NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 109, noviembre de 2021, páginas 89-109

Imagen del concepto de pendiente evocado por profesores del bachillerato

Gerardo Salgado Beltrán
Crisólogo Dolores Flores
(Universidad Autónoma de Guerrero. México)

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2021
Fecha de aceptación: 20 de julio de 2021

Resumen En este escrito se reportan las conceptualizaciones de la pendiente que integran la imagen del concepto evocado por diez profesores de matemáticas mexicanos del bachillerato (grado 10 al 12). Para la recolección de datos se utilizó una entrevista basada en tareas y su análisis se centró en la identificación de frases y procedimientos claves referentes a las once conceptualizaciones reportadas sobre el concepto de pendiente. Se encontró que la imagen del concepto de la pendiente en los profesores varió de siete a once conceptualizaciones, las más comunes son: razón algebraica y propiedad física. Seguidas con menor énfasis por: indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico, conceptualización trigonométrica, razón geométrica, propiedad determinante, conceptualización de cálculo, situación mundo real, constante lineal y propiedad funcional.

Palabras clave Imagen del concepto evocada, Pendiente, Conceptualización, Entrevista Basada en Tareas, Profesores.

Title **Image of the concept of slope evoked by high school teachers**

Abstract This paper reports the conceptualizations of the slope that integrate the image of the concept evoked by ten Mexican high school mathematics teachers (grade 10 to 12). A task-based interview was used for data collection and its respective analysis was focused on the identification of key phrases and procedures that refer to some of the eleven conceptualizations reported about the concept of slope. It was found that the image of the concept of slope in teachers varied from seven to eleven conceptualizations, the most common being: algebraic ratio and physical property. Followed with less emphasis by: behavior indicator, parametric coefficient, trigonometric conceptualization, geometric ratio, determining property, calculation conceptualization, real world situation, linear constant and functional property.

Keywords Image of the concept evoked, Slope, Conceptualization, Task Based Interview, Teachers.

1. Introducción

Quienes estamos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, reconocemos que la práctica del profesor incide directamente en el aprendizaje de los estudiantes (Byerley y Thompson, 2017; Guzmán y Kieran, 2013; Nagle y Moore-Russo, 2013; Salgado, 2020; Stump, 2001b). Uno de los retos más importantes a los cuales se enfrentan los profesores es posibilitar que sus estudiantes tengan la oportunidad de relacionar y conectar las diversas representaciones y nociones de los conceptos desarrollados a lo largo del currículo de matemáticas (Stump, 1999; Tall y Vinner, 1981). Por tanto, el conocimiento del profesor es base fundamental y juega un rol importante en la naturaleza y el desarrollo de la práctica docente (Adler, 2000; Gueudet y Trouche, 2009, 2010).

Este estudio se centra en el conocimiento del profesor acerca del concepto de la pendiente, el cual es importante en la educación matemática, ya que es indispensable para comprender y describir el comportamiento de las funciones (Teuscher y Reys, 2010). El comprender la pendiente permite interpretar funciones no lineales y conceptos como la derivada en Cálculo (Stanton y Moore-Russo, 2012), más aún es fundamental para desarrollar un pensamiento matemático avanzado (Carlson et al., 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble et al., 2001). El comprender el concepto de la pendiente no es tarea fácil ya que va más allá de sólo considerarlo como un cálculo algebraico relacionado a la inclinación de una recta, puesto que se puede representar y conceptualizar en diversos contextos (Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Stanton y Moore-Russo, 2012; Stump, 1999, 2001a).

El concepto de pendiente es útil porque contribuye a la comprensión de fenómenos de la vida real, las conceptualizaciones descubiertas hasta ahora por los investigadores incluyen representaciones de la pendiente en el mundo real, las cuales existen en dos formas diferentes: Situaciones Físicas, como caminos de montaña, rampas de esquí y rampas para sillas de ruedas; y Situaciones Funcionales, como la distancia en función del tiempo, entre otros (Stump, 2001a). Diversas investigaciones han reportado que los profesores de matemáticas tienen dificultades con respecto a la pendiente (e.g., Nagle et al., 2013; Stump, 2001a; Walter y Gerson, 2007; entre otros). Por ejemplo, interpretar la pendiente negativa, reconocerla como una relación multiplicativa y relacionarla con la razón de cambio (Byerley y Thompson, 2017; Teuscher y Reys, 2010) y más aún reconocerla como una medida (Salgado, 2020). Para Stump (1999, 2001a, 2001b) y Walter y Gerson (2007), las dificultades pueden deberse a los diversos significados cotidianos que el profesor asocia con la palabra pendiente: inclinación, declive, empinada, acostada, entre otros. Por su parte, Zaslavsky et al. (2002) las atribuye a las inconsistencias que en ocasiones algunos libros de texto introducen respecto al estudio de este concepto; por ejemplo, encontraron libros de texto en los cuales los autores definían la pendiente como el cociente de dividir cambio en y entre cambio en x y la interpretaban, de manera geométrica, como el ángulo de inclinación de la recta.

Algunos investigadores, principalmente norteamericanos y mexicanos, han estudiado la pendiente en el plano curricular (Dolores-Flores et al., 2020; Nagle y Moore Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo 2012), otros han reportado las dificultades que manifiestan los estudiantes de diferentes niveles educativos al resolver tareas que la involucran (e.g., Carlson et al., 2010; Teuscher y Reys, 2010). Así mismo se han investigado las conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes y profesores (e.g., Rivera et al., 2019; Stump, 1999, 2001a; Moore-Russo et al., 2011).

En México, el estudio de las conceptualizaciones de la pendiente es reciente. La mayoría de los trabajos de investigación se han centrado en estudiar la razón de cambio en estudiantes (Dolores et al., 2002; Dolores et al., 2017; Dolores-Flores et al., 2018). Otros han reportado que en los libros de texto del bachillerato las ideas geométricas y variacionales de la pendiente están desconectadas (Martínez, 2005). Por su parte, Salgado (2020) señala que en México existen profesores que imparten clases en dicho nivel que no cuentan con el perfil para gestionar con éxito la enseñanza de la matemática y se limitan a enseñar contenidos como lo sugiere un libro de texto, incluido el grado de profundidad que estos presentan. Al respecto, Dolores-Flores et al. (2018) señalan que en la enseñanza y aprendizaje de la pendiente se prioriza lo procedimental y el desarrollo de nociones conceptuales queda relegado a un segundo plano, tal como lo afirman Lingefjärd y Farahani (2017). En este sentido, Páez (2015) señala que en profesores mexicanos existe una limitada comprensión acerca de la razón de cambio y su vínculo con la pendiente. Para Tall y Vinner (1981) el conocimiento que posee el profesor está directamente relacionado con sus imágenes conceptuales, y este influye en la comprensión de sus estudiantes (Byerley y Thompson, 2017). Por tanto, lo reportado por Dolores et al. (2018) y Páez (2015) aportan elementos para hipotetizar que en México se favorece la formación de imágenes conceptuales restringidas en los estudiantes que puede conducirlos a conflictos cognitivos (Tall y Vinner, 1981), sin embargo, esto requiere de estudios que den evidencia de ello y se centren en la imagen conceptual de los profesores acerca de la pendiente.

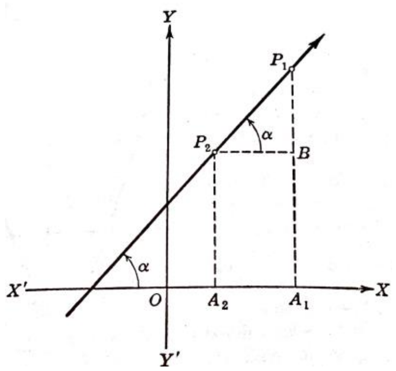
De acuerdo con la problemática expuesta, esta investigación se adhiere a la línea marcada por Nagle y Moore-Russo (2013) quienes señalan la necesidad de indagar acerca de las imágenes conceptuales de la pendiente que profesores del bachillerato manifiestan al resolver tareas que involucran dicho concepto. Asimismo, se ha encontrado que en México la investigación centrada en el conocimiento de la pendiente en profesores del bachillerato ha sido escasamente explorado. Por tal motivo nos hemos planteado responder como pregunta de investigación ¿Qué conceptualizaciones de la pendiente forman parte de la imagen conceptual que evocan profesores de matemáticas del bachillerato al resolver tareas que involucran dicho concepto? Y para responder asumimos como objetivo identificar las conceptualizaciones de pendiente que aparecen cuando los profesores resuelven las tareas que involucran dicho concepto.

2. Marco Conceptual

Los elementos referenciales de este estudio son: la definición de pendiente y los constructos conceptualización de pendiente e imagen del concepto evocado, los cuales son la base fundamental para el diseño de la investigación y guía para interpretar los resultados. Estos serán abordados en las siguientes líneas a partir de la literatura especializada en Matemática Educativa.

2.1. ¿Qué es la pendiente?

La pendiente es definida por Lehman (1980) como coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación (ver Figura 1):



"The slope is often denoted by the letter m therefore, we can write $m = tg\,\alpha$. If $P_1\,(x_1, y_1)$ and $P_2\,(x_2, y_2)$ are two different points in a straight line, the slope of the line is: $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$ " (p. 17).

Figura 1. Imagen tomada de Lehman (1980, p. 17).

En términos numéricos la pendiente se representa a través de una razón, la cual puede interpretarse de dos formas diferentes: como la razón que hace referencia a una medida de la inclinación de la recta y, como noción variacional, a la razón de cambio, la cual representa la variación de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares, en referencia a las funciones cuya naturaleza está ligada a la covariación (Lobato y Thanheiser, 2002; Reyes-Gasperini, 2013; Stewart, 2012; Thompson y Carlson, 2017). En este sentido, la pendiente puede interpretarse como la forma más básica de la razón de cambio. Dicha conexión contribuye a que ambos conceptos puedan representarse con el mismo modelo matemático $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (Stanton y Moore-Russo, 2012).

2.2. Conceptualización de pendiente

La conceptualización es parte del proceso cognitivo del ser humano que está asociado a la representación de una idea abstracta, que surge a partir de los conocimientos que se tienen sobre uno o diversos temas y que por algún motivo se buscan representar (D'Amore, 2011). Para Vergnaud (1996) el desarrollo cognitivo de una persona se da a través de la conceptualización, la cual permite el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales integrados por conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones (Vergnaud, 2013). En este sentido, la conceptualización se inicia desde etapas muy tempranas y la enseñanza juega un papel irremplazable (Otero et al., 2014).

Al respecto, Otero et al. (2014) señala que la conceptualización puede describirse a través de dos aspectos: uno inmediato y otro mediato. El primero, refiere a la actividad del sujeto en acción y el segundo con el desarrollo de esquemas que permiten dominar un cierto campo conceptual el cual se produce a largo plazo, cuando el sujeto es expuesto a una gama de situaciones de cierta clase, durante un tiempo prolongado de la vida, que incluso pueden ser años. De este modo, en esta investigación nos centramos en el aspecto inmediato de una conceptualización. Por lo cual, entenderemos a una conceptualización de pendiente como una representación específica del concepto, necesariamente materializada a través del lenguaje verbal (oral, escrito e icónico) o no verbal (kinestésico). Esta representación tiene la facultad de hacer presente el concepto y los procedimientos matemáticos, con los cuales cada sujeto aborda e interactúa con el conocimiento matemático, es decir, registra y comunica su conocimiento sobre pendiente (Hoffman, 2015; Rivera et al., 2019; Stump, 1999, 2001a, 2001b). Por tanto, al hablar de una representación específica de pendiente nos referimos a una de las once conceptualizaciones reportadas por Moore-Russo et al. (2011), las cuales se describen en la Tabla 1.

2.3. Imagen del concepto evocado

Para Tall y Vinner (1981) el funcionamiento del cerebro humano a menudo se contrapone con la lógica de las matemáticas, ya que no siempre es la lógica pura lo que proporciona una visión sobre un objeto matemático, ni es la casualidad la que hace que las personas cometan errores. A menudo, se desconoce la definición formal de la mayoría de los conceptos que las personas utilizan, sin embargo, se aprende a reconocerlos por la experiencia y el uso en contextos apropiados (Tall y Vinner, 1981, p. 251). Posteriormente estos conceptos pueden refinarse en su significado e interpretarse con creciente sutileza con o sin el lujo de una definición precisa (Tall y Vinner, 1981, p. 251). Usualmente en este proceso se le da al concepto un símbolo o nombre que le permite comunicarse y ayuda en su manipulación mental, pero la estructura cognitiva total que colorea el significado del concepto es mucho mayor que la evocación de un solo símbolo, es más que cualquier imagen mental, ya sea pictórica, simbólica o de otro tipo (Tall y Vinner, 1981, p. 251). Durante los procesos mentales de recordar y manipular un concepto, muchos procesos asociados se ponen en juego, afectando conscientemente e inconscientemente el significado y el uso (Tall y Vinner, 1981, p. 252).

CONCEPTUALI-ZACIÓN	DESCRIPCIÓN	CÓDIGO
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x, razón con la expresión algebraica $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.	A
Razón Geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. En términos de movimiento se refiere al vertical sobre el horizontal en el gráfico de una recta.	G
Propiedad Funcional	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en representaciones múltiples, incluyendo tablas y descripciones verbales (por ejemplo, cuando x incrementa en 2, y incrementa en 3).	F
Situación Mundo Real	Situación física (estática, por ejemplo: una rampa, escalera, techos, calles, etc.) o situación funcional (dinámica, por ejemplo: distancia en función del tiempo, volumen en función del tiempo, etc.)	R
Indicador de Comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (−), tendencia horizontal de la línea (0). Si es cero, la recta es paralela al eje x con la posibilidad de no intersectar a dicho eje. Si no es cero, se asegura la intersección con los ejes coordenados.	B
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc.	P
Coeficiente Paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$	PC
Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo de una recta que forma con una recta horizontal; tangente del ángulo de inclinación.	T
En Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o como razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).	C
Propiedad Determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; además de determinar una recta si se da un punto.	D
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las rectas; pendiente de la recta que no es afectada por la traslación de esta. Es una propiedad constante en la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente.	L

Tabla 1. Conceptualizaciones de la pendiente. Adaptada de Nagle y Moore-Russo (2014) «Traducción propia».

Siguiendo esta línea Tall y Vinner (1981) definen la imagen del concepto como la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados, la cual se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y madura, a medida que se desarrolla no es necesario que sea coherente en todo momento. De este modo todos los atributos mentales asociados con un concepto, ya sean conscientes o inconscientes, deben ser incluidos en la imagen conceptual, ya que pueden contener las semillas del conflicto futuro (Tall y Vinner, 1981). Sin embargo, para efectos de esta investigación no se estudia la totalidad de la imagen conceptual de la pendiente, sino una parte específica, aquella que se activa en un momento determinado cuando un sujeto discute o resuelve tareas que involucran el concepto de pendiente, la cual es llamada imagen del concepto evocado, en el cual, se explora qué conceptualizaciones de la pendiente están presentes en los razonamientos de los profesores cuando resuelven tareas.

3. Metodología

3.1. Participantes

Este estudio es cualitativo y exploratorio en el mismo sentido que Hernández, Fernández y Baptista (2010). Para la realización, participaron de forma voluntaria 10 profesores de matemáticas en servicio del bachillerato (8 hombres y 2 mujeres), los cuales, se encontraban impartiendo en una etapa final el curso de Geometría Analítica y habían culminado el trabajo con la pendiente (SEP, 2013). Los profesores provenían de 10 instituciones educativas diferentes, ubicadas principalmente en la región centro del Estado de Guerrero, México. La totalidad manifestó que su formación universitaria fue la de Licenciado en Matemáticas área Matemática Educativa. A este respecto, cabe mencionar que esta última fue una característica que no había sido considerada para esta investigación, dado que, no necesariamente los profesores de matemáticas en activo llegan a tener dicho perfil y, sin embargo, la ejercen por su formación a fin (por ejemplo, contadores, ingenieros, entre otros).

3.2. Instrumentos para la recolección de los datos

Para el logro del objetivo planteado en esta investigación se diseñó y aplicó una Entrevista Basada en Tareas en el sentido de Goldin (2000). La elección de esta metodología se debe a que combina dos recursos: la entrevista y un instrumento (Goldin, 2000). Con la entrevista, se puede conseguir la verbalización de los procesos de pensamiento que tiene un individuo y, el instrumento (cuestionario, tareas, etc.) permite conocer los procedimientos e ideas que pone en acción dicho individuo al resolverlo.

Una entrevista basada en tareas es aquella en la que se requiere de una interacción mínima entre un sujeto (el que resuelve problemas) y un entrevistador (el que plantea o pregunta), donde el sujeto habla durante o inmediatamente después de resolver una tarea (preguntas, problemas o actividades) evidenciando así su conocimiento y razonamiento en la resolución de problemas (Koichu y Harel, 2007). Consideramos que esta metodología es adecuada porque permite observar cómo los participantes ponen en juego sus ideas matemáticas. Además, esto nos permite hacer inferencias sobre el posible significado matemático que se les atribuyen (Goldin, 1997); también, da oportunidad de averiguar el conocimiento conceptual de los participantes, así como de ampliar su entendimiento (Assad, 2015). Para nuestro estudio, la entrevista basada en tareas sirve para recolectar los datos y tener la información necesaria para explorar las conceptualizaciones de pendiente que cada profesor tiene y pone en práctica al resolver cada una de las tareas.

3.3. Diseño del prototipo de la entrevista

Las tareas planteadas a los profesores son el resultado del trabajo colaborativo entre los autores de esta investigación. Se diseñaron sobre la base de los siguientes criterios, primero, se consideraron los resultados de diversas investigaciones tales como Mudaly y Moore-Russo (2011), Nagle et al. (2013) y Stump (1999, 2001a), con la finalidad de adaptar tareas consistentes con los objetivos de este estudio. Segundo, dar la oportunidad de evidenciar libremente procedimientos, estrategias, representaciones o argumentaciones en el proceso de resolución de las tareas. Tercero, que fueran asequibles con el conocimiento requerido en el nivel que incide, y por último, que posibilitan el uso de diversos registros de representación, por ejemplo, el verbal, el analítico, el gráfico, etcétera.

Para ganar confiabilidad en redacción, asequibilidad y correspondencia con los objetivos del estudio, se hizo una aplicación piloto del instrumento a cinco profesores de matemáticas en formación y a dos profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. Para ello, se utilizó una entrevista basada en tareas, la cual estuvo a cargo del autor de esta investigación, misma que fue videograbada para su posterior análisis. El pilotaje fue importante para rediseñar las tareas que integran el protocolo final empleado para este estudio, el cual se conformó por doce tareas de las cuales dos son adaptaciones de Byerley y Thompson (2017) y Hoffman (2015) respectivamente. El resto, fueron diseñadas por los autores de la investigación (ver Anexo).

3.4. Recolección de los datos

Los datos fueron recolectados en los meses: noviembre, diciembre, abril y mayo del 2018 y 2019. Esto se debe a que el estudio de la Geometría Analítica en algunas escuelas se imparte en semestre par y en otras impar. Para ello, se acudió a las instalaciones de los centros de trabajo de cada participante. Cada entrevista fue videograbada y realizada de manera individual por el autor de este estudio, con la finalidad de captar evidencia de lenguaje verbal (oral, escrito e icónico) y no verbal (kinestésico). Cada una tuvo una duración entre 60 a 90 minutos. Esta giró en torno al protocolo y preguntas auxiliares básicas para todas las tareas (*¿por qué lo hiciste así*?, *¿conoces otra vía de solución*?, *¿a qué te refieres con este término*?, *¿por qué utilizaste esa fórmula*?) y otras específicas, que permitieron conocer a detalle su razonamiento y conocimiento sobre pendiente, debido a que fueron planteadas cuando el participante expresaba una idea confusa o cuando carecía de argumentos su forma de proceder o para activar diferentes vías de solución que éste pudiera conocer.

3.5. Análisis de los datos

Para el análisis de los datos, se utilizaron las descripciones de las conceptualizaciones de pendiente señaladas en la Tabla 1. Cada entrevista fue transcrita en el procesador de texto (Microsoft Word) y sus producciones escritas digitalizadas con la finalidad de reunir evidencia verbal y no verbal de cada participante, estas evidencias fueron objeto de análisis. Para registrar el análisis individual, se diseñó una tabla conformada por 15 filas y 13 columnas (ver Tabla 2). En ella, se registró con una **X** la conceptualización identificada en cada tarea.

<table>
<tr><th>Profesor 1</th><th colspan="12">Conceptualizaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tareas (T_n)</td><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">G</td><td rowspan="2">F</td><td colspan="2">R</td><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">P</td><td rowspan="2">PC</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">D</td><td rowspan="2">L</td></tr>
<tr><td>RP</td><td>RF</td></tr>
<tr><td>T_1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>T_{12}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 2. Ejemplo de la tabla empleada para el registro del análisis de los datos por profesor. Elaboración propia.

Cada investigador revisó y contrastó la evidencia digitalizada y las transcripciones de las entrevistas, a fin de identificar frases, palabras o procedimientos clave empleados por los profesores en cada tarea. De este modo, se establecieron códigos asociados a la descripción de cada conceptualización de pendiente presente en las producciones de los profesores. Para decidir qué conceptualizaciones de pendiente exteriorizaron los profesores, la triangulación por investigadores fue crucial. En caso de algún desacuerdo, se discutieron las posturas hasta llegar a un consenso y así decidir el tipo de conceptualización presente en algún fragmento de su respuesta o en su totalidad. Esto incrementó la confiabilidad de los resultados y su validez, eliminando así el sesgo de un único investigador.

A continuación, mostramos como ejemplo la producción y un extracto de la entrevista realizada a la profesora Aracely al resolver la tarea 9, en el cual haremos explícitos los procesos metodológicos empleados en el estudio. La primera fase del análisis fue la familiarización con los datos, se revisó la producción escrita de la profesora (ver Figura 2) y se leyó la transcripción de la entrevista que se le realizó. Al contrastar las producciones, se identificaron las conceptualizaciones: *constante lineal*, *razón algebraica* y *trigonométrica*. A continuación, mostramos un extracto de la entrevista realizada a la profesora Aracely donde se identifican las conceptualizaciones.

Entrevistador: Propón un argumento para convencerlo.
Aracely: Bueno, lo que yo considero es que para que los puntos C y D estén en la prolongación del segmento AB. Cuando calculemos la pendiente de CD esta debe ser la misma que la de AB.
Entrevistador: ¿Por qué las pendientes deben ser iguales?
Aracely: Porque es una condición que deben cumplir los puntos que están en una misma recta. De hecho, con cualquier pareja de puntos de una recta se debe cumplir que la pendiente sea la misma.
Entrevistador: Y en este caso ¿se cumple?
Aracely: Sí, yo podría calcular la pendiente del segmento AB [escribe Tan 45º=1] *ya que cuarenta y cinco grados es su ángulo de inclinación, luego si determinamos la pendiente del segmento BC con la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ [sustituye las coordenadas de los puntos B y C] *y nos da 1. Por lo tanto, sí están sobre la prolongación.*
Entrevistador: ¿Por qué lo hiciste así?
Aracely: Porque recuerdo que la pendiente de una recta se puede calcular con la tangente del ángulo de inclinación y aquí nos dicen que es de cuarenta y cinco, y también se calcula con la fórmula que apliqué aquí [señala sus procedimientos en la hoja].

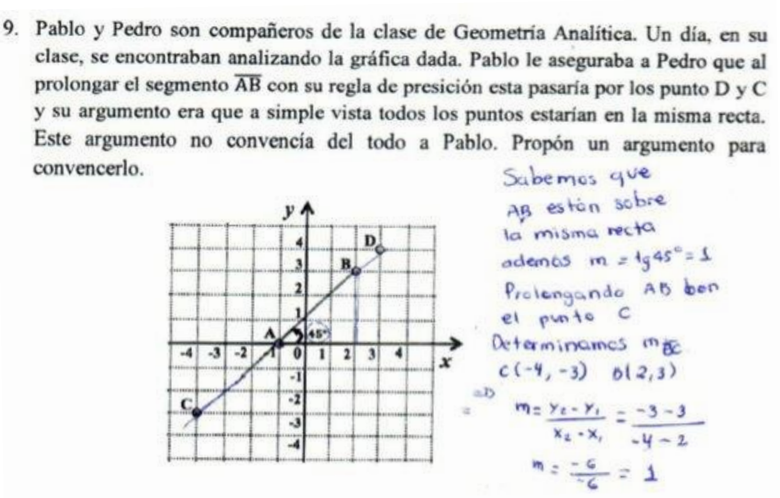


Figura 2. Producciones de la profesora Aracely en la Tarea 9. Elaboración propia.

Las frases y procedimientos clave (resaltadas en cursiva en el extracto) identificados son: *con cualquier pareja de puntos de una recta la pendiente es la misma*, *la pendiente del segmento AB es* $tg\ 45°$ y *la pendiente se puede determinar con la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Estas frases se utilizaron para definir los códigos L_1, T_1 y A_1, que a su vez están vinculados a las conceptualizaciones L, T y A respectivamente (ver Tabla 3).

4. Resultados

Del análisis realizado a las producciones individuales de los profesores, se determinaron los códigos asociados a la descripción de cada conceptualización identificada en *frases*, *palabras* o *procedimientos clave* utilizados para resolver las tareas del protocolo. La Tabla 3 muestra la codificación asignada y la frecuencia de aparición de cada conceptualización.

La Tabla 4 muestra en códigos las conceptualizaciones de pendiente, identificadas en los procedimientos y argumentos empleados por cada profesor en la resolución de las tareas que integraron el protocolo de la entrevista utilizada en este estudio.

Las conceptualizaciones de pendiente que integran la imagen del concepto evocado por los profesores al resolver las tareas variaron de siete a once. Las más recurrentes fueron: *razón algebraica* y *propiedad física*. Seguidas, con menor énfasis por: *indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico, conceptualización trigonométrica, razón geométrica, propiedad determinante, conceptualización de cálculo, situación mundo real, constante lineal* y *propiedad funcional.*

Razón algebraica. Esta conceptualización fue evidenciada por la totalidad de los participantes, de los cuales, durante las entrevistas ocho señalaron que las diversas experiencias en las que han trabajado con el concepto (por ejemplo, durante su formación, su práctica, etc.), ha prevalecido el uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ como referente principal, lo cual fue reflejado en los resultados de este estudio que muestra predominio de dicha conceptualización, debido a que en nueve tareas utilizaron la fórmula como argumento principal o colateral. A continuación, se muestra una evidencia identificada en el extracto de la entrevista realizada al profesor Noé en la resolución de la Tarea 6.

Entrevistador: Obtenga la derivada de la función $f(x)$ en $x = 1$.
Noé: Sabemos que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto y como ya tengo la recta dada, entonces tomo dos puntos y aplico la fórmula de la pendiente [escribe la fórmula $\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}$ y sustituye con los puntos (1,1) y (2,3)], *entonces la pendiente es dos.*
Entrevistador: ¿Conoces otra forma de encontrar la derivada?
Noé: Sí, pero tendría que conocer la fórmula de la función, y aquí no me la dan.
Entrevistador: ¿Sin la fórmula de la función no la puedes obtener?
Noé: No, pero por la gráfica fácilmente se puede ver que su fórmula es $f(x) = x^2$, la derivo y sustituyo el valor de 1.
Entrevistador: ¿Por qué consideraste como primera opción el uso de la fórmula algebraica?
Noé: Bueno, yo creo que por lo familiar que me resulta hacerlo, porque por lo regular en los libros siempre se plantea ejercitarla, incluso recuerdo que cuando era estudiante mi profesor de preparatoria nos ponía muchos ejercicios para no olvidarla.
Entrevistador: Pero explícitamente se te preguntaba sobre la derivada.
Noé: Pero al ver la recta, pensé en encontrar dos puntos por donde pasa y es que no

me dan la fórmula de la función.
Entrevistador: En caso de que hubieras conocido la fórmula, ¿qué habrías hecho?
Noé: Directo lo resuelvo con las reglas de derivación.

Conceptualización/ Códigos	**Descripción de los códigos específicos**	**Fre-cuencia**
Razón Algebraica **A**	A_1: Utiliza la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos en el plano. A_2: Cuantifica y utiliza los cambios Δx y Δy para obtener la pendiente. A_3: Cociente obtenido al dividir la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo construido bajo una recta u objeto físico como escalera o rampa.	49
Propiedad Física **P**	P_1: Describe la pendiente en términos de inclinación de la recta. P_2: Emplea algún brazo o algún objeto (lápiz, regla, cuaderno, etc.) para simular la inclinación. P_3: Compara pendientes a través del ángulo de inclinación de las rectas. P_4: La pendiente es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas.	40
Indicador de Comportamiento **B**	B_1: Si la pendiente es positiva la recta es creciente y si es negativa entonces es decreciente. B_2: La pendiente es cero si la recta es horizontal	31
Coeficiente Paramétrico **PC**	PC_1: El valor numérico de la pendiente está dado por el número que acompaña la *x* en la ecuación $y = mx + b$.	25
Trigonométrica **T**	T_1: La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.	23
Razón Geométrica **G**	G_1: Representa la pendiente de la recta a través de aumento en y cuando *x* aumenta su valor en 1. G_2: Representa la pendiente de la recta a través de desplazamientos verticales y horizontales.	21
Propiedad Determinante **D**	D_1: Rectas paralelas tienen la misma pendiente. D_2: Rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y de signo contrario [su producto es -1].	18
Cálculo **C**	C_1: La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.	16
Situación Mundo Real. Física **RP** Funcional **RF**	RP_1: La pendiente se vincula a rampas, escaleras, calles, cerros, techos, surcos, etc. RF_1: La pendiente vinculada a situaciones funcionales en la que la razón de cambio es constante. Por ejemplo, velocidad de un automóvil, llenado de un recipiente, costos, etc.	14
Constante Lineal **L**	L_1: Dada la gráfica de una recta se puede tomar cualquier pareja de puntos y la pendiente será la misma.	12
Propiedad Funcional **F**	F_1: La pendiente es la razón de cambio constante.	4

Tabla 3. Conceptualizaciones encontradas en los profesores. Códigos: X_n: X= conceptualización, n = acción específica de X. Elaboración propia.

Profesor	Tareas											
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
Simón	A_3 T_1	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	C_1	P_2 A_3	C_1	B_1 B_2 PC_1	G_2 F_1	L_1	P_3	T_1 C_1	RP_1 P_1
Mario	A_1 A_2 T_1	PC_1 D_1 D_2		PC_1 C_1	A_2	A_2 C_1	B_1 B_2 PC_1	G_1 G_2 PC_1	A_2 G_1 T_1 L_1	A_2 G_1 G_2	A_1 F_1 G_2 L_1	RF_1
Ulises	T_1	PC_1 D_1 D_2		L_1 T_1	A_3	C_1	B_1 B_2 PC_1	G_2 T_1	A_2 G_2 L_1	T_1 P_3	P_1 R_{P1} P_4	RP_1
Noé	A_3 P_4 T_1	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	C_1	A_3 T_1	A_1 C_1	B_1 B_2 PC_1	G_2 L_1	PC_1 T_1	P_3	P_4	RP_1
Salvador	A_1 A_2 T_1	PC_1 D_1	B_1 B_2	C_1	A_2 P_1 P_2 P_3	A_2 C_1	B_1 PC_1	G_2 D_1	A_1 A_2 G_2 L_1	P_2 P_3	P_1 P_3	RP_1
Diana	A_1 A_2 P_3	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	A_2	P_2 A_3	A_2	B_1 B_2 PC_1	A_2 G_2 P_1 P_2 P_3	A_2 G_2 T_1 L_1	P_3	A_2 P_1	RP_1
Aracely	T_1	PC_1 D_1	B_1 B_2	C_1	A_3 P_2 T_1	A_1 PC_1 C_1	B_1 B_2 PC_1	A_1 G_2 L_1	A_1 T_1 L_1	P_2 P_3 T_1	F_1	RF_1RP_1
Roberto	A_1 A_3 T_1	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	A_1	A_3		B_1 PC_1	A_2 P_1	PC_1	P_3	A_1 T_1 P_3 P_4	RP_1
José	A_2 T_1	PC_1 D_1 D_2		C_1	A_3	A_1 C_1	B_1 B_2 PC_1	A_2 G_1	A_1 L_1	P_1 P_3 G_2	F_1 P_1	RF_1RP_1
José Antonio	A_3 P_1 P_4 T_1 B_2	PC_1 D_1	P_2	C_1	A_1 A_2 RP_1	G_2 C_1	B_1 PC_1 P_2	G_1 G_2	A_2 G_2 L_1	P_1 T_1B_2	A_1 A_3 P_1 P_2 T_1	RP_1

Tabla 4. Códigos asignados: X_n: X= conceptualización, n = acción específica de X. Elaboración propia.

Propiedad Física. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en ocho tareas que integran el protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización se manifestó cuando los participantes describieron “la pendiente en términos de la inclinación de la recta”; “al emplear algún movimiento kinestésico (con la mano) o algún objeto (por ejemplo, lápiz, regla, cuaderno, etc.) para simular la inclinación”, tal es el caso de Salvador y Diana (ver Figura 3), asimismo para simular la inclinación de una recta, escalera o rampa; “al comparar las pendientes a través del ángulo de inclinación de las rectas”, por ejemplo, cuando compararon las pendientes de dos rectas situadas en su respectivo plano cartesiano no graduado, la mayoría de los profesores mostró un enfoque visual cuando resolvió la tarea, ya que se centraron en utilizar el ángulo de inclinación de las rectas al responder; al interpretar “la pendiente como el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas”, cuatro profesores manifestaron confusión entre la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación. Solo los profesores Diana y Mario señalaron la necesidad de conocer una graduación de los ejes coordenados para tomar una decisión, lo cual da cuenta de una postura con más elementos conceptuales que visuales.

Figura 3. Movimientos kinestésicos empleados por dos profesores para describir la inclinación. Elaboración propia.

Indicador de comportamiento. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en tres tareas que integran el protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización se manifestó cuando los participantes utilizaron “el signo de la pendiente para describir el comportamiento de una recta a partir de su gráfica”, la Figura 4 proporciona evidencia de la conceptualización en la producción de Aracely para la tarea 3 y de Mario para la tarea 7. Sin embargo, algunos profesores como José, Diana y Simón fueron más proclives a visualizar el dibujo de la gráfica propuesta en la tarea 3, para responder que la pendiente es positiva en la porción de la gráfica que sube, negativa en la que baja y cero en la que no hay variación.

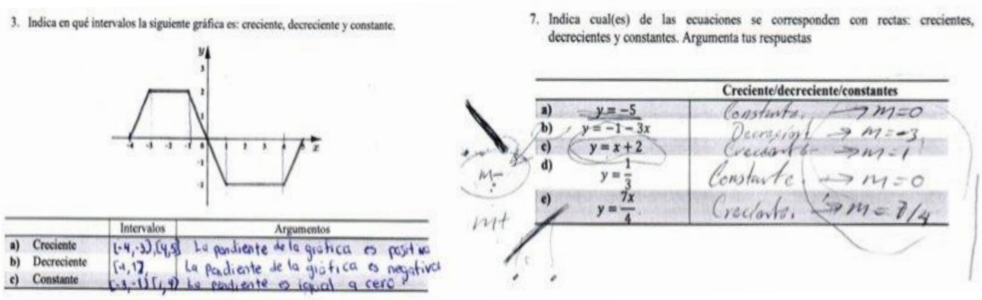


Figura 4. Evidencia de la conceptualización indicador de comportamiento. Elaboración propia.

Coeficiente paramétrico. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en seis tareas que integran el protocolo de la entrevista. A este respecto, la totalidad de los participantes manifestaron dicha conceptualización al asociar “el valor numérico de la pendiente con el valor de m en la ecuación $y = mx + b$ ”.

Conceptualización Trigonométrica. Evidenciada por todos los participantes, pero con menor énfasis a las anteriores, dicha conceptualización fue utilizada en seis tareas del protocolo, al señalar que “la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación” y utilizarla para obtener el valor numérico de la misma.

Razón geométrica. Evidenciada por nueve de los participantes, dicha conceptualización fue identificada en las respuestas y procedimientos que los profesores realizaron en cinco de las tareas propuestas. Esta fue externada cuando representaron el valor numérico de la pendiente de una recta, a través de desplazamientos verticales y horizontales, los cuales fueron empleados para la graficación de la misma.

Propiedad determinante. Con una frecuencia de aparición menor respecto a las anteriores, esta conceptualización fue evidenciada por la totalidad de los participantes en, a lo más, dos tareas del protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización fue externada al utilizar, en la resolución de las tareas, los criterios: “dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales” o “dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario”. A este respecto, los participantes mostraron tener conocimiento de dichos criterios a excepción de los profesores Salvador, Aracely y José Antonio, quienes mostraron dificultades para utilizar el criterio de perpendicularidad en la tarea 2, argumentando que lo habían olvidado.

Conceptualización de cálculo. Con un enfoque procedimental, fue evidenciada por ocho de los profesores en tres de las tareas que integraron el protocolo de la entrevista. Esta fue evocada al vincular “la derivada de una función valorada en la abscisa de un punto en el plano con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto”. A este respecto, solo los profesores Roberto y Diana evidenciaron su desconocimiento.

Situación mundo real. Evidenciada por la totalidad de los profesores y con menor énfasis a las anteriores, esta conceptualización se materializó cuando vincularon “la pendiente con objetos físicos como rampas, escaleras, calles, techos, etc.” o “con situaciones funcionales en la que la razón de cambio es constante”. A este respecto, al pedirles que ejemplificaran la presencia de la pendiente en situaciones de su mundo circundante, sólo Mario, Aracely y José hicieron referencia a situaciones funcionales, el resto se centró en ejemplificar con situaciones físicas. Esto evidenció que la noción variacional del concepto de la pendiente no siempre es el vínculo inmediato que los profesores hacen con el concepto, pero sí en objetos estáticos.

Constante lineal. Evidenciada por nueve profesores, esta conceptualización fue empleada para responder a cuatro tareas del protocolo de la entrevista. Solo el profesor Roberto mostró su desconocimiento al no emplearla en sus procedimientos y respuestas emitidas en las tareas. Dicha conceptualización se identificó cuando señalaron y utilizaron que la pendiente de una recta es constante, sin importar la pareja de puntos que se tome en ella para calcularla.

Propiedad funcional. Evidenciada por cuatro profesores, esta conceptualización fue la menos evocada en la resolución de las tareas, lo cual demuestra que las ideas variacionales asociadas a la pendiente son las menos interiorizadas y comprendidas por la mayoría de los profesores. Dicha conceptualización fue evidenciada por los profesores Simón, Mario, Aracely y José, al señalar y utilizar que la pendiente es la razón de cambio constante.

Si bien este estudio se centró en la exploración de las conceptualizaciones de pendiente, también se obtuvieron resultados implicados en las diferentes interpretaciones que los profesores hacen de manera indistinta acerca del concepto, tales como: el ángulo de inclinación de la recta, la tangente del ángulo de inclinación, la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, la inclinación de la recta o un número. Esto aportó elementos para inferir la posible existencia de una confusión entre lo que es la pendiente y cómo se calcula, tal como se puede observar en el siguiente extracto tomado de la entrevista realizada al profesor José Antonio en la Tarea 1.

Entrevistador: ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?
José Antonio: Bueno, aquí vemos una recta inclinada y por definición la pendiente de

una recta se define como la inclinación que tiene esa recta, esa inclinación puede ser horizontal y su pendiente es cero [...] o vertical y su pendiente sería infinita. Bueno entonces la pendiente, pues aquí lo marca, es de 45º.
Entrevistador: ¿Entonces la pendiente es el ángulo?
José Antonio: Sí, pero también puede ser la tangente del ángulo.
Entrevistador: Entonces ¿El ángulo y su tangente son lo mismo?
José Antonio: Sí, porque también son un número. De hecho, la pendiente es tres entre tres, igual a uno.
Entrevistador: ¿Por qué es tres entre tres?
José Antonio: Porque la pendiente es el cociente de los catetos del triángulo.
Entrevistador: Entonces ¿la pendiente es el ángulo, un número, la tangente del ángulo y el cociente de los catetos del triángulo rectángulo?
José Antonio: Sí, son equivalentes.

La Figura 5 muestra las frecuencias de las conceptualizaciones exteriorizadas por los profesores al resolver las tareas, en ella se puede notar tres grupos creados a partir del rango en que se mueven las frecuencias de las 11 conceptualizaciones de la pendiente, este rango (49 – 3 = 46) se dividió en 3 partes, generando la siguiente clasificación: mayor predominancia cuya frecuencia oscila entre 34 y 49, regular predominancia entre 19 y 33 y finalmente los de menor predominancia entre 3 y 18. El de mayor predominancia incluye las conceptualizaciones *razón algebraica* y *propiedad física*, estas provienen directamente de la definición analítica de pendiente y de la fórmula algebraica para obtenerla (A), así como de las descripciones que se utilizan para describir una recta (P), las cuales incluyen términos como: inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc. En un segundo grupo están: *indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico, trigonométrica* y *la razón geométrica*. Estas parecen estar en el conocimiento de los profesores, sin embargo, no son tan utilizadas como las del primer grupo, quizá porque están más alejadas de la definición analítica y más cercanas a su interpretación geométrica (G), dos de ellas provienen de los procedimientos algebraicos implicados (PC y T) y la relacionada con el comportamiento (B), utilizada para describir funciones que crecen, decrecen o se mantienen constantes. Finalmente en el tercer grupo están las que escasamente utilizaron los profesores, entre ellas se encuentran: *indicador de comportamiento* (D) vinculada a los criterios de paralelismo y perpendicularidad en la geometría analítica, la *conceptualización en cálculo* (C) asociada al concepto de derivada, la de *constante lineal* implicada con las funciones que varían con razón constante y sus gráficas son rectas y no curvas, las relacionadas con su aplicación en mundo real (RP y RF) que implica vincular la pendiente a situaciones estáticas y funcionales y, la *propiedad funcional* (F) vinculada a múltiples representaciones de una razón de cambio constante entre dos variables, mismas que pueden ser tablas o descripciones verbales.

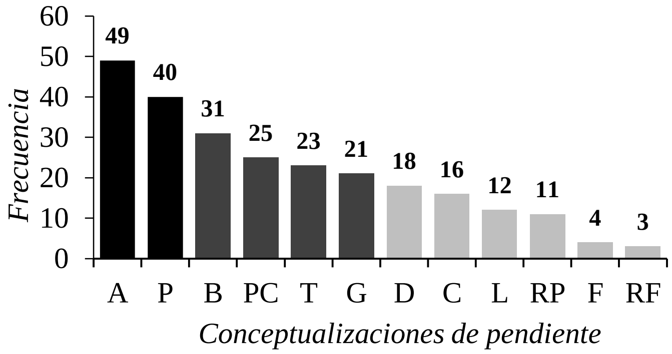


Figura 5. Conceptualizaciones utilizadas por los profesores en términos de sus frecuencias.

5. Discusión de resultados

De acuerdo con los resultados, existe predominio de la conceptualización *razón algebraica*, ya que la fórmula algebraica utilizada para calcular la pendiente es el vínculo inmediato que hacen los profesores con este concepto. Estos resultados son parcialmente similares a los obtenidos por Hoffman (2015) quien reportó que las conceptualizaciones de pendiente predominantes en profesores estadounidenses (de grado 6 a 8) son: *razón algebraica, razón geométrica* y *propiedad física*.

Lo anterior quizá se deba a dos razones. Primero, porque los profesores que participaron en este estudio trabajan en el bachillerato e incluso imparten cálculo y eso les obliga a ampliar más sus conocimientos. Segunda, porque en ambos casos, cuando se enseña la pendiente es inevitable llegar a utilizar la fórmula algebraica para calcularla e invariablemente esto se lleva al plano cartesiano para ayudar a la visualización y el significado geométrico de esa fórmula. Además, según Martínez (2005) los libros de texto cuando tratan la pendiente invariablemente lo hacen utilizando su representación algebraica y su representación geométrica. De este modo, el nivel educativo en el que se desempeñan los profesores y la influencia de los textos que utilizan pudiera estar condicionando sus conceptualizaciones.

Al pedirles una definición de pendiente, la mayoría de los profesores lo hace en términos de: medida de la inclinación, ángulo de inclinación de la recta o inclinación de la recta, en donde se nota el uso frecuente del término “inclinación” evidenciando con ello la conceptualización *propiedad física* y el escaso énfasis que dan a la pendiente como un concepto variacional, resultado similar a lo encontrado por Hoffman (2015) y en estudiantes de segundo del preuniversitario por Azcárate (1992). Estas investigaciones evidencian que sin importar las conceptualizaciones de pendiente que tienen los individuos, estos son más proclives a realizar interpretaciones visuales cuando la definen, ya que su primer contacto con la pendiente se da a través de la inclinación de objetos en su vida cotidiana (Cheng y Sabinin, 2008), y por tanto, esto permite a un individuo visualizar el concepto matemático de pendiente sin depender de alguna habilidad matemática, como usar una razón o calcular un límite (Hoffman, 2015).

La mayoría de los profesores consideran como equivalentes la pendiente y la inclinación de la recta (y no como atributos vinculados a una misma característica), resultado coincidente con lo encontrado en profesores de secundaria por Páez (2015). Al igual que Mudaly y Moore-Russo (2011) también identificamos que los profesores, Noé, Salvador, José Antonio y Ulises, asumen las frases pendiente igual a cero y no tiene pendiente como equivalentes. Lo cual sugiere la necesidad de profundizar en su conocimiento sobre la relación que establecen entre la pendiente y ángulo de inclinación de una recta, tal como lo advierten Zaslavsky et al. (2002) y Páez (2015).

Por otra parte, con base en los resultados del análisis de las producciones emitidas por los profesores, se identificó la conceptualización *situación mundo real* enfatizada en situaciones físicas al proporcionar ejemplos de su medio circundante utilizando objetos como: escaleras, rampas, calles, techos, etc. Mientras que, la pendiente vinculada a situaciones funcionales como razones o tasas de cambio se encontraron escasamente. Este resultado es similar a lo encontrado en Sudáfrica por Mudaly y Moore-Russo (2011) en profesores de grado 10 a 12, lo cual refuerza la hipótesis de que las ideas geométricas y variacionales de la pendiente son escasamente vinculadas por profesores de matemáticas (Dolores et al., 2018; Teuscher y Reys, 2010, 2012; Walter y Gerson, 2007).

Los resultados de esta investigación evidenciaron la utilización de diferentes conceptualizaciones de pendiente por los profesores. Sin embargo, en sus respuestas prevalecieron las que tienen un vínculo directo con la noción geométrica de pendiente (medida de la inclinación de una recta). Además, la evidencia verbal obtenida sugiere que el conocimiento de algunos profesores sobre la pendiente es predominantemente procedimental. Esto nos hace suponer que estos profesores pueden inducir a sus estudiantes a privilegiar este tipo de conocimiento, y por tanto generar una comprensión limitada del concepto de pendiente. Esta situación pone en manifiesto la necesidad de capacitar y actualizar a los profesores para que desarrollen una comprensión más amplia y profunda sobre este concepto. En este sentido, Byerley y Thompson (2017) y Copur-Gencturk (2015) señalan que los profesores que comprenden coherentemente un concepto matemático que enseñan, brindan mayores posibilidades a sus estudiantes a realizar una comprensión completa y conectada del concepto.

Bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205–224.

Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science*, (1), 17–26.

Azcarate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Épsilon*, *24*, 9–22.

Byerley, C., y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168–193.

Carlson, M., Oehrtman, M., y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113–145.

Cheng, D., y Sabinin, P. (2008). *Elementary students' conceptions of steepness.* En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (pp. 297–304), México: Cinvestav-UMSNH.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(3), 280–330.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, *11*(2), 150–164.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y García-García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369–389.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *120*(2), 104–115.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(3), 225–250.

Dolores, C., García, J., y Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*, *29*(2), 125–158.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*(1), 40–177.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199–218.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives* (pp. 57– 74). Lyon: Presses Universitaires de Rennes.

Guzmán, J., y Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: a resource-based analysis of teaching practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 163–190.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews*. Tesis Doctoral. Universidad de Carolina del Norte. Charlotte.

Koichu, B., y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 349–365.

Lehmann, C. H. (1980). *Geometría Analítica.* México, D. F.: Limusa.

Lingefjärd, T. y Farahani, D. (2017). The elusive slope. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *75*(1), 35–54.

Lobato, J., y Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 162–175). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Martínez, R. (2005). *La pendiente y su variación, un estudio didáctico y cognitivo*. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21.

Mudaly, V., y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education Programme. *Pythagoras*, *32*(1), 27–33.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2013). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(2), 1–18.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *Mathematics Educator*, *23*(2), 40–59.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., y Tierney, C. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 85–108.

Otero, M. R., Fanaro, M. D. L. Á., Sureda, P., Llanos, V. C., y Arlego, M. (2014). *La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física*. Buenos Aires: Dunken.

Páez, D. (2015). *Análisis de la práctica del profesor de Matemáticas en torno al concepto de pendiente: Énfasis en la reflexión durante y después de la acción* (Tesis Doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública.

Rivera, M. I., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1027–1046.

Salgado, G. (2020). *Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes* (Tesis Doctoral). Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

SEP (2013). *Matemáticas III.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion- academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf

Stanton, M., y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, *112*(5), 270–277.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México, D. F.: Cengage Learning.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207–227.

Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81–89.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and Steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, *3*(7), 519–524.

Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics, 112*(6), 359–376.

Thompson, P., y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas: Revista trimestral de educación comparada*, *4*(1), 195–207.

Vergnaud, G. (2013). Why the theory of conceptual fields? *Infancia y aprendizaje*, *36*(2), 131–161.

Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 203–233.

Zaslavsky, O., Sela, H., y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 119–140.

Gerardo Salgado Beltrán. Doctor en Ciencias en el Área de Matemática Educativa, Catedrático e Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas perteneciente a la Universidad Autónoma de Guerrero.
e-mail: gerardosalgadobeltran@yahoo.es

Crisólogo Dolores Flores. Doctor en Ciencias en el Área de Matemática Educativa, Catedrático e Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas perteneciente a la Universidad Autónoma de Guerrero.
e-mail: cdolores2@gmail.com

Anexo

Protocolo para la colecta de datos

Parte I. Datos Generales.

Objetivo: Conocer información personal de los participantes, así como experiencia como docente impartiendo los cursos de Geometría Analítica y/o Calculo Diferencial.

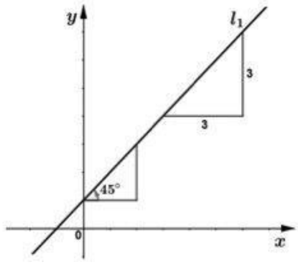
1. Nombre y edad
2. Institución donde labora
3. Grado máximo de estudios
4. Área o especialidad

5. Años de experiencia como docente de la matemática
6. ¿Ha impartido los cursos de Geometría Analítica y/o Cálculo? Indique cuántas veces.
7. Fecha y lugar de aplicación

Parte II. Tareas.

Objetivo: Identificar las conceptualizaciones de pendiente que aparecen cuando los profesores resuelven las tareas que involucran dicho concepto.

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

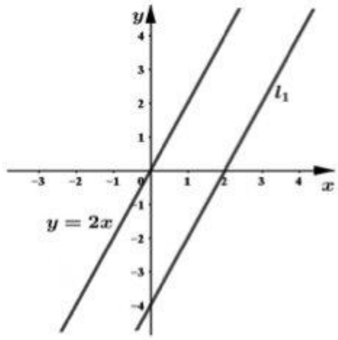


2. La recta $y = 2x$ es paralela a la recta l_1.

- ¿Cuál es la ecuación de la recta l_1?
- ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

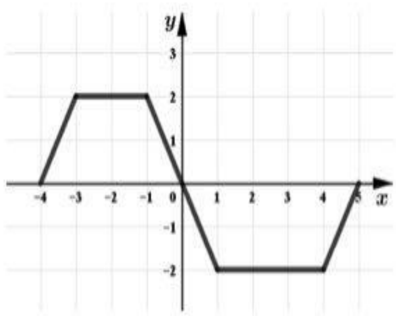
Pregunta auxiliar

- ¿Cuál sería la ecuación de la recta de l_1 si fuera perpendicular a $y = 2x$?

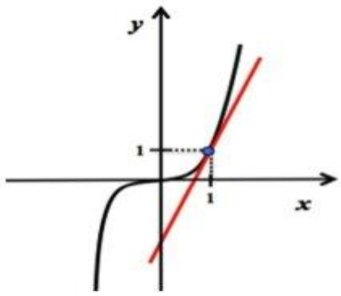


3. Indica en qué intervalos la siguiente gráfica es: creciente, decreciente y constante.

	Intervalos	Argumentos
Creciente		
Decreciente		
Constante		

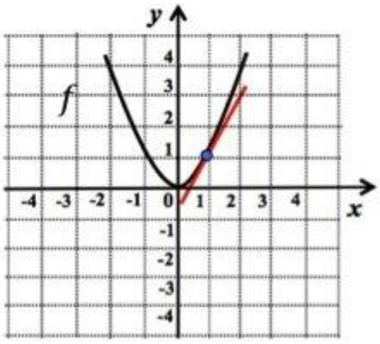


4. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3$ en el punto (1,1)
Pregunta auxiliar
¿Cuál es la pendiente de la curva en $x = 0$?



5. La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?

6. Obtenga la derivada de la función f(x) en x = 1

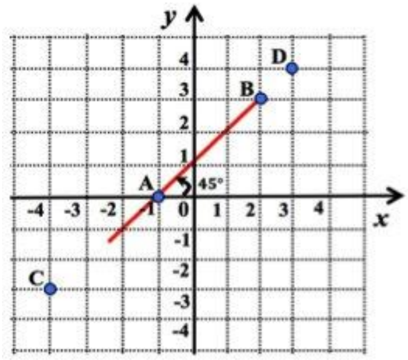


7. Indica cuál(es) de las ecuaciones se corresponden con funciones: crecientes, decrecientes y constantes. Argumenta tus respuestas.

		Creciente/decreciente/constante
a)	$y = -5$	
b)	$y = -1 - 3x$	
c)	$y = x + 2$	
d)	$y = 1/3$	
e)	$y = 7x/4$	

8. La profesora de Geometría Analítica en una lección introductoria sobre la pendiente comentó: “Para calcular la pendiente de una recta dividimos 7 entre 3 obteniendo 2.3”. ¿Qué significa el 2.3? Tarea adaptada de Byerley y Thompson (2017).
Pregunta auxiliar
Si se interpreta la pendiente igual a 2.3 como: “por cada unidad que avanzó en *x*, en *y* subo 2.3 unidades” o “por cada 3 unidades que avanzó en *x*, en *y* subo 7 unidades”, se pregunta ¿qué ocurre en la situación si el cambio en *x* es 5?

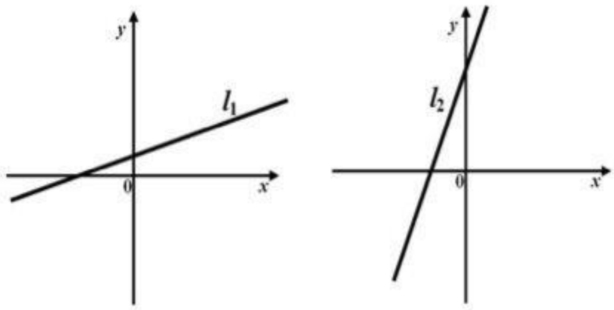
9. Pablo y Pedro son compañeros de la clase de Geometría Analítica. Un día, en su clase, se encontraban analizando la gráfica dada. Pablo le aseguraba a Pedro que al prolongar el segmento $\overline{AB}$ con su regla de precisión esta pasaría por los puntos D y C y su argumento era que a simple vista todos los puntos estarían en la misma recta. Este argumento no convencía del todo a Pablo. Propón un argumento para convencerlo.



10. ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2? Argumenta tu respuesta. Tarea adaptada de Hoffman (2015).

Pregunta auxiliar

En caso de no utilizar alguna graduación en los ejes de los planos, preguntar ¿cómo repercute la graduación de los ejes en la pendiente de las rectas?



11. ¿Qué es para usted la pendiente?

12. Mencione al menos tres ejemplos de tu medio circundante donde esté presente la pendiente.