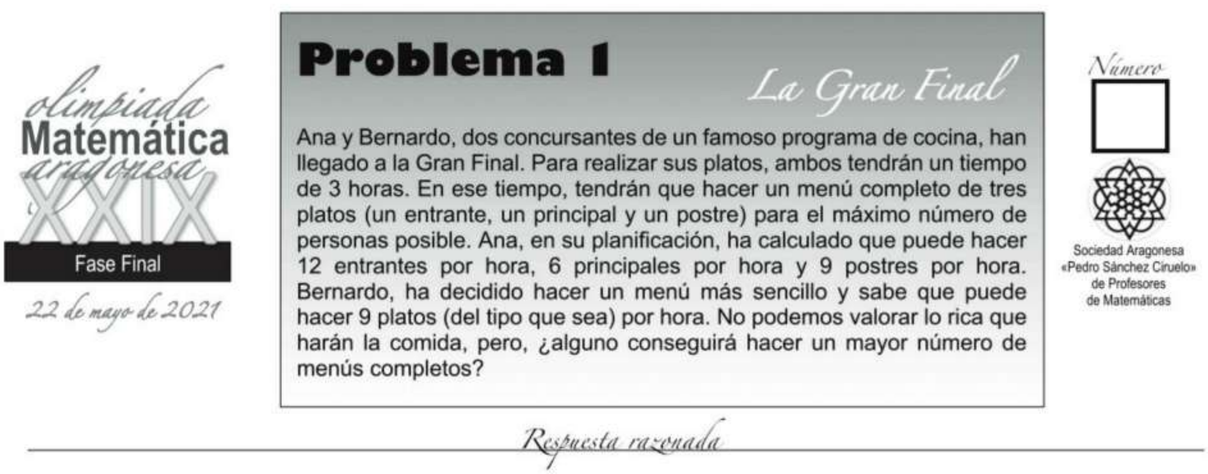
Un problema de reparto inversamente proporcional en la XXIX Olimpiada aragonesa

por

SERGIO MARTÍNEZ-JUSTE

(Dirección General de Planificación y Equidad, y Universidad de Zaragoza)

En este artículo exploramos el problema 1, *La Gran Final* (ver figura 1), de la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO que se celebró en Zaragoza el 22 de mayo de 2021 en el aula magna de la Facultad de Ciencias. Estudiaremos la estructura del problema comentando su relación con los problemas escolares habituales. Además, resumiremos los datos obtenidos a partir de las respuestas de los 47 estudiantes que participaron en la fase final. En concreto, analizaremos las tasas de éxito y algunas estrategias, tanto erróneas como correctas, empleadas por los participantes.



Problema 1 *La Gran Final*

Ana y Bernardo, dos concursantes de un famoso programa de cocina, han llegado a la Gran Final. Para realizar sus platos, ambos tendrán un tiempo de 3 horas. En ese tiempo, tendrán que hacer un menú completo de tres platos (un entrante, un principal y un postre) para el máximo número de personas posible. Ana, en su planificación, ha calculado que puede hacer 12 entrantes por hora, 6 principales por hora y 9 postres por hora. Bernardo, ha decidido hacer un menú más sencillo y sabe que puede hacer 9 platos (del tipo que sea) por hora. No podemos valorar lo rica que harán la comida, pero, ¿alguno conseguirá hacer un mayor número de menús completos?

Figura 1. Problema 1, *La Gran Final*, de la fase final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa

La estructura del problema

El problema 1 de la XXIX Olimpiada, *La Gran Final*, es un problema verbal, en apariencia sencillo, pero en el que, por ejemplo, podemos observar una amplia variedad de magnitudes diferentes: número de concursantes, número de platos diferentes que deben realizar, tiempo total disponible, velocidad a la que cada concursante hace cada tipo de plato, número de platos de cada tipo que cada concursante puede realizar…

En la pregunta se pide determinar si alguno de los concursantes podría ser capaz de realizar más menús completos que su oponente en el tiempo disponible. Es decir, se trata de que, con las condiciones de velocidad de realización de cada plato, los concursantes optimicen el tiempo para obtener el mayor número posible de menús completos.

Si nos fijamos en un único participante, tomemos como ejemplo a Ana porque la estructura numérica del problema es más compleja en sus condiciones iniciales, debemos repartir el tiempo total entre las diferentes tareas a realizar (hacer los entrantes, los principales y los postres). Sin embargo, el reparto no puede ser equitativo si queremos maximizar el número de menús completos. Para ello, podemos calcular cuánto tiempo debe dedicar a cada tarea para realizar menús completos, es decir, el mismo número de platos de cada tipo, de forma que el tiempo sobrante no sea suficiente para realizar un menú completo más. Si llamamos w_1, w_2 y w_3 a las velocidades a las que hace cada plato. La suma de las cantidades inversas (tiempo en horas que tarda en hacer cada plato), es decir,

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3},$$

nos proporcionaría el tiempo que se tardaría en hacer un menú. Si $T=3$ es el tiempo total disponible, entonces el cociente, k, entre el tiempo total disponible y el tiempo que nos cuesta hacer cada menú, nos informa del número de menús que se pueden realizar:

$$k=\frac{T}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}}.$$

Con los datos concretos de Ana, ese número de menús no es entero (redondeado a las décimas arroja un valor de 8,3). Es decir, Ana podrá hacer como máximo 8 menús completos. Para los datos de Bernardo, aunque no es necesario, el cálculo anterior arroja obviamente un valor de 9. Por tanto, Bernardo puede hacer un menú más que Ana.

La forma de escribir la cantidad k en la fórmula anterior no responde a una toma de posición de cómo deberían resolver o se espera que resuelvan los alumnos el problema. Todo lo contrario, se ha presentado de esa manera para resaltar la fórmula que habitualmente podemos encontrar en los libros de texto para la resolución de problemas (casi todos muy artificiales) de repartos inversamente proporcionales (Martínez-Juste y otros, 2019). Si nos fijamos solo en uno de los participantes, el problema anterior podría entenderse como un problema de reparto inversamente proporcional, donde entran en juego tres «participantes en el reparto» (cada tipo de plato) y debe repartirse el tiempo total de forma inversamente proporcional a la velocidad a la que se elabora cada uno de los platos. De hecho, la cantidad k anterior, número de menús, es la constante de proporcionalidad del problema ya que el producto del tiempo que tiene que estar en cada plato y la velocidad a la que los elabora debe ser igual para cada tipo de plato (e igual al número de menús completos que se elaboran).

Se pretende, por tanto, llamar la atención del profesorado que lea este artículo ejemplificando cómo puede proponerse un contexto realista del que surge sin necesidad de artificios el enunciado de un problema de reparto inversamente proporcional. Además, el significado de las operaciones entre las cantidades involucradas puede guiar a los estudiantes (como de hecho veremos que ha sucedido en muchos participantes de la olimpiada) para encontrar la solución sin necesidad de usar álgebra o fórmula alguna.

A diferencia de lo que ocurre habitualmente con los problemas escolares de repartos inversamente proporcionales, en el enunciado no se especifica que el reparto deba hacerse de forma inversamente proporcional. Además, el problema no se presenta de forma que se pida explícitamente repartir el tiempo entre los diferentes tipos de platos, sino que se deben comparar las constantes de proporcionalidad (número de menús completos) para cada participante. Es, por tanto, un ejemplo de cómo puede variarse la estructura de los problemas de proporcionalidad (simple directa o inversa, compuesta, repartos, porcentajes, escalas…) para no realizar únicamente problemas en los que se solicitan uno o varios datos, sino también otros en los que se solicita comparar la constante de proporcionalidad en diferentes situaciones.

Al margen de la clasificación que hemos hecho del problema con el estudio de su estructura y debido, en parte, a la sencillez de la estructura numérica en el caso de Bernardo (al ser iguales las velocidades el reparto inversamente proporcional se convierte en un reparto equitativo), el problema permite aplicar diferentes estrategias de resolución (por ejemplo, razonar que Ana no puede llegar a hacer 9 menús completos).

Una mirada global a los resultados

A pesar de la aparente simplicidad del problema que puede resolverse haciendo uso del significado de las cantidades que aparecen y de las operaciones que pueden realizarse entre ellas, la tasa de éxito fue del 55,3 % (26 respuestas correctas de un total de 47). En la tasa de éxito hemos contabilizado las respuestas que aun teniendo algún error aritmético hacen un planteamiento del problema adecuado.

Cabe destacar que ningún alumno dejó en blanco o sin entregar este problema. Todos los participantes de la fase final propusieron alguna respuesta, más o menos argumentada, al problema. Además, todas las soluciones tienen una alta componente aritmética. Los únicos literales utilizados aparecen en el planteamiento de reglas de tres o proporciones que los participantes utilizan generalmente para calcular los inversos de las velocidades de cada tipo de plato que hace Ana. No encontramos, por ejemplo, estrategias globales basadas en el planteamiento y resolución de ecuaciones. Por tanto, el problema parece promover razonamientos aritméticos.

Principales fallos en el enfoque del problema

Como hemos dicho, los participantes presentaron resoluciones aritméticas, por lo que la mayor parte de los fallos parecen debidos a la realización de operaciones que no tienen sentido o a la inadecuada interpretación del resultado de estas. Algunos de ellos, como veremos, se basan en utilizar un modelo de reparto (Martínez-Juste y otros, 2019) equitativo en vez de proporcional

Presentamos los planteamientos erróneos más comunes detectados:

- Se da una solución, pero no se ha conseguido interpretar el razonamiento (2 producciones).
- Se da como solución que Ana puede hacer 18 menús y Bernardo 9. Se calcula cuántos platos de cada tipo podría hacer Ana en 3 horas y se toma como número de menús el mínimo de esas tres cantidades. Encontramos 9 producciones en esta categoría (figura 2).

Independientemente de lo rápido que haga Ana los entrantes o postres,
hace 6 principales por hora.
$6 \cdot \overset{\text{HORAS}}{3} = 18$ menús
18 va a ser el máximo número de menús que va a completar.

Figura 2. Estudiante que responde que Ana puede hacer 18 menús

- Se da como solución que Ana puede hacer 6 menús y Bernardo 9. En estas producciones se realiza un reparto equitativo de tiempo y se da como respuesta para Ana el número de platos principales porque de dicho tipo es del que menos platos se pueden hacer en una hora. Encontramos 5 producciones (figura 3).

Ana, en cambio, solo puede hacer 6 menús en las
3 horas, ya que hace 6 principales y entrantes
y postres hace más de 6. Los entrantes y postres
que sobran no valen porque no hay más
principales para completar los menús enteros.

Figura 3. Estudiante que responde que Ana puede hacer 6 menús

— Se da como solución que ambos concursantes pueden hacer 9 menús. En estas producciones se realiza también un reparto equitativo, pero tras esto se calculan cuántos platos (independientemente del tipo) puede hacer Ana, luego se hacen grupos de 3 para determinar (de forma errónea) cuántos menús completos puede hacer cada uno. Encontramos otras 5 producciones de este tipo (figura 4).

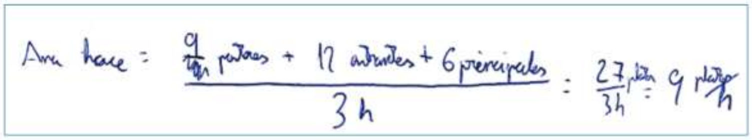


Figura 4. Estudiante que responde que Ana puede hacer 9 menús

— Destacamos que todos los participantes han calculado correctamente cuántos menús puede hacer Bernardo y que, aunque con diferencias, todas las estrategias incorrectas que han podido interpretarse están asociadas a considerar que se invierte la misma cantidad de tiempo en cada tipo de plato.

Diferentes estrategias correctas

Para analizar las estrategias correctas nos hemos centrado en si se calculaba, o no, el tiempo que Ana tarda en hacer cada menú. Esta cuestión es central si quiere abordarse la enseñanza de este tipo de problemas con estudiantes sin darles instrucción específica previa (Martínez-Juste y otros, 2019), es decir, desde un enfoque a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b).

— En 10 producciones se calcula de forma correcta el tiempo que tarda Ana en hacer cada menú. Este tiempo, 13/36 horas, se presenta en 9 producciones con la expresión decimal en minutos (21,666 ...) y en una producción se utiliza en forma compleja como 21 minutos y 40 segundos y con su expresión entera en segundos. En ninguna producción se utiliza notación fraccionaria. Por otro lado, 9 producciones utilizan el tiempo que le cuesta a Ana hacer un menú para calcular cuántos puede hacer en 3 horas (figura 5). Es llamativa la producción de la figura 6 en donde se razona que como Bernardo invierte 20 minutos en hacer cada menú y Ana invierte más tiempo, Bernardo va más rápido y como hace 9 menús (sin que le sobre tiempo), Ana, que va más lenta, no podrá hacer 9.

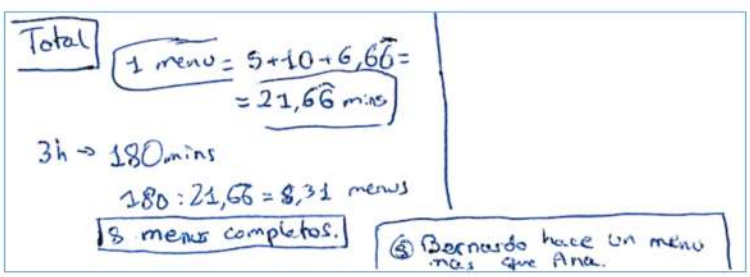


Figura 5. Estudiante que utiliza el tiempo que tarda cada participante para comparar velocidades y deducir quién hace más

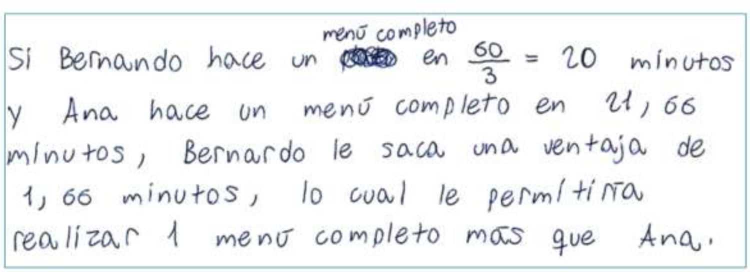
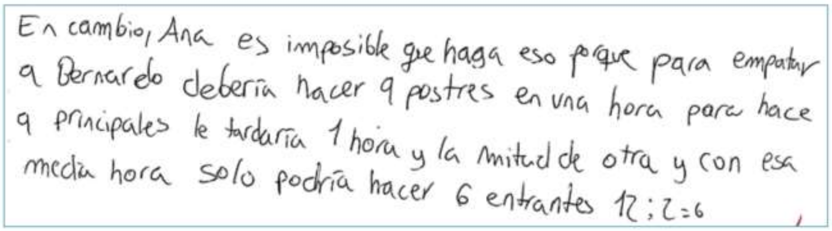


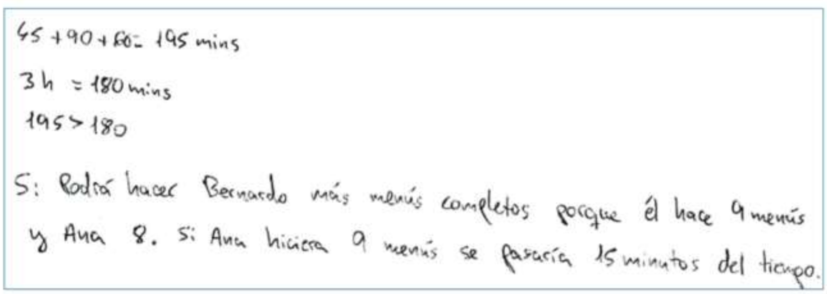
Figura 6. Estudiante que utiliza el tiempo que tarda Ana para calcular el número de menús completos que podrá realizar

— Por otro lado, 16 producciones utilizan la información sobre el número de menús que puede realizar Bernardo (9 menús) para argumentar, sin calcular el tiempo que emplea Ana en hacer cada menú, que Ana no puede hacer esa cantidad. Dentro de este bloque, encontramos múltiples formas de argumentar. Pondremos solo dos ejemplos. En la figura 7 vemos que se calcula el tiempo que tarda Ana en hacer 9 principales y 9 postres para ver que no le da tiempo de hacer 9 entrantes. En la figura 8 vemos que se calcula directamente el tiempo que le costaría a Ana hacer 9 menús.



En cambio, Ana es imposible que haga eso porque para empatar a Bernardo debería hacer 9 postres en una hora para hace 9 principales le tardaría 1 hora y la mitad de otra y con esa media hora solo podría hacer 6 entrantes 12 : 2 = 6

Figura 7. Estudiante que argumenta que a Ana no le da tiempo de hacer 9 menús



45 + 90 + 60 = 195 mins
3 h = 180 mins
195 > 180
Sí: Podrá hacer Bernardo más menús completos porque él hace 9 menús y Ana 8. Si Ana hiciera 9 menús se pasaría 15 minutos del tiempo.

Figura 8. Estudiante que calcula el tiempo que le costaría a Ana hacer 9 menús

En general, observamos una gran diversidad de formas de responder dentro de las 26 respuestas correctas. Destacamos que las respuestas del segundo bloque, en el que no se calcula el tiempo que Ana necesita para hacer cada menú, parecen depender de las peculiaridades de la estructura numérica del enunciado.

Reflexiones y conclusiones

En la enseñanza de la proporcionalidad imperan enfoques centrados en la adquisición de técnicas específicas y problemas estereotipados (Martínez-Juste, 2022). Sin embargo, los fenómenos que pueden ser modelizados por la proporcionalidad son muy amplios y permiten el diseño de problemas no rutinarios en los que los conceptos pueden aparecer de forma espontánea en las resoluciones de estudiantes que no han recibido instrucción específica para ese tipo de problemas. Podemos buscar situaciones realistas incluso en problemas con una estructura más compleja o que inicialmente podrían parecer menos naturales, como los problemas de repartos proporcionales, directos e inversos (Martínez-Juste y otros, 2018, 2019). La inclusión de este tipo de actividades en las secuencias didácticas permite orientar la práctica educativa hacia un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b).

Un claro ejemplo de este tipo de problemas lo encontramos en el problema 1 de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO. Muchos alumnos son capaces de calcular el equivalente a la constante de proporcionalidad del reparto guiados por el significado de las cantidades de magnitud enunciadas y de las operaciones aritméticas entre ellas. Este puede ser un buen indicador para valorar la adecuación de este problema (o uno similar) como situación introductoria si quiere plantearse una secuencia de enseñanza para los repartos proporcionales.

El problema 1, *La Gran Final*, se estructura como un problema de comparación entre dos situaciones diferentes (la forma en la que tiene que repartir el tiempo Ana y los menús completos que puede elaborar y la situación equivalente para Bernardo). Este tipo de problemas promueven la aparición de un amplio abanico de estrategias de resolución. Algunas basadas en el cálculo de la constante de proporcionalidad en cada situación y otras centradas en calcular solo una de las constantes y demostrar que la otra debe ser mayor o menor (o eventualmente igual). Incluir este tipo de problemas (los de comparación) en las secuencias de enseñanza de la proporcionalidad puede enriquecer el aprendizaje de los estudiantes ya que se promueve la interpretación de las constantes de proporcionalidad involucradas. Además, permiten una variedad muy rica de estrategias correctas de resolución que pueden aprovecharse en los debates de aula.

Por otro lado, la discreta tasa de éxito obtenida en la Olimpiada pone de manifiesto las dificultades que muchos estudiantes de 2.º de ESO presentan en el manejo de magnitudes, especialmente las intensivas, y en la interpretación de las operaciones básicas entre cantidades de magnitud (cabe destacar que, probablemente, los participantes en la fase final son estudiantes de una supuesta buena competencia matemática). Por tanto, sería deseable prestar una adecuada atención al trabajo aritmético en los primeros cursos de secundaria no dando por supuesto que los estudiantes tienen completamente adquirida esta componente del sentido numérico.

Referencias bibliográficas

Beltrán-Pellicer, P., y S. Martínez-Juste (2021a), «La resolución de problemas, mucho más que un eslogan», *Entorno Abierto* 42, 13-16.

— (2021b), «Enseñar a través de la resolución de problemas», *Suma* 98, 11-21.

Martínez-Juste, S. (2022), *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria* [Tesis Doctoral], Universidad de Valladolid, Valladolid.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén (2018), «¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa?», en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Libro de actas, CB-721, 121-129.

— (2019), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Marzo de 2022
ISSN: 2386-8821e