

Líneas trigonométricas desaparecidas

por

ANTONIO M. OLLER MARCÉN

(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

En estos momentos se está llevando a cabo un laborioso e importante proceso de renovación y diseño curricular en Aragón. Este proceso supone una revisión de aspectos metodológicos, organizativos, de evaluación, etc. También los contenidos incluidos están, o deberían estar, sujetos a una revisión. Sin embargo, en algunas ocasiones se tiene la sensación de que los contenidos que conforman las matemáticas escolares (o al menos muchos de ellos) son inmutables, y su presencia en el currículo, indiscutible.

Una mirada al pasado nos muestra que en demasiadas ocasiones esto es así y encontramos, por ejemplo, tipos de problemas que llevan apareciendo en los libros de texto durante siglos, sin que uno tenga demasiado claro el porqué.

Y semejantemente si diez hombres en veinte y quatro dias hazen vn edificio, 15. hombres en quantos dias hazen el dicho edificio. Quiero dezir otro edificio semejante.

Es poco probable que en 1643 (fecha de publicación del libro del que está extraído el problema de la imagen) el tiempo necesario para construir un edificio fuera inversamente proporcional al número de obreros. Hoy en día tampoco lo es, pero enunciados como este siguen apareciendo en nuestros libros de texto. ¿Acaso no hay otros contextos mejores en los que plantear problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad inversa?

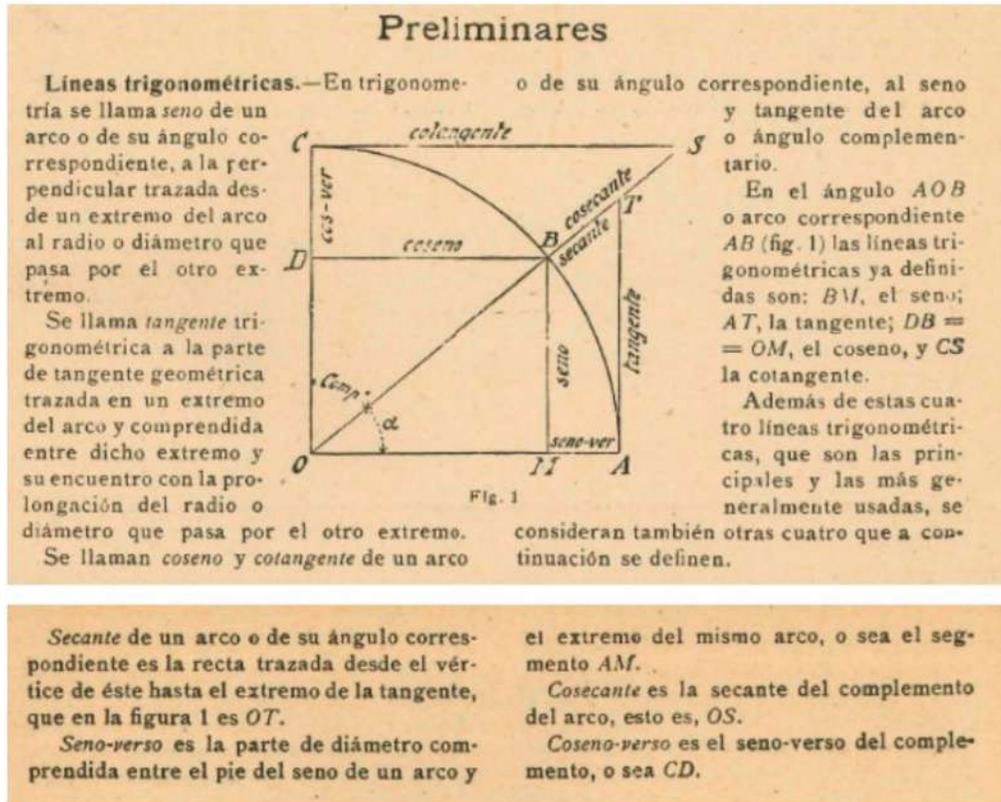
Sin embargo, lo cierto es que las matemáticas evolucionan y su enseñanza también. Situaciones que en un momento histórico fueron cotidianas, resultan ajenas doscientos años después. Herramientas que en un tiempo parecieron indispensables, se convierten en obsoletas por múltiples razones. En esta nota vamos a comentar un ejemplo proveniente de la trigonometría.

La figura siguiente proviene de un pequeño ejemplar de 1948 titulado *Tablas Taquimétricas*, escrito por el ingeniero oscense Hermenegildo Gorría (1843-1920). El libro es de pequeño formato (17 × 11 cm) y contiene tablas de valores de líneas trigonométricas, así como indicaciones sobre el trazado de curvas de enlace entre rectas ya que, en palabras del autor:

[...] para la redacción de proyectos y la ejecución de obras de caminos, carreteras, acequias, canales y ferrocarriles, se estudia primero el trazado poligonal; después se unen cada dos rectas o alineaciones de ese trazado, por medio de curvas tangentes a las mismas, para lo cual se usan arcos de círculo o de parábola [...]

Así, se entiende que el pequeño tamaño del libro está motivado por la posibilidad de utilizarlo como un breviarario durante el trabajo de campo de un ingeniero.

En cualquier caso, la obra comienza con un breve recordatorio de los nombres de las líneas trigonométricas y su definición, tal y como vemos en la figura siguiente.



Este texto tiene dos elementos que pueden llamar la atención a un lector moderno:

- Las líneas trigonométricas no se definen como cocientes de lados de un triángulo rectángulo. De hecho, no se habla de razones trigonométricas.
- Aparecen dos términos que no se encuentran actualmente: seno-verso y coseno-verso.

El primer punto es muy interesante, aunque no le vamos a prestar especial atención. Quizás nos puede hacer reflexionar acerca de cuál es el verdadero origen de la trigonometría y sobre su utilidad práctica concreta. También podemos ver que el coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo se llaman así porque son, respectivamente, el seno, la tangente y la secante del ángulo complementario.

Pero nos vamos a centrar en el segundo punto. Se puede pensar que esos dos conceptos, el *seno verso* y el *coseno verso*, son elementos especializados, a los que solo prestaban atención determinados profesionales. Sin embargo, si se realiza una búsqueda no demasiado exhaustiva, es fácil constatar que no es así.

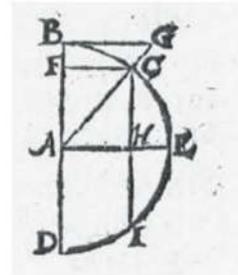
Líneas trigonométricas auxiliares.—Además de las cuatro líneas seno, tangente, secante y seno-verso, y cuatro colíneas coseno, cotangente, cosecante y coseno verso ya conocidas,

El fragmento anterior, por ejemplo, proviene de los *Ejercicios de Trigonometría* del capitán de fragata Antonio Terry y Rivas, publicados por primera vez en 1881. Esta obra se utilizó durante muchos años como obra de texto para ingresar en la Armada y se reeditó en 1914. Como podemos ver, el seno verso ocupa su lugar junto al seno, la tangente, la secante y sus cuatro correspondientes complementarias.

Los autores anteriores, de hecho, recogen una tradición muy anterior. Así, el fragmento siguiente es casi un siglo más antiguo que la obra de Terry. Proviene del *Compendio de la Geometría Elemental y Trigonometría Rectilínea para el Uso de los Cavalleros Guardias-Marinas*, publicado en 1794, y escrito también por un marino, Vicente Tofiño.

293. *Seno Verso ó Sagita*, es la porcion del *Diametro comprehendido entre el Seno primero de un Arco, y el mismo Arco*: y así FC es Seno Verso del Arco CG; de donde se infiere, que si del Radio AC se resta FA, ó su igual GH, Seno segundo de dicho Arco, el residuo FC es el Seno Verso del Arco CC; pero el Seno Verso del Arco GBM, es igual á la suma del Radio MA con AF Seno segundo de dicho Arco.

Podemos retroceder más aún en el tiempo y salirnos del contexto español. Por ejemplo, en la *Trigonometria cum magnun logarithmor canone* de Benjamin Ursinus, impresa en Colonia en 1625 encontramos la misma definición: «el seno verso, que algunos dicen seno segundo, es el segmento del diámetro entre el seno recto y el arco».



Sinus Versus qui alijs *Sinus Secundus* dicitur, est segmentum Diametri inter Sinum Rectum & arcum ejusdem interceptum. Sunt & qui Sinum Versum dicunt *Sagittam* vel *Sagittam-Sinus*, eodem scilicet respectu, quo duplum Sinus Recti vel subtensam arcus Chordam, segmentumq; circumferentiae Circuli, cui ea subtenditur, Arcum vocant. Estq; Sinus Versus vel minor vel major. Sinus Versus minor, est Sinus Arcus Quadrante minoris vel Anguli Acuti. Ita BF est Sinus Versus Arcus BC Quadrante minoris vel Anguli Acuti BAC.

Así, acabamos de encontrar un objeto matemático, el seno verso, cuya importancia lo mantuvo presente en los textos dedicados a la enseñanza de la trigonometría durante muchos cientos de años pero que, finalmente, acabó por desaparecer sin dejar rastro.

Seguramente, llegados a este punto, el lector tiene claro que $\text{versen } \alpha = 1 - \cos \alpha$ y le parece perfectamente natural que se haya prescindido de un objeto que puede definirse en términos de otro. Pero, en cualquier caso, esto suscita diversas cuestiones. Si la relación entre ambos es tan evidente:

- ¿Por qué se puso un nombre al seno verso?
- ¿Por qué mantener el coseno y prescindir del seno verso y no al contrario?

La primera pregunta se puede responder en parte si observamos que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{2} = \frac{\text{versen } \alpha}{2}.$$

De este modo, si queremos construir tablas trigonométricas, la utilidad del seno verso resulta clara y es relativamente fácil entender que se le prestara atención.

La segunda pregunta resulta más difícil de responder. De hecho, podríamos preguntarnos el motivo por el cual el coseno recibe un nombre propio. A fin de cuentas, el coseno de un ángulo es el seno de su complementario. Es más, en la obra de Tofiño mencionada anteriormente el coseno es denominado seno segundo. Ursinus, por su parte, llama al coseno «sinus rectus complementi». El propio Gorría opta por introducir inicialmente el seno y la tangente, dejando el coseno en un plano secundario. Lo mismo hace Terry.

Así, incluso dejando de lado la presencia del seno verso y del coseno verso, parece que tenemos dos enfoques claramente diferentes. Antiguamente se introducían en primer lugar el seno, la tangente y la secante de un ángulo; de forma que el coseno, la cotangente y la cosecante eran los correspondientes conceptos del ángulo complementario. En la actualidad, se introducen el seno, el coseno y la tangente de un ángulo; de forma que la cosecante, la secante y la cotangente son los valores inversos de los anteriores.

Un posible motivo de este cambio puede radicar en una visión más aritmética y menos geométrica. La figura del libro de Gorría muestra una visión claramente geométrica. Se habla de líneas y cada una de las líneas trigonométricas consideradas se corresponde con un segmento. Hoy en día se habla de razones trigonométricas, que se obtienen mediante el cociente de longitudes y se conciben como números. Desde un punto de vista aritmético puede tener sentido hablar de «el inverso del seno», pero no desde un punto de vista geométrico.

Pero volvamos a lo que nos ocupaba: la desaparición del seno verso. Sean cuales sean las razones, se trata de un concepto ya abandonado, desaparecido y prácticamente olvidado. ¿Se le echa de menos? ¿Se puede hacer trigonometría sin él? ¿Se haría mejor con él? Cada uno puede responder a estas preguntas. Con independencia de las posibles respuestas, el seno verso es una herramienta matemática que se construyó y se utilizó con un fin. Los fines cambian. Las necesidades evolucionan. Algunas herramientas dejan de tener una razón de ser y herramientas nuevas deben ser inventadas para resolver problemas que no existían anteriormente. La enseñanza debe reflejar esta realidad en cierto modo.

Con esto no queremos decir que los objetos que se decida enseñar en clase de matemáticas deban estar seleccionados con criterios puramente utilitaristas. Pero quizás sí que podemos reflexionar sobre si algunos contenidos que consideramos irrenunciables lo son en realidad y, también, sobre cuáles son los motivos que nos llevan a considerar indispensables dichos contenidos.