NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 109, noviembre de 2021, páginas 151-160

Dinamizando funciones trigonométricas con GeoGebra

José Luis Vergara Ibarra (Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí - Colegio Veintitrés de Octubre. Ecuador)

Fecha de recepción: 17 de junio de 2021
Fecha de aceptación: 23 de octubre de 2021

Resumen El presente artículo desarrolla una propuesta didáctica para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en la representación gráfica de funciones trigonométricas a través del software de geometría dinámica GeoGebra. La construcción del grafo para estas funciones mediante el software tiene un énfasis dinámico y se basa en conceptos tales como la periodicidad, propiedades de simetría, definiciones tales como su rango y dominio.

Palabras clave Funciones trigonométricas, GeoGebra, propuesta didáctica, dinámico, simetría, periodicidad.

Title **Dynamizing trigonometric functions with GeoGebra**

Abstract This paper develops a didactic proposal to promote teaching and learning processes in the graphical representation of trigonometric functions through the dynamic geometry software GeoGebra. The construction of the graphs for these functions by software has a dynamic emphasis and is based on concepts such as periodicity, symmetry properties, and definitions such as range and domain.

Keywords Trigonometric functions, GeoGebra, didactic proposal, dynamic, symmetry, periodicity.

1. Introducción

En Educación Media, bachillerato específicamente, el estudio de las funciones trigonométricas es un tema trascendental en el estudio de la matemática, que requiere por parte del estudiante una comprensión profunda y una capacidad para producir de forma razonada información verbal y escrita. Bosquejar una gráfica de una función trigonométrica en la pizarra o en el cuaderno exige tiempo y técnicas especiales, así como el dominio básico de conceptos ligados a este tema. Los tiempos que se viven debidos a la pandemia hacen indispensable el manejo de tecnologías educativas libres y didácticas para el desarrollo de contenidos matemáticos que aseguren un aprendizaje significativo, y que a la vez incentiven el desarrollo del pensamiento computacional del alumnado. Actualmente GeoGebra posee estas características y además se ha convertido en una herramienta imprescindible a nivel mundial para enseñar y hacer matemáticas dinámicas tanto básicas como superiores, pues integra y relaciona álgebra con la geometría, la estadística, el cálculo y otras ramas del conocimiento matemático. Las herramientas y comandos que posee son intuitivas y de fácil ejecución.

MUNDO GEOGEBRA
Coordinador: Carlos Ueno

Por estas razones podemos aprovechar la potencialidad de GeoGebra para trabajar con funciones trigonométricas, ya que sin duda alguna comprender su comportamiento gráfico y analítico permite relacionar este con otros más avanzados como el análisis matemático y el análisis complejo.

La representación gráfica de funciones trigonométricas con GeoGebra se puede obtener de varias formas, de las que aquí mencionaremos dos: el grafo estático que se consigue escribiendo solo en la línea de entrada la función algebraica, obteniendo el gráfico sobre todo su dominio junto con algunas características; y el grafo dinámico que es conseguido integrando en GeoGebra las expresiones matemáticas a partir de sus definiciones básicas en dominios restringidos y a través de comandos que hacen uso de sus propiedades gráficas. Este diseño es más elaborado pero resulta más atractivo para hacer el análisis de sus propiedades, características y transformaciones, dando vida de forma más significativa a la función objeto de estudio.

En la literatura relacionada al tema, autores como Rojas (2013) han trabajado las funciones trigonométricas relacionando el círculo unitario y el grafo de la función. Díaz, Gutiérrez y Luque (2018) explican de manera secuencial y experimental la forma de abordar en particular la función $f(x) = \tan(x)$ hasta entender la definición de razón al introducir la función $\tan(x)$. Rojas (2013) no detalla en la construcción las definiciones que comprenden las funciones trigonométricas de forma que se relacione cada resultado con la teoría. Por otro lado, los libros de precálculo tales como Swokowski (2011), Zill y Dewar (2008), Stewart, Redlin y Watson (2012) fundamentan esta teoría mostrando gráficos estáticos que no permiten al lector actuar sobre ellos. Es aquí donde GeoGebra se convierte en una herramienta imprescindible para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

Hohenwarter (2014) destaca que la resolución de problemas matemáticos puede mejorar cuando se pueden cambiar de forma flexible las distintas representaciones, y que esto puede lograrse utilizando un software matemático dinámico como GeoGebra. También agrega que GeoGebra ofrece dos registros de representaciones diferentes, la vista gráfica y la vista algebraica, que actúan sobre el mismo objeto matemático abstracto. Estas vistas están relacionadas o conectadas y proporcionan una visualización geométrica y simbólica que permiten interactuar sobre ambas. Duval (1999) afirma que el uso de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, porque a diferencia de otros campos del conocimiento no hay otra forma de acceder a los objetos matemáticos que la de reproducir representaciones semióticas de los mismos.

En este sentido, el objetivo de este trabajo es hacer dinámicas las funciones trigonométricas aplicando los respectivos conceptos que garanticen la exploración y visualización de todos los elementos que intervienen, tanto geométricos como analíticos, y que asimismo puedan extenderse a casos más generales. Las representaciones dinámicas se realizarán en GeoGebra clásico 5, pero pueden ser trabajadas también sobre las versiones de GeoGebra en línea y en dispositivos móviles.

2. Diseño y metodología

El diseño consta de dos fases: La primera fase tiene como finalidad dinamizar las gráficas que muestran el concepto de periodicidad apoyándose del dominio de la función. En la segunda fase se escala adecuadamente el eje x y se elaboran las asíntotas verticales para las funciones $\boldsymbol{tan}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{csc}(\boldsymbol{x})$, pues para este tipo de funciones GeoGebra no otorga por defecto ni la escala más conveniente en el eje x ni la representación de sus asíntotas verticales. Por último, se diseñan gráficos animados relacionando el concepto de simetría. Durante este desarrollo se van proponiendo una variedad de actividades que resultan a través de las ideas desarrolladas en este trabajo a fin de afianzar de forma intuitiva los conceptos, definiciones y características de estas funciones.

El método empleado es una combinación entre los métodos deductivo e inductivo, porque en la primera fase de la construcción en el software se parte de premisas particulares para llegar a las generales, mientras que en la segunda fase se toman conceptos o definiciones matemáticas generales para obtener explicaciones particulares. Antes de abordar las fases presentadas se dan ciertas definiciones pertinentes relacionadas con los contenidos tratados.

3. Función

Antes de introducir la definición de funciones trigonométricas definimos qué es una función. Sean A, B conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}$. Una función de A en B es un conjunto f de pares ordenados en el producto cartesiano $A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a, b) \in f$. En otras palabras, si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$. (Bartle y Sherbert, 2011, p.4)

3.1. Periodicidad

Una función a valores reales es periódica si satisface que $f(x) = f(x + p)$, donde p $\in \mathbb{R}$ es un valor constante. En particular, las funciones trigonométricas $sen(x) = sen(x + 2\pi r)$, $cos(x) = cos(x + 2\pi r)$, $tan(x) = tan(x + \pi r)$, y otras que se deducen de estas tres son periódicas; aquí $r \in \mathbb{Z}$. El lector interesado en profundizar este tema se le recomienda ver (Kalnin, 1978, pp. 203-211) y (Stewart, Redlin y Watson, 2012, pp. 386-395).

3.2. Elaboración del grafo que relaciona la periodicidad

Con la definición de periodicidad de una función es suficiente hacer el gráfico solo en su periodo, por ejemplo, la función $cos(x)$ tiene período 2π, por tanto, construimos el gráfico en el intervalo $[0, 2\pi]$, y posteriormente lo que se hace es reproducir esta porción de gráfica en la dirección negativa y positiva del eje real x, es decir, en los intervalos $\ldots,[-6\pi, -4\pi]$, $[-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$, … Esta misma idea se extiende para las funciones $sen(x)$, $tan(x)$, $cot(x)$, $sec(x)$ y $csc(x)$. Es claro que las funciones $cos(x)$ y $sen(x)$ están definidas en todo el eje real x, lo que no ocurre con las otras funciones, pero también es factible esta propuesta con el apoyo de GeoGebra.

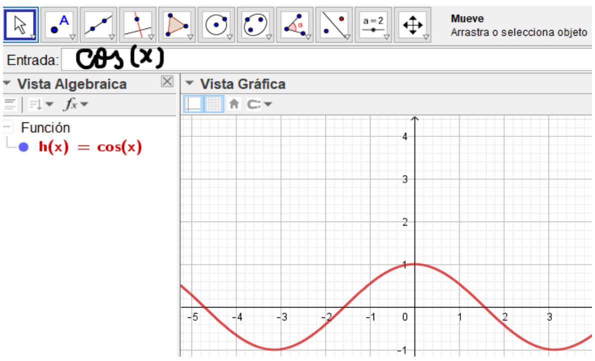

Figura 1. Representación gráfica de la función $h(x) = \cos(x)$.

Considerando como ejemplo la función $h(x) = cos(x)$, una forma de obtener su gráfico es ingresar la expresión del lado derecho en la entrada de GeoGebra. En la Figura 1 se muestra este gráfico. Si escribimos las otras funciones mencionadas es fácil también obtener sus grafos. Los gráficos obtenidos de esta forma no son dinámicos.

Lo que se pretende en este trabajo es representar estas gráficas sobre un periodo a través de GeoGebra y extenderla a dominios mayores de forma dinámica, de modo que nuevas secciones de la gráfica se vayan ensamblando para completar el grafo en un dominio seleccionado. Una alternativa es utilizar un deslizador n que varíe de 0 a 5 y el comando **Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>),** anidando el comando **Traslada(<Objeto>, <Vector>)**. Para crear el deslizador n realizamos los siguientes pasos:

- Seleccionamos la herramienta deslizador y luego marcamos la vista gráfica.
- A continuación, se abre una ventana en donde cambiamos la letra a que viene por defecto por n y después en la casilla Mín ingresamos 0 y en Máx 5 con un incremento de 1.

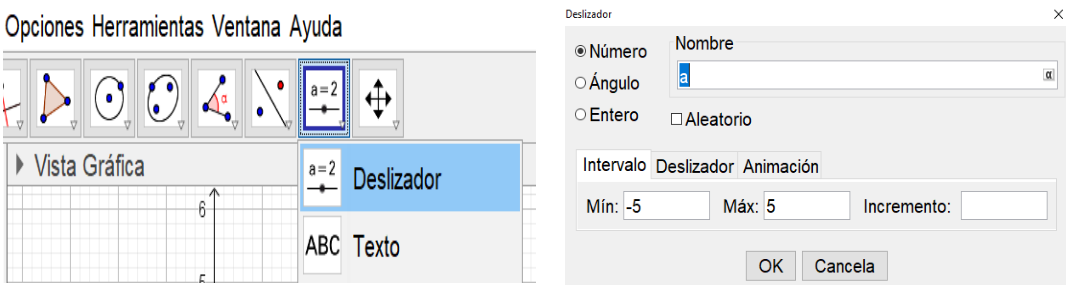

Figura 2. Creación de un deslizador $\boldsymbol{n}$.

- Finalmente escribimos en la entrada el comando secuencia anidando el comando traslada. La sintaxis es la siguiente:

l0=Secuencia(Traslada(Si(0 ≤ x ≤ 2π, sen(x)), Vector(k Vector((2π, 0)))), k, -n, n)

Este registro en la entrada proporciona la gráfica animada de la función seno definida en el intervalo $x \in [-10\pi, 12\pi\,]$, este dominio está en función del intervalo en el cual varía el deslizador n. Asimismo, esta sintaxis podemos aplicarla para la función tangente una vez prediseñado el deslizador n. La función $tan(x)$ tiene período π y así podemos dibujar la función en el intervalo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y reproducir toda esta porción de gráfica en un dominio donde la función esté definida mediante el código:

l1=Secuencia(Traslada(Si(-π/2 < x < π/2, tan(x)), Vector(k Vector((π, 0)))), k, -n, n)

Esta última entrada produce la Figura 3. El grafo representado en el intervalo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ no está definida para $x = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, y al reproducir toda la función a lo largo del eje real mediante GeoGebra se puede deducir para qué valores de x la función $tan(x)$ está definida. Se puede proponer como actividad el desarrollo gráfico de las funciones $cot(x)$, $sec(x)$, $csc(x)$ $cos(x)$ y $sen(x)$ mediante el software o a mano utilizando la periodicidad de estas funciones. Esta técnica nos da ideas de deducir el dominio de estas funciones, y a través de esta visualización determinar su rango.

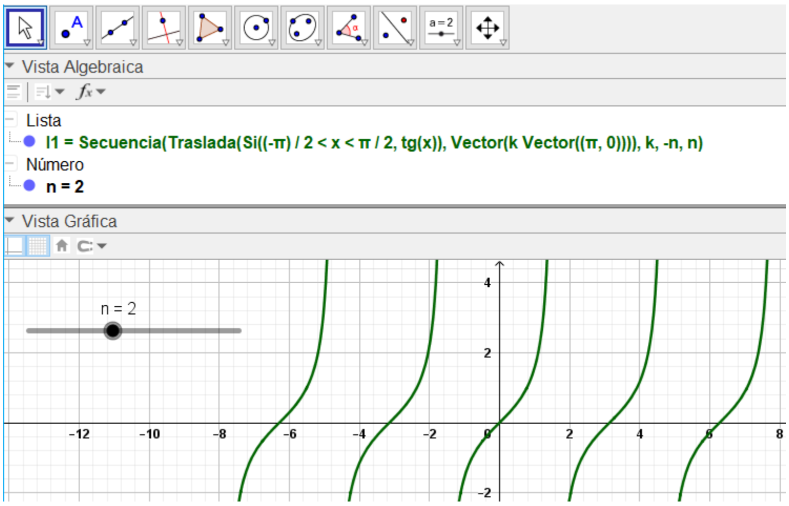

Figura 3. Gráfico dinámico de la función $tan(x)$ para $n = 2$.

Observación 1: Las asíntotas verticales de las funciones $tan(x)$, $cot(x)$, $sec(x)$ y $csc(x)$ no se pueden obtener mediante el comando **Asíntota(<Objeto>)**, pero esto sí es posible para otros tipos de funciones como las racionales o exponenciales, entre otras. Por otra parte, la escala en el eje x no es la adecuada para el estudio de estas funciones ya que sus medidas no están etiquetadas en radianes.

Asíntotas verticales y dominio

La primera parte de la observación 1 se puede solucionar conociendo el dominio de la función e introduciendo las asíntotas en GeoGebra a través del comando secuencia.

Como ejemplo tomemos la función $f(x) = tan(x)$. Es conocido que el dominio de esta función son los $x \in \mathbb{R}$ menos los $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Para modelar estas asíntotas creamos un deslizador n que varíe de 0 a 8 e incremento 1 (el máximo del deslizador podemos cambiarlo según la disposición en escala de la vista gráfica que trabajemos) y la secuencia:

l2=Secuencia(x = π / 2 (2k + 1), k, -n, n).

Además, podemos cambiar su color para distinguirlas a través de los comandos **EstiloTrazo(<Línea>, <Número>)** y **Color(<Objeto>, "<Nombre del color (entre comillas)>")** con las entradas respectivas **EstiloTrazo(l2, 2)** y **Color(l2, "Rojo")**. En la Figura 4 se muestran el gráfico de la función $tan(x)$ y las asíntotas verticales con líneas segmentadas.

Esta idea se puede extender como actividad sobre las funciones $cot(x)$, $sec(x)$ y $csc(x)$ y otras variantes como $Atan(Bx + C) + D$, $Acot(Bx + C) + D$, $Asec(Bx + C) + D$ y $Acsc(Bx + C) + D$, donde A, B, C y D son constantes reales con A y B distintos de cero.

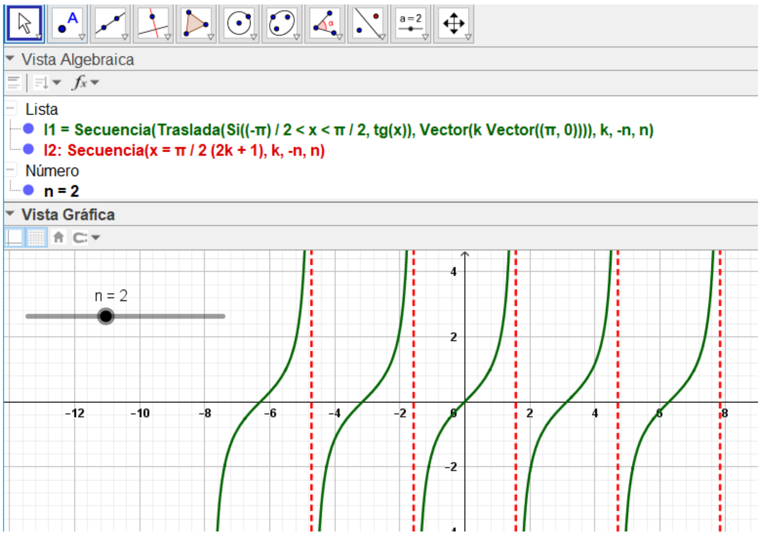

Figura 4. Asíntotas dinámicas de la función $tan(x)$ para $n = 2$.

Gradación del eje x con el comando secuencia

La segunda parte de la observación 1 es muy importante, pues como se puede apreciar en la Figura 1, 3 y 4 la escala en el eje coordenado x no está escrita en radianes. Una forma de presentar la escala en radianes es dar clic en la esquina superior derecha en el icono en forma de engranje y seleccionar vista gráfica, luego se abre una ventana en la que seleccionamos la pestaña **EjeX**; después nos dirijimos a **Unidad** y seleccionamos π, tal como se muestra en la Figura 5.

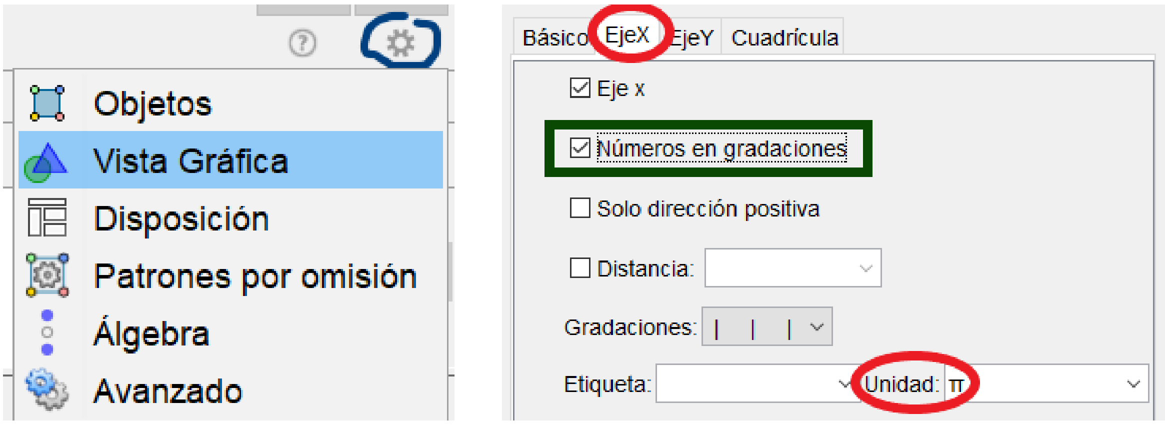

Figura 5. Pasos para cambiar la escala en el eje x a radianes.

Una vez hecho estos cambios en la Figura 4 se obtiene la Figura 6.

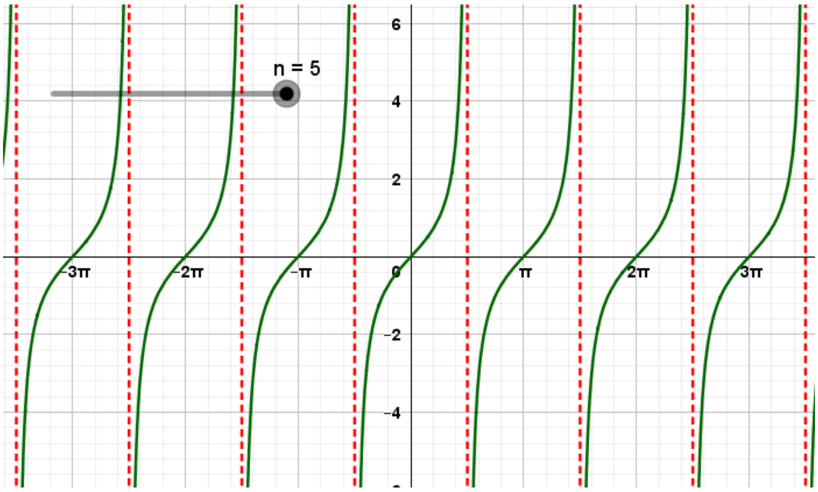

Figura 6. Escala en radianes en el eje x.

Esta posibilidad es algo limitada, ya que esta escala es fija y no se puede aumentar de tamaño para una mejor visualización, y solo funciona para ciertos casos. Con un buena etiquetación modificable (tamaño, color y tipo de letra) y además dinámica en el eje x podemos observar de manera gráfica el comportamiento de los ceros o raíces de las funciones trigonométricas, o dónde la función no está definida. Esto se puede lograr para una variedad de casos con el comando secuencia y anidando los comandos **Texto(<Objeto>, <Punto>)** y **FórmulaTexto(<Objeto>)**. Antes de introducir el comando desmarcamos la casilla Número en las gradaciones marcado con el rectángulo verde de la Figura 5.

Supongamos que queremos mostrar y etiquetar las asíntotas verticales de la función $g(x) = csc(x)$. El dominio de esta función es:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Con esta información se pueden obtener las asíntotas verticales y la escala en radianes del eje real (ver Figura 7). Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Escribimos la función $csc(x)$ en la línea de entrada.
2. Definimos un deslizador n que varíe de 0 a 10 e incremento 1.
3. Registramos las listas:

$$\text{Asíntotas} = \text{Secuencia}(\text{x} \ = \ \text{k}\,\pi, \text{k}, -\text{n}, \text{n})$$

$$\text{Etiqueta} = \text{Secuencia}(\text{Texto}(\text{FórmulaTexto}(\text{k})\ \pi, (\text{k}\,\pi, -0.5)), \text{k}, -\text{n}, \text{n})$$

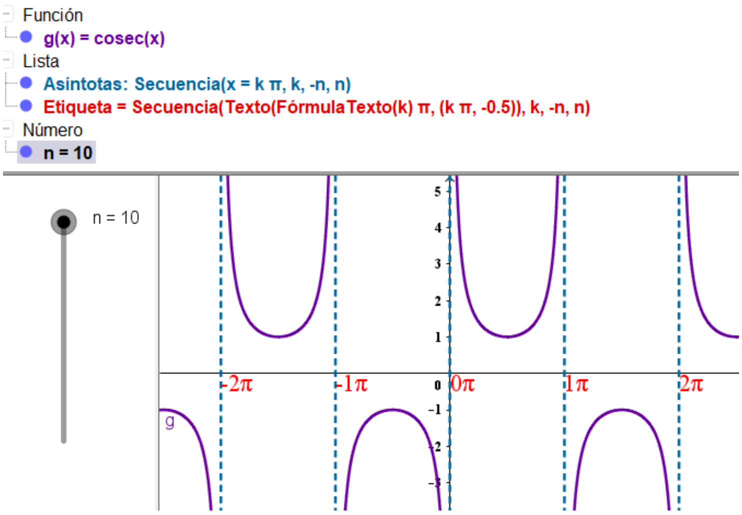

Figura 7. Asíntotas verticales y escala en radianes en el eje x de la función $csc(x)$.

Las secuencias proporcionan en la vista algebraica listas a las que podemos asignar nombres de conjuntos. A estos conjuntos les podemos cambiar las propiedades de forma personalizada, como se hizo en el procedimiento para obtener la Figura 4.

Simetría

Las funciones trigonométricas básicas son pares o impares y bajo este concepto podemos graficar por ejemplo la función $sec(x)$ de forma animada aplicando esta propiedad sobre GeoGebra. Los pasos para su construcción son los siguientes:

- Seleccionamos la herramienta deslizador y en la ventana que se activa por defecto damos clic en **Ángulo** y finalmente en **Ok**.

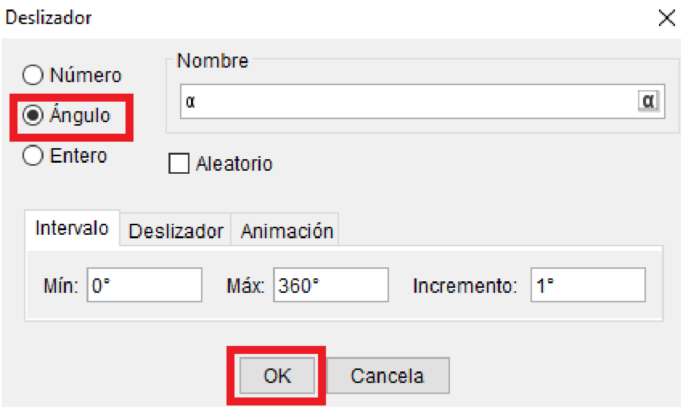

Figura 8. Creación de un deslizador α.

- Registramos en la línea de entrada la función $f(x)$ =Si($0 \leq x \leq 2\alpha$, sec(x)), que genera una gráfica en el primer y cuarto cuadrantes cuya animación va a depender del deslizador α.

Aprovechando que esta función es par podemos obtener la porción de gráfica animada también del segundo y tercer cuadrantes a través de una reflexión respecto del eje y mediante el comando **Refleja(<Objeto>, <Recta>)**, de modo que escribimos en la línea de entrada la expresión $g(x)$ =Refleja(f, EjeY). Finalmente podemos incluir sus asíntotas verticales y una escala en el eje real adecuada mediante el registro de las dos instrucciones

L_1=Secuencia(x = π / 2 (2k + 1), k, -4, 4) y
L_2= Secuencia(Texto(FórmulaTexto(2k + 1) " π /2", (π / 2 (2k + 1), 0)), k, -5, 5).

Los valores límite que toma k en las listas L_1 y L_2 se puede ajustar de acuerdo al tamaño de la vista gráfica. Personalizando la representación gráfica se obtiene la Figura 9.

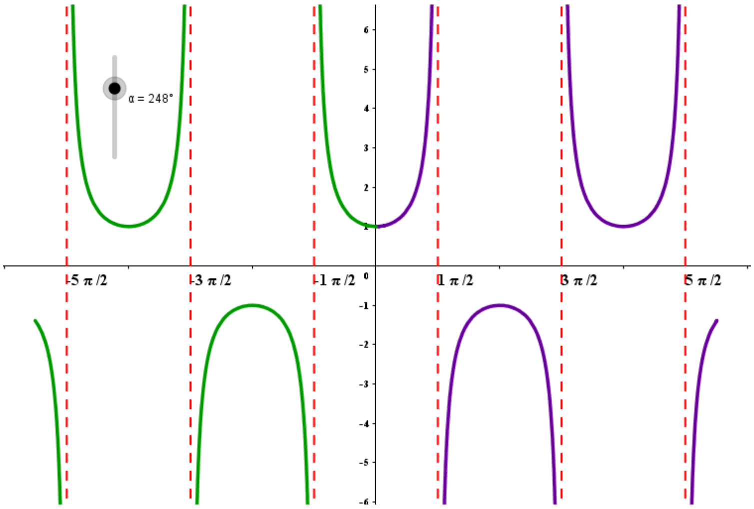

Figura 9. Gráfica animada de la función $sec(x)$ aplicando simetría.

El grafo animado de la Figura 9 da la impresión de trazarse como un dibujo a mano sobre el papel, dentro del dominio donde la función está definida. Asimismo, a través de la gráfica se observa el rango de la función, que puede describirse con precisión de forma matemática. Otra forma de hacer este gráfico dinámico a través de la simetría es crear un punto de la forma $(x,\ f(x))$ y, con el deslizador α creado previamente, hacer $x = \alpha$. Así, por ejemplo, si $f(\alpha) = \cot(\alpha)$ escribimos en la línea de entrada el punto $(\alpha,\ f(\alpha))$, posteriormente reflejamos este punto respecto al origen porque la función $\cot(x)$ es impar, y luego sobre los puntos activamos el rastro y así conseguimos una gráfica similar a la de la Figura 9. Con esta última construcción se pueden visualizar los cambios en las coordenadas de estos puntos simétricos respecto al origen.

4. Conclusiones

De acuerdo con las construcciones realizadas y actividades propuestas es perceptible el gran potencial visual dinámico que posee GeoGebra interviniéndolo matemáticamente para el estudio de funciones trigonométricas en general, pues ayudan a abstraer propiedades de forma geométrica y analítica conectando de forma intuitiva los registros dinámicos de representación gráficos y algebraicos con la teoría que los sustenta.

Los patrones matemáticos estudiados y registrados al lenguaje del software, más las posibilidades de visualización e interacción que ofrecen en la construcción de este conocimiento pueden potenciar el pensamiento computacional, la creatividad y experimentación.

El manejo de herramientas y comandos básicos en GeoGebra es importante, pero es más poderoso combinar comandos que permitan conectar los patrones matemáticos de la teoría para producir objetos geométricos, algebraicos y numéricos que hagan los procesos más eficientes y garanticen la comprensión significativa de los conceptos. De esta manera se posibilita la caracterización de las definiciones de los distintos comportamientos en cada tipo de función trigonométrica, además se presta como un espacio de autoaprendizaje y formación en la que se puedan generar otras construcciones o aplicaciones de este tema y otros.

Bibliografía

Bartle, R. y Sherbert, D. (2011). *Precálculo. Introduction to real analysis (4.ª ed.)*. Jhon Wiley & Sons, Inc.
Díaz, S., Gutiérrez, R. y Luque, R (2018). Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica $f(x) = \tan(x)$. *Números*, 97. Recuperado el 17 de junio de 2021, de http://www.sinewton.org/numeros/
Duval, R. (1999). Representation, visión, and visualización: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: *Proceedings of the twenty first annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, 2-3.
Hohenwarter, M. (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Revista Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *39*, 11-18.
Kalnin, R. (1978). *Algebra y Funciones Elementales (2.ª ed.)*. Latinoamericana.
Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo (6.ª ed.)*. Cengage Learningn Editores.
Swokowski, E. (2011). *Álgebra y trigonometría analítica (10.ª ed.)*. Cengage Learningn Editores.
Rojas, J. (2013). Construcción de la gráfica de funciones trigonométricas utilizando GeoGebra. *Big Bang Faustniano*, 19-23. DOI: https://doi.org/10.51431/bbf.v0i0.350
Zill, D y Dewar, J. (2008). *Precálculo con avances de cálculo (4.ª ed.)*. The MacGraw-Hill.

José Luis Vergara Ibarra. Profesor de Matemáticas del colegio Veintitrés de Octubre, Montecristi-Ecuador. Profesor y miembro del curso GeoGebra en alianza con la Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) y el apoyo de la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso – FAPEMAT. Miembro del Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí, miembro de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana y miembro de la Comunidad GeoGebra Internacional.
e-mail: ingjosevergaraibarra@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2735-9246