8

Para algunos alumnos, la estrella mudéjar supuso un pequeño trauma, pero otros la disfrutaron; disfrutaron el hecho de descubrir matemáticas en cosas que nos rodean, de poder manipular, algo que poco a poco vamos perdiendo conforme superan curso, y no deberíamos perder.

En la última clase del curso, un alumno preguntó si se iba a seguir con la estrella en 4.º de ESO, con cierto temor a escuchar un sí por respuesta. Le indicamos que seguramente cambiaríamos, pensando en poder hacer uso de la pajarita de Huesca, pero, sin dar tiempo a pensar algo en serio, nos planteó el *lauburu* vasco como punto de partida de 4.º académicas. Huelga decir que esa ha sido la unidad inicial de 4.º de ESO Matemáticas Académicas.

Ejemplos de ejercicios inventados por los propios alumnos

Conjuntos de números



PROBLEMA ESTRELLA MUDEJAR

a) Si sabemos que la longitud del lado del cuadrado mide $\sqrt{1296}$ y el cateto menor del triángulo son $\frac{2}{5}$ de este, ¿Cuánto mide el cateto mayor del triángulo? Califica también los números del ejercicio

Solución a) $\sqrt{1296} = 36$ mide lado del cuadrado

$\frac{2}{5}$ de 36

$\frac{2 \cdot 36}{5} = \frac{72}{5} = 14,4$ cateto menor.

Calificando los números:

$\sqrt{1296}$ = IN (natural)

$\frac{2}{5}$ = Q (racional).

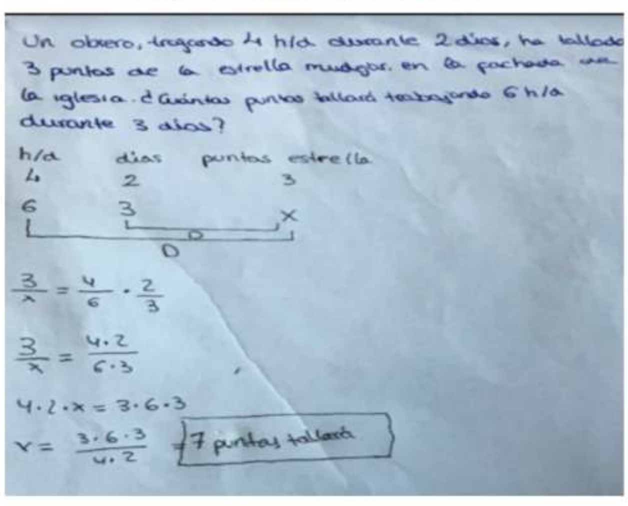
$\frac{72}{5}$ = Q (racional)

5 = IN (natural)

2 = IN (natural)

14,4 = Q (racional).

Proporcionalidad compuesta



Un obrero, trabajando 4 h/d durante 2 días, ha tallado 3 puntas de la estrella mudejar en la fachada de la iglesia. ¿Cuántas puntas tallará trabajando 6 h/d durante 3 días?

h/d	días	puntas estrella
4	2	3
6	3	x

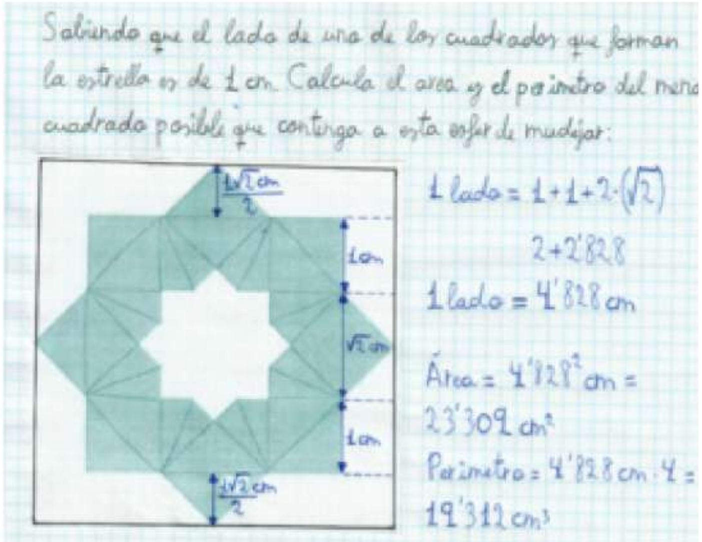
$\frac{3}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{3}{x} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 3}$

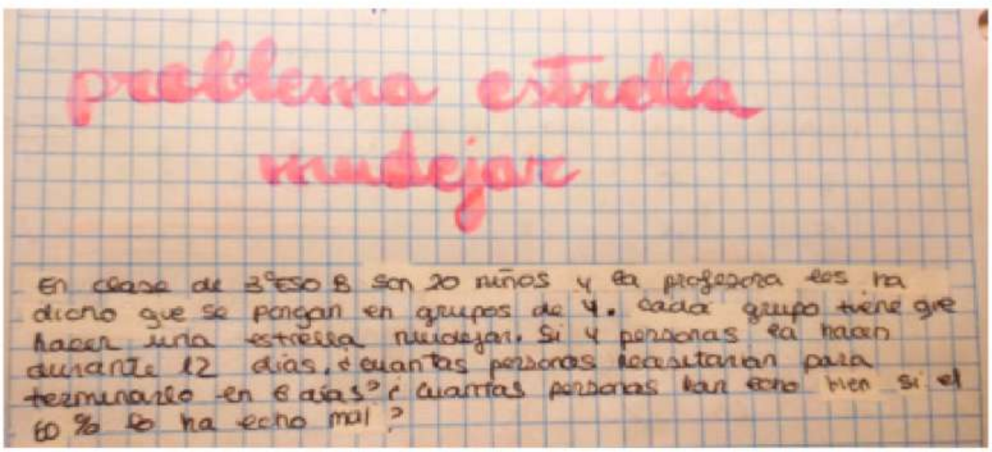
$4 \cdot 2 \cdot x = 3 \cdot 6 \cdot 3$

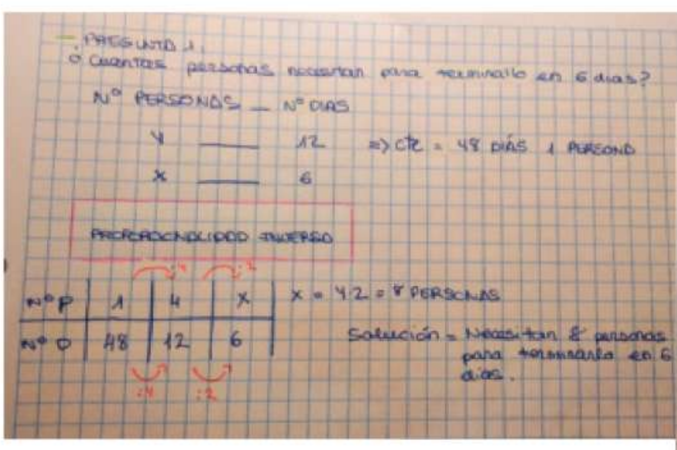
$x = \frac{3 \cdot 6 \cdot 3}{4 \cdot 2}$ $\boxed{\approx 7 \text{ puntas tallará}}$

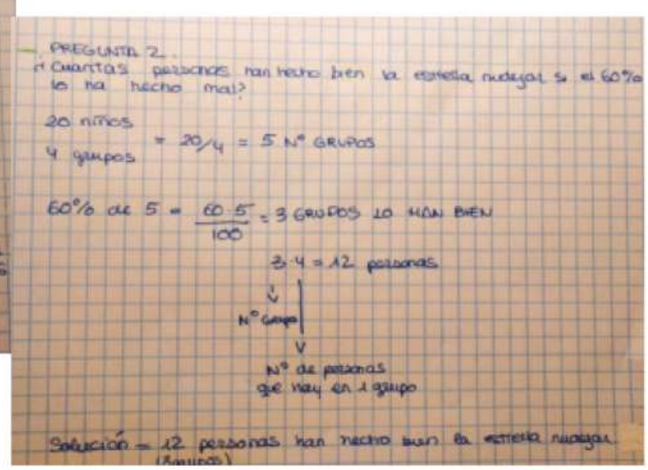
Radicales y aproximaciones



Proporcionalidad inversa y porcentajes

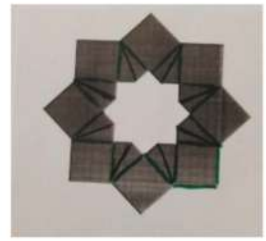






Ejemplos de preguntas que se pusieron en pruebas objetivas

Lenguaje algebraico. Polinomios



Hemos comenzado el curso construyendo una estrella mudéjar, formada por 8 cuadrados y 16 triángulos rectángulos.

Conociendo que

- el lado del cuadrado mide a
- el cateto menor del triángulo rectángulo mide b
- el cateto mayor del triángulo rectángulo mide c

Indica:

Enunciado	*Expresión algebraica reducida*
La expresión algebraica que indica el perímetro exterior de la estrella	
La expresión algebraica que indica la medida de la diagonal del cuadrado	
La expresión algebraica que indica el área de la estrella	

Repartos inversamente proporcionales

Hay un concurso de construcción de estrellas mudéjares, siguiendo unas pautas dadas. El premio son 852 euros y se ha repartido de manera inversamente proporcional al número de fallos detectados en las estrellas presentadas. El primer clasificado ha tenido 3 fallos, el segundo clasificado 5 fallos y el tercer clasificado 7 fallos. ¿Cuál es el premio de cada uno?

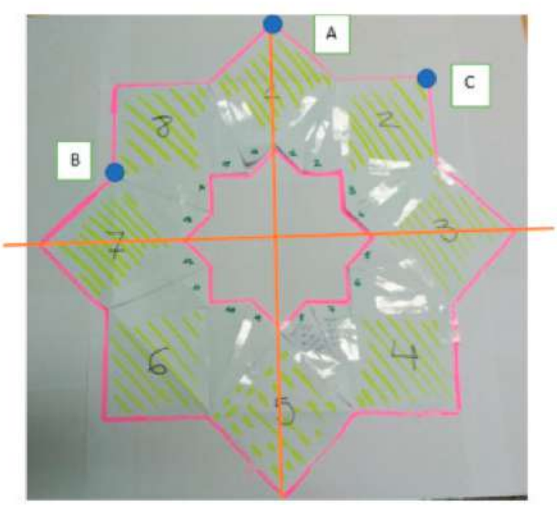
Sucesiones

En un taller artesano van a hacer estrellas mudéjares. Plantean hacer 50 estrellas, con la característica que cada estrella tendrá tres centímetros más de longitud que el lado del cuadrado.

Si el cuadrado inicial mide 5 cm de lado

a) Indica las medidas de los siguientes 10 cuadrados.
b) ¿Cuánto medirá el cuadrado último?
c) Indica qué tipo de progresión tienes, justificando tu respuesta.

Racionales, uso de calculadora y funciones



En la imagen puedes ver la estrella mudéjar insertada en unos ejes coordenados.

Si las coordenadas de los puntos son:

- $A(0,\sqrt{2}+1)$
- $B(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$
- $C(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

Aproxima a las centésimas y calcula:

a) Dibuja la recta que pasa por los puntos B y C. Indica el signo de la pendiente de dicha recta, justificando tu respuesta.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y C