NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 109, noviembre de 2021, páginas 7-31

Enseñanza de cuerpos geométricos en el nivel secundario argentino: implementación de una actividad de estudio e investigación

Andrea Berenguel Rinaldi (Instituto Superior Juan XXIII. Argentina)
Verónica Parra (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - CONICET. Argentina)

Fecha de recepción: 01 de septiembre de 2020
Fecha de aceptación: 20 de junio de 2021

Resumen

Este trabajo describe los resultados del diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación (AEI) propuesta para el estudio de cuerpos geométricos en un curso de segundo año de una escuela secundaria de Argentina (estudiantes de 13-14 años) de gestión privada. La AEI parte de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, con un espesor despreciable, utilizando la menor cantidad de material posible y sabiendo que se vende por* cm^2*?* La implementación se realizó en un grupo de 36 estudiantes durante 21 sesiones de clase. Se utiliza como referente teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Se concluye que esta AEI resultó ser un dispositivo funcional capaz de generar un estudio a partir de preguntas, propiciando el desarrollo de características claves de la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo.

Palabras clave

Enseñanza y aprendizaje, cuerpos geométricos, escuela secundaria argentina, actividad de estudio e investigación, teoría antropológica de lo didáctico.

Title

Teaching geometric forms at the Argentine secondary school: implementation of a study and research activity

Abstract

This work describes the results of the design and implementation of a study and research activity (SRA) proposed for the study of geometric forms in a second-year course at Argentine secondary school (students 13-14 years old) of privative education. The SRA starts from the question Q_0: *How to design a perfume container of 125 ml, with a negligible thickness, using the least amount of material possible and knowing that it is sold per* cm^2*?* The implementation was developed in a group of 36 students during 21 class sessions. The anthropological theory of didactics (ATD) is used as a theoretical reference. It is concluded that this SRA was a functional device capable of generating a study from questions, fostering the development of key characteristics of the pedagogy of research and questioning the world.

Keywords

Teaching and learning, geometric forms, argentine secondary school, study and research activity, anthropological theory of didactics.

1. Introducción

La Geometría "es parte integrante de la cultura de la humanidad, no solo por su función instrumental sino también porque incentiva el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, a fin de comprender y modificar el entorno" (López y Fernández, 2012, p. 2). Sin embargo, este aspecto de la geometría como integrante de la cultura, poco a poco ha ido perdiendo lugar en muchos programas de estudio. Algunos autores, por ejemplo, Araya y Alfaro (2010) consideran que el aprendizaje de la geometría ha quedado relegado a una actividad memorística y sin sentido. Una actividad donde el docente explica, luego resuelve ejemplos prototípicos y finalmente los estudiantes deben, a modo de repetición, resolver ejercicios aplicando en la mayoría de los casos, fórmulas sin sentido, sin razones de ser. Este problema ha llevado a diversos investigadores a desarrollar trabajos en torno al estudio de la Geometría en diferentes niveles del sistema educativo, y en particular en el nivel secundario (Gutierrez, 2020, Gómez-Escobar y Fernández-Cézar, 2020, Flores-Compañ, Bellés Agut, Nebot Romero y Tintoré, 2019, Sánchez y Prieto, 2019, Ciccioli y Sgreccia, 2017, Henríquez y Montoya, 2015, Araya y Alfaro, 2010; Corica y Marin, 2014; Martín, Fanaro y Parra, 2015; Farías, 2015, Colombo Rojas, Llanos y Otero, 2016; Navarro y Sgreccia, 2010, Villarroel y Sgreccia, 2011, entre otros).

Por ejemplo, Gutierrez (2020) se enfoca en mejorar las competencias geométricas de los estudiantes a partir de una concepción de la didáctica de la enseñanza de la geometría en educación media, basada en GeoGebra. Este autor considera además que existe la necesidad de indagar e implementar estrategias metodológicas en el aula que puedan guiar al estudiante hacia una mejor comprensión de la Geometría. En el mismo sentido, Gómez-Escobar y Fernández-Cézar (2020) aluden a la importancia de combinar las competencias adquiridas en el entorno educativo con su aplicación práctica mediante la realización de servicios útiles para la comunidad. Refieren, además, a la necesidad de mejorar los resultados académicos, el refuerzo y la motivación, la mejora del clima de aula, la necesidad de educar para la vida y los problemas sociales, entre otros. Por su parte, Flores-Compañ, Bellés Agut, Nebot Romero y Tintoré (2019) se proponen adoptar una metodología en la que los alumnos dejen de ser actores pasivos y pasen a implicarse genuina y activamente en la construcción de un determinado saber geométrico. En particular, proponen utilizar tanto el aprendizaje basado en proyectos como las nuevas tecnologías, exponiendo la necesidad de que el estudiante tome una actitud activa y comprometida en su propio aprendizaje, dejando el papel de receptor de información.

En lo que respecta a la Geometría y al currículum, Navarro y Sgreccia (2010) por ejemplo, explican que el currículum de Geometría de la escuela secundaria en la Argentina ha sufrido varios cambios. Identifican tres grandes momentos en las propuestas de enseñanza de la Geometría: el primer momento (entre 1950 y 1960), se enfoca en el tratamiento de enunciados, demostraciones y resolución de problemas específicos. El segundo momento (entre 1970 y 1980), la geometría está prácticamente excluida del currículum. En el tercer momento (entre 1990 y 2000), se la considera como un campo de motivación en relación con problemas concretos. Esta variación se ve reflejada en los documentos oficiales, sin corresponder necesariamente con el desarrollo en la práctica en el aula (Navarro y Sgreccia, 2010). Ahora bien, cuál es el lugar que actualmente ocupa la Geometría en el currículum escolar. Se podría decir que, al menos en lo que respecta al diseño curricular de la provincia de Buenos Aires (Argentina), se propone para todos los años del nivel secundario, un eje destinado a la Geometría. Pero, a pesar de esta inclusión, algunos de los actores del sistema educativo, por ejemplo, profesores, directivos, etc., no consideran como prioritarios estos contenidos al momento de promover a sus estudiantes (Navarro y Sgreccia, 2010). Esto conlleva a que, en muchas planificaciones y contextos áulicos, se relegue el estudio de estos temas para el fin de año, donde por lo general, no se abordan por cuestiones de falta de tiempo escolar.

Este "olvido", este desplazamiento de la geometría de los programas oficiales e incluso de las aulas, es caracterizado a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) a partir de un fenómeno didáctico denominado "autismo" (Chevallard, 1999, 2001, Gascón, 2003, 2004). Este fenómeno consiste en encerrarse en los temas de estudio, sin conectarlos con los otros temas y mucho menos con otras disciplinas. Este retraimiento en los temas genera la pérdida de sentido del saber que se estudia y, en consecuencia, la pérdida de las razones de ser. En este caso, de las razones de ser de la Geometría. Es decir, el por qué y el para qué es necesario estudiar Geometría en la escuela. Esta pérdida de sentido y de razones de ser constituye un síntoma de la pedagogía actualmente dominante en los sistemas de enseñanza, la pedagogía de la monumentalización de saberes (Chevallard, 2004): una pedagogía donde los saberes no se estudian ni se cuestionan, sólo se "inventarean", se listan y donde el rol del profesor y de los estudiantes es análogo al rol de un guía y de visitadores en un museo. Allí, se guía a los visitadores a admirar los monumentos, sin tocarlos y menos aún, manipularlos. Pero la Matemática no es un monumento, es una construcción humana y su estudio como tal no debe reducirse a un inventario de saberes carentes de sentido y sin razones de ser. En el marco de la TAD se proponen los dispositivos didácticos denominados actividades de estudio e investigación (AEI) y recorridos de estudio e investigación (REI) como una posible manera potencialmente capaz de desarrollar saberes funcionales. Pero para que estos dispositivos puedan vivir en nuestras aulas, es necesario suplantar la pedagogía actual, la de la inventariar saberes, por una pedagogía denominada "de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM)" (Chevallard, 2004, 2007). Una pedagogía donde el punto de partida del saber son las preguntas. Preguntas en sentido fuerte, es decir, cuya respuesta no sea la simple búsqueda de información, sino que se requiera la construcción de una praxeología o un conjunto de praxeologías.

Este trabajo no pretende abordar completamente el problema de la Geometría en el aula, pero sí proponer una manera diferente de estudiar aspectos geométricos en un aula real de la escuela secundara argentina. Se presenta y describe el proceso de estudio de un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario argentino (estudiantes de 13-14 años) a partir de la formulación de una pregunta, diremos una pregunta generatriz, que permita a la comunidad de estudio comprometerse en un proceso individual y a su vez colectivo, de formulación de sub-preguntas, o preguntas derivadas, y búsqueda de respuestas. Se pretenden introducir de esta manera uno de los gestos claves de la PICM que es el desarrollo del proceso de estudio escolar en función de duplas de preguntas-respuestas.

2. Marco teórico: la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Se adopta como referencial teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2004, 2006, 2007, 2013a, 2013b, 2017), particularmente el dispositivo didáctico actividades de estudio e investigación (AEI). Este dispositivo, así como los recorridos de estudio e investigación (REI) se proponen como una posibilidad de promover enseñanzas funcionales en los distintos niveles educativos. La necesidad de proponer enseñanzas funcionales corresponde a un cambio formulado en la TAD a nivel de la pedagogía. En este referente se describe la forma "tradicional" de enseñar matemática –forma que ya hemos mencionado pero que podemos sintetizar brevemente como aquella donde el profesor explica, define, ejemplifica y los alumnos, copian y reproducen lo que el profesor ha presentado–. En términos del fenómeno denominado monumentalización de saberes: se visita una obra como se visita un monumento en un museo. Los estudiantes son invitados a visitar las obras sin cuestionarlas ni involucrarse en su reconstrucción. El saber se presenta fraccionado con un valor en sí mismo, una obra que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus razones de ser. La generación de preguntas es eliminada, y es reemplazada por la enseñanza, casi automatizada, de respuestas. Como "contraparadigma" a esta enseñanza poco funcional, Chevallard (2004, 2005) propone la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM). Aquí, la educación es considerada como un proceso que se desarrolla a lo largo de toda la vida y mantiene la premisa formulada por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) referida a que “es muy poco frecuente que sea una única persona la que se lance al estudio de una pregunta: generalmente la gente se agrupa para compartir el esfuerzo y los logros, formando así una comunidad de estudio” (p.197). Esta pedagogía tiene como objetivo formar ciudadanos que ante una duda o un problema o una pregunta empiecen un estudio e investigación con el objetivo de formular sub-preguntas y aportar respuestas, ya sea solo o con ayuda de otros.

Desde las primeras formulaciones de la TAD se considera al estudio de la matemática como parte del conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, proponiendo describir cualquier actividad humana regularmente realizada con un modelo único, denominado praxeología. Una praxeología está constituida por un bloque práctico-técnico, que corresponde al saber-hacer, formado por tareas o tipo de tareas que se realizan y la técnica que se utiliza para ello; y por un bloque tecnológico-teórico, que se refiere a los saberes, conformado por la tecnología, la razón de la técnica y la teoría que le dé sentido a las tareas, permitiendo interpretar la práctica y fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas (Chevallard, 1999). Así, en la pedagogía monumentalista, la de inventariar saberes, la manera de estudiar una organización matemática (OM) se materializa en praxeologías carentes de sentido, sin razones de ser y muy poco funcionales. En cambio, en la PICM, las praxeologías construidas y/o reencontradas adoptarían un estatus más funcional para la comunidad de estudio, recuperando al menos una razón de ser pues su construcción proviene de la respuesta a una pregunta.

En correspondencia con la premisa de investigar y cuestionar, y aludiendo al postulado clave de la TAD que afirma que el saber es el proceso y producto de un proceso de estudio emergente en la búsqueda de respuestas a preguntas, Chevallard (2006) describe que toda situación formulada a partir de una verdadera pregunta Q, se puede considerar como una situación de estudio e investigación. Es decir, una situación donde sea necesario un estudio y a la vez, necesaria una investigación, recurriendo a cualquier recurso y/o fuente de información que pueda aportar ayudas y/o respuestas, al menos parciales, a las preguntas Q. La pregunta Q debe ser considerada en sentido fuerte. Es decir, una pregunta que no pueda responderse simplemente con la búsqueda de información o con lo que ya “se sabe”. Debe ser una pregunta con la capacidad de producir preguntas, de derivar otras sub-preguntas. Chevallard (2004) califica a estas preguntas como preguntas generatrices. Así, la pregunta generatriz Q debe ser tal, que tenga la capacidad de generar varias sub-preguntas, preguntas derivadas Q_i, y que, a su vez la búsqueda de sus respuestas, dé lugar a numerosas preguntas particulares relacionadas a ella. El estudio de estas Q_i, debe producir la elaboración de una respuesta R_i, y esta respuesta no se puede limitar a una simple “información”. La pregunta generatriz Q puede ser retomada en cualquier momento del proceso de estudio para prolongar la investigación o para recuperarla (Chevallard, 2005). Además, no solo actúa como eje articulador en todo el proceso, sino que junto con las Q_i (preguntas derivadas) son origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio (Barquero, Bosch y Gascón, 2011). La búsqueda de respuestas R_i a estas preguntas Q_i, debería conducir a la construcción de un gran número de saberes, permitiendo recorrer el programa de estudio propuesto en un curso, o al menos, una buena parte de él.

2.1. Actividades de estudio e investigación (AEI)

Las AEI dan lugar a procesos de estudio e investigación cuyo punto de partida son las preguntas. Chevallard (2013c) propone que el abordaje de una AEI debe conducir al grupo de estudio a encontrar los elementos del saber deseado, o al menos, tener mayor probabilidad de encuentros con una OM que se espera estudiar. En sus formulaciones iniciales, Chevallard (2004, 2005, 2006) propone la noción de

AEI como un tipo de "modelo didáctico" útil para aportar "ayudas" al profesor y, en especial, para tratar de hacer frente al problema de la construcción no funcional de las organizaciones matemáticas escolares. De alguna forma, las AEI retomarían un concepto clave de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y a su propuesta de reconstrucción funcional de los saberes matemáticos a partir de "situaciones fundamentales", con la intención de encontrar y activar una "razón de ser" o un "sentido" de este saber dentro del proceso de estudio. Así, el diseño de una AEI se inicia a partir de una "situación del mundo", una cuestión problemática cuya resolución requiere la reconstrucción de la OM local en cuestión, siendo el profesor el que propone dicha cuestión en el aula. Una vez que la situación ha sido presentada a la comunidad de estudio, se inicia un proceso que puede describirse mediante los momentos o dimensiones de dicho proceso de estudio (Bosch y Gascón, 2010).

La cuestión generatriz de una AEI, aunque sea sugerida por el profesor es abordada por la comunidad de estudio. No es una cuestión que pueda resolverse llevando a cabo una tarea escolar previamente establecida y con una respuesta predeterminada. De hecho, las respuestas tentativas que vayan surgiendo serán consideradas y contrastadas por la propia comunidad de estudio, en lugar de delegar al profesor la responsabilidad absoluta de dicha evaluación. A lo largo del desarrollo de una AEI aparecerán otras dimensiones del proceso de estudio, por ejemplo, momentos donde será necesario llevarse a cabo un repertorio de "ejercicios" de manera sistemática. De esta forma se pondrá en marcha el momento del trabajo de la técnica, provocando el cuestionamiento el alcance de las diversas técnicas. La emergencia de "nuevas" técnicas (aunque sólo sean "nuevas" para la comunidad de estudio en cuestión) provocará nuevas necesidades tecnológico-teóricas que se materializarán en la "síntesis" que se lleva a cabo, prioritariamente, en el momento de la institucionalización, cuya gestión no debe recaer en exclusiva al profesor (Bosch y Gascón, 2010). En consecuencia, una integración de las AEI en el sistema de enseñanza requeriría un cambio, una nueva función en los topos del profesor: la necesidad de conocer alguna funcionalidad o razón de ser de las OM curriculares. Además, las AEI necesitan, asimismo, un cambio en el lugar del alumno, ya que incorpora en su topos (conjuntos de gestos didácticos a realizar) la posibilidad de participar en la gestión de casi todos los momentos del proceso de estudio que, en la pedagogía monumentalista tradicional, se situaban bajo la responsabilidad exclusiva del profesor (Bosch y Gascón, 2010).

Si bien la noción de AEI, respecto a la noción de REI, es un dispositivo más limitado en términos de amplitud de recorridos, su implementación resulta viable en la medida en que se pretende alcanzar un punto intermedio en el intento de pasar de una pedagogía monumentalista a una pedagogía más funcional. Así, inmerso en el marco de la TAD y con el objetivo de introducir gestos de la PICM tales como la formulación de preguntas y búsqueda de respuestas, este trabajo presenta el diseño e implementación de una posible AEI para estudiar Cuerpos Geométricos con un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario argentino. Se describe todo el proceso de estudio a partir de duplas preguntas-respuestas e identificando las posibles OM encontradas y/o reencontradas durante este proceso.

3. Metodología de la investigación

En esta sección se describe el tipo y diseño de la investigación, las decisiones relativas a la selección del curso, que contempla la institución, la edad de los estudiantes, la conformación de los grupos, la modalidad de trabajo, entre otros aspectos. Además, se describen las decisiones referidas a la recolección de los datos y a la manera en que se describirá el proceso de estudio.

La investigación es de tipo cualitativa. Se busca interpretar y comprender el desarrollo e implementación de la AEI en un curso de Matemática de segundo año del nivel secundario argentino. Se pretende describir los hechos educativos que se vivenciaron en la clase, en cada grupo de estudiantes y en la comunidad de estudio en su conjunto. El diseño es exploratorio y descriptivo porque la implementación de una AEI en la escuela secundaria (estudiantes de 13-14 años), sus características e implicancias, es un problema de investigación que ha comenzado a ser explorado por algunas investigaciones, pero no tanto en los primeros años del nivel secundario.

La AEI fue diseñada e implementada durante el tercer trimestre en las clases usuales de Matemática de una escuela secundaria, del Instituto Don Bosco de la ciudad de Bahía Blanca (Argentina). El grupo estaba compuesto por 36 estudiantes (entre 13 y 14 años) y corresponde al segundo año del nivel secundario. El grupo fue seleccionado porque una de las autoras del trabajo era la profesora a cargo del mismo. Durante la implementación de la AEI, los estudiantes se organizaron en 8 grupos (rotulados con la letra G): 5 grupos de 5 estudiantes cada uno, 2 grupos de 4 estudiantes cada uno y 1 grupo de 3 estudiantes. Se conformó esa cantidad de grupos (ni más ni menos) porque se dejó libertad de elección a los estudiantes en la conformación de los mismos. Las clases se desarrollaron en la Biblioteca de la Institución, que permitía físicamente trabajar en grupo y acceder con facilidad a los distintos recursos (tales como libros, conexión a Internet, diccionarios, enciclopedias, entre otros). La AEI fue implementada durante dos meses hacia fin del año 2014, con un total de 21 clases de una hora reloj de duración cada una, distribuidas en cuatro clases semanales. La Institución es de gestión privada y la profesora a cargo del curso es la investigadora. Los alumnos utilizan, por resolución institucional, un libro de texto, en este caso Activados Matemática 2, Editorial Puerto de Palos del año 2013. Por esta razón, durante el desarrollo de la AEI se utilizaron y resolvieron actividades, seleccionadas por la profesora, referidas a las cuestiones formuladas durante la clase. La AEI parte de la pregunta: Q_0: *¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm^2?* La idea inicial de esta pregunta se obtuvo a partir de algunos apuntes y vídeos referidos a optimización de funciones. Luego, la profesora (en el papel de investigadora) diseñó Q_0 y la compartió con sus profesores colegas del área, quienes le indicaron algunas sugerencias.

	EJES	NÚCLEOS SINTÉTICOS DE CONTENIDO
MATEMÁTICA	Geometría y magnitudes	Figuras: triángulos y cuadriláteros – Cuerpos: prismas, antiprismas, pirámides, cilindros, conos, esferas y cuerpos arquimedeanos – Lugar geométrico: circunferencia – Unidades de longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, ángulos – Perímetro – Área - Volumen
	Números y operaciones	Números enteros – Números racionales. Noción de número irracional – Notación científica
	Introducción al Álgebra y al estudio de funciones	Funciones – Función lineal – Funciones de proporcionalidad inversa – Ecuaciones de primer grado con una incógnita
	Probabilidades y estadística	Presentación de datos. Tablas y gráficos – Medidas de tendencia central: media, mediana y moda – Introducción a la combinatoria – Fenómenos y experimentos aleatorios - Probabilidad

Tabla 1. Contenidos oficiales propuestos para 2º año del secundario.

El hecho de responder Q_0 permitió una cobertura completa de la Unidad 6: Cuerpos, en concordancia con lo propuesto por los diseños curriculares de Matemática para segundo año de la provincia de Buenos Aires. Estos contenidos (Tabla 1) son propuestos por la Dirección General de Cultura y Educación del Gobierno de la provincia de Buenos Aires. En la Tabla 1 se resaltan aquellas nociones que fueron abordadas en este proceso de estudio.

Conviene destacar que previo a la implementación de la AEI, se realizó un esquema general de posibles preguntas a derivar y posibles aspectos de la OM Cuerpos que podrían ponerse en juego (Figura 1). No se trata de un análisis a priori minucioso, sino de la mención de las posibles preguntas derivadas y los saberes geométricos posibles de abordar. En la sección destinada a la descripción del proceso de estudio, se colocan cuatro esquemas que sintetizar los recorridos de las preguntas que efectivamente se formularon y exploraron durante el proceso de estudio. Es importante mencionar esta diferencia entre ambos esquemas.

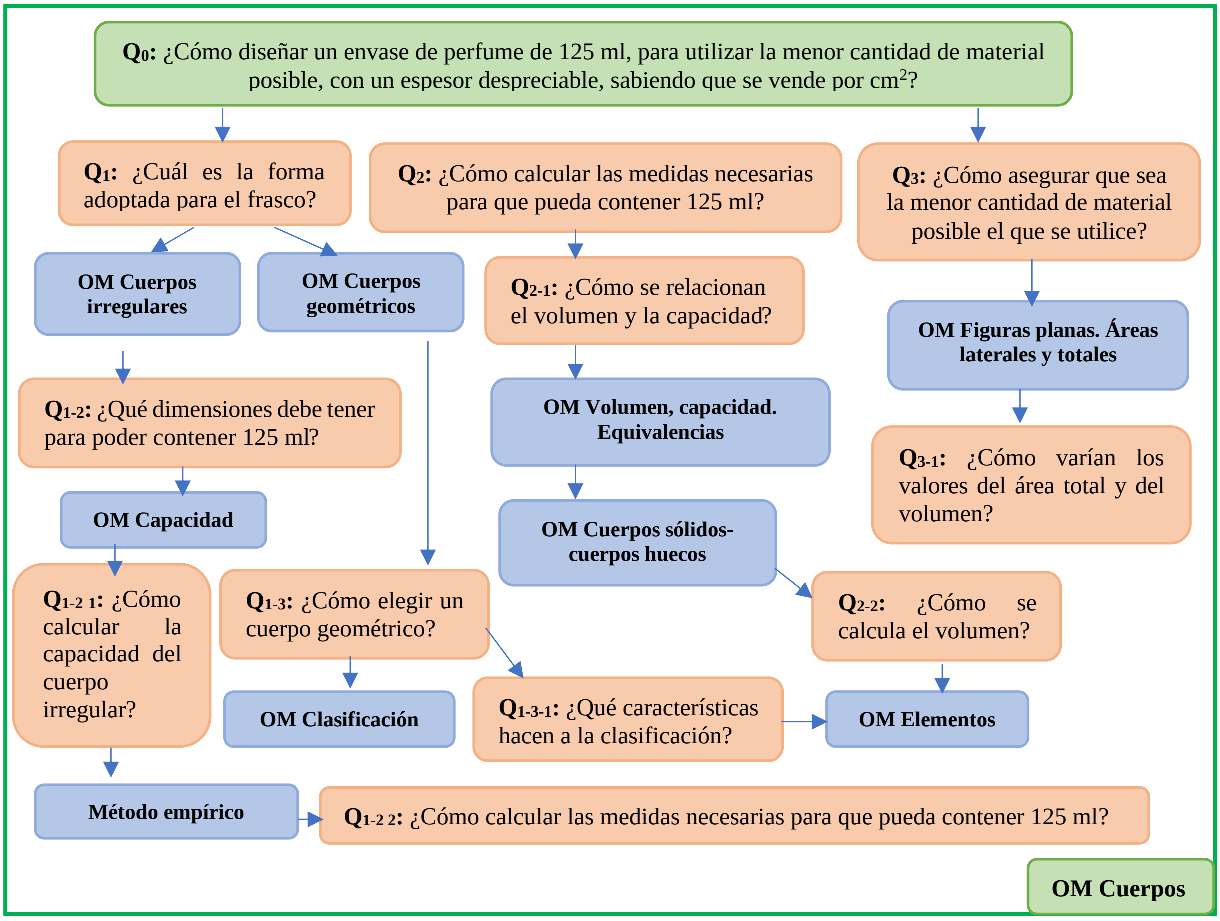

Figura 1. Posibles preguntas derivadas y saberes geométricos involucrados.

Así se plantea la necesidad de estudiar las áreas laterales de los cuerpos, las figuras planas que los componen, sus fórmulas de área, sus desarrollos y su relación directa con el volumen.

Durante la implementación de la AEI se realizó la recolección de datos a partir de los siguientes registros:

- Las producciones de todos los estudiantes de todas y cada una de las clases: se retiraban al finalizar cada clase para poder escanearlos, y eran devueltos en el próximo encuentro.
- Notas de campo del tipo descriptivo: referidas a los acontecimientos experimentados mediante la escucha y la observación directa en el entorno. Buscó ser una herramienta de interpretación no interactiva que describió la AEI, con el objetivo de captar la imagen de la situación, las conversaciones y las reacciones observables lo más fielmente posible.
- Diario de clase de cada alumno: conformado por los protocolos personales de los estudiantes.
- Diario de investigación de los grupos: este registro fue realizado en un documento de Google, con el objetivo de poder explicitar la síntesis del trabajo diario, por parte de los estudiantes quienes se fueron organizando para su escritura, además los otros integrantes del grupo podían hacer aportes, comentar y completar si lo creían necesario. Al finalizar el desarrollo de la AEI, este diario fue entregado por los estudiantes de forma impresa.
- Diario del grupo del proyecto: se confeccionó un diario grupal, su escritura estuvo a cargo de un encargado de cada grupo rotativo, los alumnos podían ir completando si creían que estaba incompleto. Este registro permitió apuntar las síntesis de las puestas en común y las preguntas que quedaban para trabajar e investigar. Si en la clase se trabajó por grupos, se compartía en qué trabajó ese grupo en particular, y los otros grupos podían comentar que habían producido.
- Planilla con la lista de los alumnos donde se registraron las asistencias/ausencias de los alumnos y las entregas de sus producciones.

Los estudiantes no estaban habituados a trabajar con esta metodología, es decir, partir de una pregunta. Por ello fue necesario redactar un contrato con las pautas de trabajo para aclarar la nueva manera de “estudiar” (a ellos y a su familia).

La descripción se realiza teniendo como fuente principal los registros relativos a las observaciones y apreciaciones diarias del docente y a los protocolos de los alumnos. La descripción del proceso de estudio se estructura en términos de las duplas preguntas-respuestas, es decir, de las preguntas derivadas y la búsqueda de sus posibles respuestas. También se detallan los tipos de tareas y las técnicas abordadas, y se presentan las actividades propuestas por la profesora. Se describe el trabajo grupal del curso durante las clases. No es posible indicar un orden cronológico general del proceso de estudio ya que no todos los grupos trabajaron en el mismo orden y respetando el mismo tiempo, por el contrario, se buscó presentar el trabajo general de los alumnos, haciendo referencia a algunas investigaciones particulares de ciertos grupos. Cabe aclarar que, si bien se intentó respetar el recorrido y los tiempos de los grupos, cada cierta cantidad de clases, luego de las puestas en común donde todos los grupos exponían su trabajo, se seleccionaban las preguntas comunes a todos los grupos en general para continuar trabajando, pero manteniendo algunas interrogantes particulares de cada grupo. En la sección siguiente, describimos el proceso de estudio desarrollado por el grupo de estudiantes y la profesora. Realizamos esta descripción a partir de las preguntas derivadas de la inicial y las respuestas construidas. Es decir, en función de las duplas preguntas-respuestas, tal como se propone en una PICM.

4. Resultados de la implementación: descripción del proceso de estudio en términos de las duplas preguntas y respuestas

Como se mencionó anteriormente, describiremos el proceso de estudio a partir de las preguntas derivadas y las formas de exploración de respuestas. Se divide esta sección a partir de las OM que se van desprendiendo del estudio en clase en función de las preguntas derivadas. Así, tendremos cuatro subsecciones relativas a: la OM en torno a las unidades de medida (Q_1, Q_2 y sus derivadas), la OM relativa a la notación científica (las derivadas de $Q_{2\text{-}3}$), la OM sobre cuerpos geométricos, capacidad y volumen (Q_3, Q_4 y sus derivadas) y finalmente, la OM vinculada a cuerpos geométricos y área lateral (Q_5, Q_6 y sus derivadas y Q_7). Destacamos que esta distinción se realiza solamente a los efectos de describir el proceso de estudio, no significa que no haya vínculos o conexión entre esas OM puesto que, en clase, cada una de ellas fue derivándose de las otras. En cada subsección colocamos un esquema parcial de las preguntas derivadas y los tipos de tareas que pudieron explorarse. El trabajo comenzó con la búsqueda de respuesta a la pregunta propuesta por la profesora: Q_0: *¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml con un espesor despreciable, utilizando la menor cantidad de material posible, sabiendo que se vende por cm^2?*

4.1. OM en torno a las unidades de medida

Al proponer esta pregunta, los estudiantes no sabían con qué nociones matemáticas podrían responderla. La profesora les indicó entonces que podían segmentarla anotando lo que consideraran necesario con el objetivo de poder comprenderla. De esta forma, los estudiantes hacen referencia a las equivalencias entre cm^2 y ml y reformularon parte del enunciado en los siguientes términos: "*Es necesario saber el tamaño de nuestro perfume en cm^2 (porque está en ml) para usar el menor material posible*". La primera clase se centró en este tipo de actividad, es decir, formular cuestiones, realizar aclaraciones, vinculaciones, etc., con el objetivo de comprender la pregunta inicial y, así, comenzar a buscar respuestas. Al finalizar la clase se realizó una puesta en común donde se compartieron las dudas de cada uno de los grupos. En este momento, se notó cierta incertidumbre ya que los estudiantes no tenían una "guía" de cómo debían proceder. Esta modalidad de trabajo es diferente a la que están habituados los estudiantes y, por ello, la profesora les sugirió que formulen nuevas preguntas que les ayuden a comprender la pregunta Q_0 y que las registren en sus apuntes. Posteriormente, cada grupo compartió sus preguntas e ideas. Entre ellas, la pregunta común a todos los grupos se refiere al espesor despreciable. Conviene aclarar que las preguntas se consideraban tal como eran formuladas por los estudiantes: Q_1: *¿Qué significa espesor despreciable? ¿Qué función cumple?*

Por ejemplo, uno de los grupos dio respuesta a Q_1 recurriendo a un diccionario de la Editorial Kapelusz: "*Espesor: grosor de un sólido de forma laminar. Densidad o condensación de un fluido o una masa*". Luego de la sociabilización, se acordó entre toda la clase que *Espesor Despreciable* implica no tener en cuenta el grosor del envase del perfume. Se continuó en la exploración de la Q_0, y buscando avanzar, los estudiantes relacionaron las magnitudes que se mencionan en la formulación de la pregunta, es decir, ml y cm^2. Esto condujo a la formulación de Q_2: *¿A cuántos ml equivale un cm^2?*

G6 consultó el manual de ingreso, que los mismos estudiantes citan en su carpeta. Luego de analizar lo que este manual propone, los estudiantes concluyeron que ml es equivalente a cm^2. Y lo mostraron para la magnitud propuesta en la pregunta. Los diferentes grupos investigaron en distintas fuentes bibliográficas (al trabajar en la biblioteca se tuvo un fácil acceso a una variada oferta de libros). Al realizar la discusión grupal donde los alumnos debían comunicar y defender sus ideas, los integrantes del G6 pudieron ver la inconsistencia de su conclusión, es decir que ml no es equivalente a cm^2. En clase se continuó la investigación sobre las equivalencias entre las unidades de medida a partir de la consulta a diferentes libros escolares, pues se tenía a disposición la biblioteca del establecimiento. El G6, si bien no respondía a su pregunta, tomó nota de la relación existente entre capacidad, masa y volumen. Indagaron cómo esta nueva información podía ayudarlos a resolver la pregunta. Utilizaron la relación de equivalencia entre capacidad y volumen, y la aplicaron en un cubo para poder responder la cuestión Q_0.

Por su parte, G7 formuló una nueva pregunta, que compartió con el resto de la clase: $Q_{2\text{-}1}$: *¿Los perfumes se venden en* cm^2*?* Uno de los alumnos decidió consultar esto en una farmacia, donde le indicaron que se vendían por cm^3 o ml. Esto condujo a la necesidad de estudiar e investigar los cm^2, cm^3 y ml para poder entender las relaciones entre ellos: $Q_{2\text{-}2}$: *¿Qué son* cm^2*,* cm^3 *y ml?* Los grupos consultaron distintas fuentes y optaron por una explicación que les fuera comprensible, como se muestra en la Figura 2. Por ejemplo, G8 representa un cuadrado de lado 1cm, indicando que las unidades resultantes de su superficie es cm^2. Luego, representan un cubo donde colocan la base, la altura y la profundidad (Figura 2). Explican la equivalencia entre ml y cm^3. Buscaron responder parte de la pregunta Q_0, construyendo un posible envase.

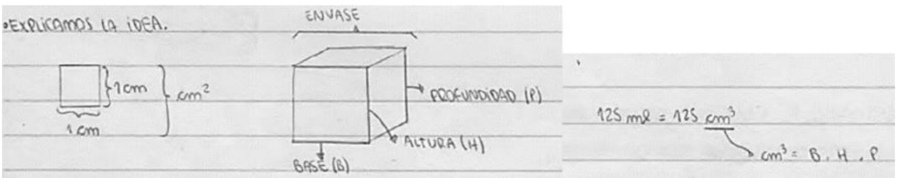

Figura 2. Equivalencia entre ml y cm^3. Explicación del proceso del G8.

G1 respondió la pregunta (Figura 3) de otra forma. Comenzaron por explicar cómo se origina un m^3 en forma algebraica y luego a partir de una representación gráfica. Realizaron el mismo proceso para los cm^3 y dm^3:

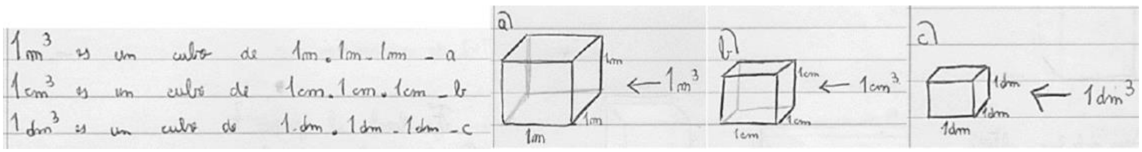

Figura 3. Técnica utilizada por el G1 para obtenerlas unidades de volumen.

El G6 registró cómo realizar el pasaje de una unidad de volumen a otra. Partieron de una información obtenida de un sitio web, que registraron como tal y que luego ejemplificaron basándose, según la nota de la parte superior izquierda de la Figura 4, en el método utilizado para trabajar con unidades de longitud:

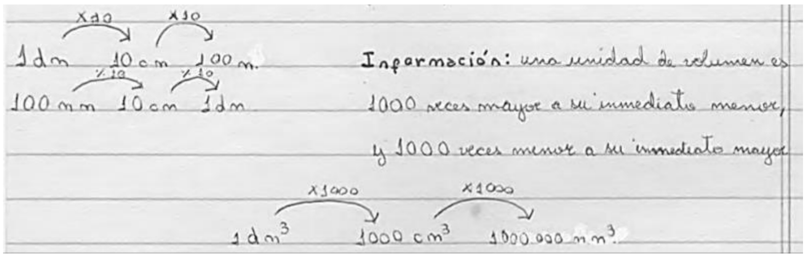

Figura 4. Ejemplo de pasaje de unidades de volumen realizada por G6.

La puesta en común permitió compartir las maneras de hacer, las técnicas para resolver las tareas relativas a las equivalencias entre unidades. La elección de la técnica no fue única, los alumnos propusieron diferentes maneras. También se hizo referencia a “unidades de medida”, lo que condujo a un debate en torno a esta noción. De aquí surgen las preguntas siguientes: $Q_{2\text{-}3}$: *¿Qué es una unidad de medida? ¿Para qué sirve?*

Además de la definición de unidad de medida, los alumnos consideraron apropiado escribir las unidades y algunas nociones que aparecen en Q_0 y, otras a las que se hizo referencia en las clases anteriores. Los alumnos vincularon algunas nociones estudiadas en Físico-Química, de donde reescriben que el volumen es una propiedad extensiva de los cuerpos. En este momento del proceso de estudio, la profesora consideró necesario afianzar la técnica relativa al cambio de unidades. Los alumnos habían trabajado el año anterior medidas de longitud y superficie, y ese año ampliaron a unidades de volumen y capacidad. Por ello se trabajó con cuatro tareas seleccionadas por la profesora del libro utilizado en el aula. Las mismas refieren a la equivalencia entre las diferentes unidades de longitud y requieren que los estudiantes fundamenten sus decisiones. La primera tarea consiste en determinar si una serie de equivalencias propuestas son correctas o no, justificando los casos de no acuerdo. La segunda permite evaluar si se había logrado comprender tanto el concepto de m^2, la diferencia entre m y m^2, y el cambio de unidades. Las dos tareas restantes correspondían específicamente al trabajo de la técnica respecto a las equivalencias entre unidades de medida de área y de volumen. Conviene mencionar que cada estudiante resolvió con la técnica que consideró más apropiada. El esquema siguiente sintetiza el recorrido realizado hasta aquí.

Q_0: ¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm^2?

Q_1: ¿Qué significa espesor despreciable? ¿Qué función cumple?

$Q_{2\text{-}3}$: ¿Que es una unidad de medida? ¿Para qué sirve?

OM	TIPOS DE TAREAS
Noción de unidad de medida de superficie. Noción de unidad de medida de volumen. Noción de unidad de medida de capacidad	Definir unidades de medida de superficie Definir unidades de medida de volumen Definir unidades de medida de capacidad. Expresar una medida de longitud en unidades equivalentes de la misma magnitud. Expresar una medida de superficie en unidades equivalentes de la misma magnitud. Expresar una medida de volumen en unidades equivalentes de la misma magnitud.

Q_2: ¿A cuántos ml equivale un cm^2?

$Q_{2\text{-}1}$: ¿Los perfumes se venden en cm^2?

$Q_{2\text{-}2}$: ¿Qué son cm^2, cm^3 y ml?

OM	TIPOS DE TAREAS
Unidades de medida de superficie Unidades de medida de volumen Unidades de medida de capacidad Pasaje de unidades de volumen. Equivalencia entre ml y cm^3	Explicar que son los cm^2 Explicar que son los cm^3 Explicar que son los ml Expresar una misma magnitud, en unidades de medida equivalentes. Expresar una unidad de medida de capacidad en una de volumen equivalente.

Figura 5. Preguntas Q_1, Q_2, sus derivadas y los tipos de tareas explorados.

4.2. OM relativa a la notación científica

Al realizar los cambios de unidades necesarios surgen preguntas tales como: $Q_{2\text{-}3\ A}$: *¿Por qué $1{,}34x10^{-6}=0{,}00000134$?* y $Q_{2\text{-}3\ B}$: *¿Por qué algunas calculadoras escriben los resultados con exponente negativo?* Ambas condujeron al concepto de Notación Científica. Y entonces, la pregunta a responder fue: $Q_{2\text{-}3\ C}$: *¿Qué es la notación científica? ¿Para qué sirve?*

Esta pregunta permitió un (re)encuentro con la noción de potencias de exponente negativo asociado a la notación científica. De esta forma, se produce un reencuentro con las potencias con exponente negativo a partir de una necesidad, producto de la búsqueda de respuestas a una pregunta. Lo mismo con respecto a la notación científica. El encuentro con "notación científica" no fue impuesto por la profesora sino producto de la formulación de una pregunta a partir de los datos arrojados por la calculadora. Esta OM no estaba prevista trabajar en este recorrido, pero se pudo explicar, al surgir como una necesidad por parte los alumnos. Esto permitió dotar de sentido el estudio, al menos parcial, de esa obra. No se profundizó en esta OM, por no ser necesario para Q_0. Este es, sin dudas, un ejemplo del estudio parcial de una OM como una necesidad de aportar respuestas, es decir, una OM emergente de una necesidad de aportar respuestas. Se estudió lo necesario y pertinente para avanzar en la construcción de la misma. Estos son gestos claves que Chevallard (2013a, 2013b) propone dentro de una PICM.

$Q_{2\text{-}3}$: ¿Que es una unidad de medida? ¿Para qué

$Q_{2\text{-}3\,A}$: ¿Por qué $1{,}34 \times 10^{-6} = 0{,}00000134$?

OM	TIPO DE TAREAS
Potencia de números racionales con exponentes enteros.	Operar con números racionales.

$Q_{2\text{-}3\,B}$: ¿Por qué algunas calculadoras escriben los resultados con exponente negativo?

$Q_{2\text{-}3\,C}$: ¿Qué es la notación científica? ¿Para qué sirve?

OM	TIPO DE TAREAS
Noción de notación científica	Leer y escribir un número en notación científica

Figura 6. Preguntas derivadas de $Q_{2\text{-}3}$ y los tipos de tareas explorados.

4.3. OM sobre cuerpos geométricos, capacidad y volumen

Para continuar y retomar la pregunta inicial, la profesora propuso a los alumnos traer frascos de perfumes para trabajar con ellos. Los alumnos analizaron sus formas, las posibles unidades de medida, colores, nombres, etc. Muchos alumnos establecieron similitudes entre estos envases y los cuerpos geométricos que conocían hasta el momento: algunos aludían, por ejemplo, a que tal envase "se parece a un cubo" o "es una esfera, pero más alargada" o "parece un cilindro retorcido", etc. En ese momento, la profesora decidió incorporar a la clase cuerpos geométricos construidos en madera y otros construidos con cartón, instrumentos disponibles en la institución. A partir de este trabajo, se acordó continuar con la pregunta Q_3: *¿Cuáles son los cuerpos geométricos? ¿Cómo se clasifican?* El trabajo de cada grupo y su puesta en común generó un esquema a modo de síntesis (Figura 7).

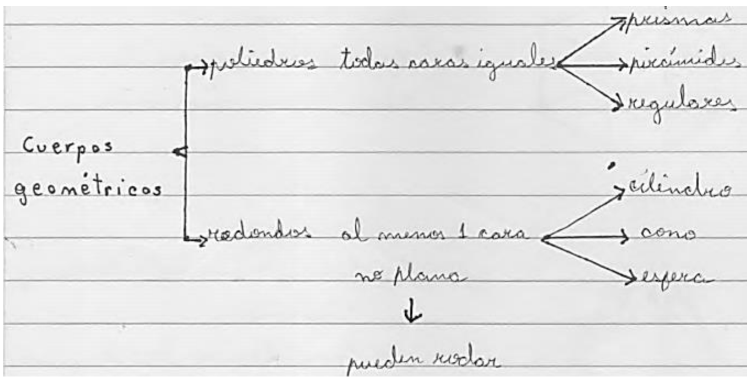

Figura 7. Copia del esquema elaborado por los alumnos como síntesis de la puesta en común.

La exploración de los cuerpos geométricos condujo al cuestionamiento sobre el octaedro truncado y los grupos acordaron, en un principio, que el envase de su perfume podría tener esta forma. Buscaron la fórmula que les permita calcular el volumen, pero no alcanzaron consensuar respecto a ella. Construyeron los poliedros regulares y un octaedro regular de 4cm de arista. De todos los cuerpos armados, concluyeron que el tetraedro es el que menos material utiliza. Además, investigaron las características en Internet. Se acordó entonces continuar con la búsqueda de respuestas a la siguiente pregunta: $Q_{3\text{-}1}$: *¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo geométrico?* Para comenzar a responder esta pregunta, la profesora decidió proponer a los estudiantes algunas tareas del libro del aula con el objetivo de investigar y trabajar las técnicas de cálculo del volumen de algunos de los cuerpos antes mencionados. Para ello debían poder clasificar el cuerpo y comprender cuáles son los elementos que forman parte de cada uno de ellos. La Figura 8 presenta las tareas seleccionadas por la profesora:

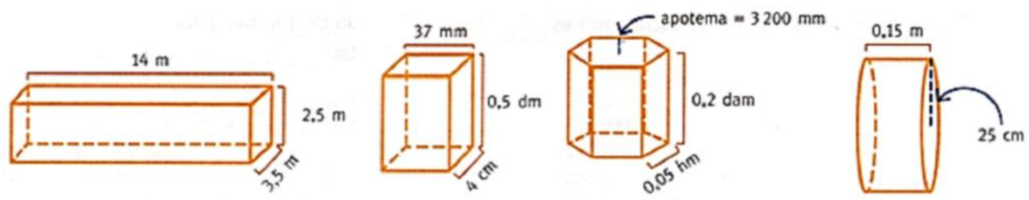

Figura 8. Extracto Página 188. Capítulo 8: Cuerpos. Volumen del prisma y del cilindro.

Ningún grupo calculó el volumen del tercer cuerpo argumentando que no sabían cómo calcular el área de la base. Se decidió resolverlo en clase, en conjunto, luego de buscar y determinar la fórmula correspondiente. Luego, se propuso el cálculo del volumen de 4 cuerpos, pirámides y cuerpos redondos (Figura 9).

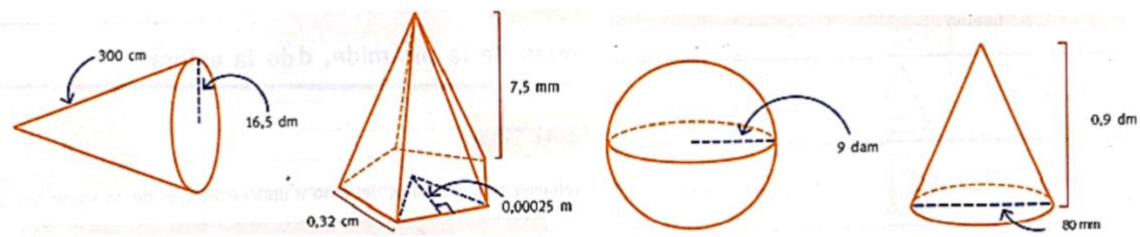

Figura 9. Extracto Página 190. Capítulo 8: Cuerpos. Volumen de la pirámide, el cono y la esfera.

Esta tarea condujo a una revisión de la clasificación de los cuerpos realizada anteriormente y requirió ampliaciones en las anotaciones, agregando los nombres de los elementos a cada uno de los cuerpos. Por ejemplo, al cuerpo de la pirámide le agregaron “apotema lateral” o “altura del triángulo”, “cúspide”, “apotema de la base”, etc. Una vez resueltas las tareas anteriores, la profesora propuso responder las preguntas incluidas en el libro de clase (Figura 10). Estas preguntas conducen a cierto nivel de justificación y no sólo en función del trabajo con fórmulas.

. Respondan y expliquen las respuestas.
a. Un cono y una pirámide, ¿pueden tener el mismo volumen?
b. ¿Se puede calcular el volumen de un cono conociendo la generatriz y su altura?
c. ¿Se puede calcular el volumen de una esfera conociendo su diámetro mayor?
d. ¿Cuántos conos se necesitan para igualar el volumen de una esfera si ambos tienen el mismo radio, y la altura del cono es igual al radio?

Figura 10. Extracto página 189. Capítulo 8: Cuerpos. Volumen de la pirámide, cono y esfera.

Como resultados de las respuestas a estas preguntas, se formuló una variante de la pregunta b: Q_{3-2}: *¿Alcanza para calcular el volumen de un cono, saber solo los valores de la generatriz y de la altura?* Durante la socialización, la mayoría de los grupos respondió que no era posible calcular el volumen de un cono conociendo su generatriz y altura, en cambio el grupo 4 no solo respondió que sí era posible, sino que, además, justificó de qué manera podía hacerse, expresando un embrión de tecnología que relaciona ambos elementos y que justifica la técnica de cálculo. Proponen utilizar el teorema de Pitágoras que encontraron en el libro de texto. Se identifica aquí otro (re)encuentro con ciertos componentes de una OM producto de la necesidad de aportar respuestas a una pregunta, tal como se espera que ocurra en una PICM (Chevallard, 2013a, 2013b). En este caso, el encuentro con el teorema de Pitágoras, es decir, la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo y el nombre que reciben cada uno de ellos. Esta conclusión llevó a cuestionar qué ocurre en la pirámide con sus elementos, ya que el cono y la pirámide tienen "similitudes". Luego, se formuló la siguiente pregunta: $Q_{3\text{-}2\,A}$: *¿Cómo se relacionan los valores de los distintos elementos de las pirámides y el cono?*

A partir de la relación pitagórica, los alumnos realizaron un cuadro de síntesis. Allí pudieron transponer la relación entre la generatriz, altura y radio del cono a la relación de la altura del cuerpo, apotema lateral o altura lateral y la apotema de la base (aunque todavía la registraron como r) en la pirámide. Para poder comprender mejor algunos cuerpos, la profesora propuso la tarea de armarlos y marcar sus elementos. Se comenzó a trazar en el desarrollo de dos pirámides, una de base pentagonal y otra de base hexagonal. Se marcaron los elementos en cada una, en las caras laterales y la base. Un integrante de G6, registró el trazado de los elementos de la pirámide en un dibujo del cuerpo de la pirámide en 3D (Figura 11). Al armar el cuerpo, la altura se indicó con un palillo pequeño, quedando formados dos triángulos rectángulos: el que se forma con la altura del cuerpo, la apotema lateral y la apotema de la base (encontrado con anterioridad al responder la pregunta $Q_{3\text{-}2\,A}$) y el que se forma con la altura del cuerpo, con el radio de la base y la arista lateral. El mismo integrante de G6 decidió registrar (Figura 12) los dos triángulos rectángulos que se forman con la altura del cuerpo. Nombró los elementos que lo componen y los dibujó unidos por la altura, elemento que forma parte de ambos triángulos.

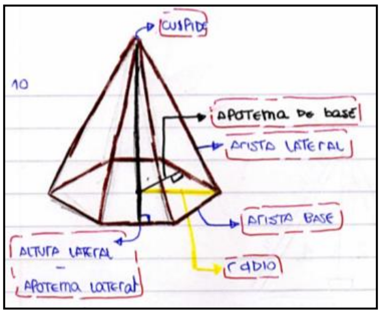

Figura 11. Figura de análisis de G6, elementos de una pirámide.

Figura 12. Registro de G6 de los triángulos rectángulos que se forman en una pirámide con la altura del cuerpo.

Q_0: ¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm^2?

Q_3: ¿Cuáles son los cuerpos geométricos? ¿Cómo se clasifican?

OM	TIPOS DE TAREAS
Cuerpos geométricos. Clasificación. Cuerpos redondos. Cuerpos poliedros.	Definir cuerpos geométricos Clasificar los cuerpos geométricos Describir y reconocer los cuerpos redondos Describir y reconocer los cuerpos poliedros

$Q_{3\text{-}1}$: ¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo geométrico?

OM	TIPOS DE TAREAS
Noción de volumen. Elementos de los cuerpos.	Definir volumen. Calcular el volumen de cuerpos poliedros. Calcular el volumen de cuerpos redondos. Reconocer, identificar y trazar los elementos de cada uno de los distintos cuerpos.

$Q_{3\text{-}2}$: ¿Alcanza para calcular el volumen de un cono, saber solo los valores de la generatriz y de la altura?

OM	TIPOS DE TAREAS
Triángulos rectángulos Teorema de Pitágoras	Reconocer la relación pitagórica en los triángulos rectángulos Reconocer la relación pitagórica entre los elementos del cono: generatriz, altura y radio. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras.

$Q_{3\text{-}2\,A}$: ¿Cómo se relacionan los valores de los distintos elementos de las pirámides y el cono?

Q_4: ¿Todos los cuerpos tienen

$Q_{4\text{-}1}$: ¿Cuáles cuerpos tienen capacidad, y cuáles

$Q_{4\text{-}2}$: ¿Cuál es la capacidad de un cuerpo geométrico? ¿Cómo se calcula?

OM	TIPOS DE TAREAS
Cálculo de la capacidad de un cuerpo. Equivalencia entre capacidad y volumen. Área de figuras planas. Volumen de cuerpos geométricos Equivalencia entre unidades de volumen y capacidad. Teorema de Pitágoras.	Comparar unidades de medida de volumen y unidades de medida de capacidad. Reconocer y clasificar los cuerpos geométricos. Calcular el volumen de cuerpos geométricos. Calcular la capacidad de un cuerpo geométrico. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras.

$Q_{3\text{-}1\,A}$: ¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo si no se conoce su fórmula, o no tiene?

OM	TIPOS DE TAREAS
Volumen de cuerpos sólidos irregulares.	Calcular el volumen de cuerpos sólidos irregulares.

OM	TIPOS DE TAREAS
Teorema de Pitágoras. Mediatrices y diagonales Centro y radio de un polígono regular	Reconocer la relación pitagórica entre los elementos de la pirámide: altura del cuerpo, apotema de la base y apotema o altura lateral. Reconocer la relación pitagórica entre los elementos de la pirámide: altura del cuerpo, radio de la base y arista lateral. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras. Construcción de cuerpos (pirámide y cono) en 3D, trazando de sus elementos.

Figura 13. Preguntas Q_3, Q_4, sus derivadas y los tipos de tareas explorados.

Tomaron nota de los pasos realizados, reutilizando nociones disponibles tales como diagonales y mediatrices. La construcción en 3D se repitió con el cono. En este caso, fueron los alumnos quienes aportaron el desarrollo del cuerpo, marcando allí sus elementos. La altura del cono se determinó con un palillo pequeño y pudiendo visualizar, así, el triángulo rectángulo que respondía a la relación pitagórica reencontrada con anterioridad; el triángulo formado por la altura del cono, la generatriz y el radio de la base. El G6 quiso calcular el volumen del tetraedro. Determinaron una fórmula para hallar dicho volumen, pero no lograron comprender el proceso de construcción de tal expresión algebraica. Por ello el grupo investigó la existencia de otra técnica para calcular el volumen del tetraedro: $Q_{3\text{-}A}$: *¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo si no se conoce su fórmula, o no tiene?*

Esta pregunta los condujo a encontrarse con el método denominado "medida del volumen por desplazamiento de líquido". En este procedimiento se toma como referencia un volumen de agua conocido, se sumerge el cuerpo en su totalidad, y se registra la medida del nuevo volumen; por último, se encuentra la diferencia de ambos volúmenes, siendo este valor el del volumen de cuerpo sumergido. Encontraron un método, pero al necesitar sumergir el cuerpo en agua no fue posible llevarlo a cabo, ya que habían construido en papel. Esta pregunta solo la investigó y estudió el G6, como consecuencia de la dificultad de la fórmula del cuerpo seleccionado.

4.4. OM vinculada a cuerpos geométricos y área lateral

En la puesta en común, se decidió en conjunto, formular la siguiente pregunta: Q_4: *¿Todos los cuerpos tienen capacidad?* La exploración de la misma condujo a formular una nueva pregunta: $Q_{4\text{-}1}$: *¿Cuáles cuerpos tienen capacidad, y cuáles no?* Los grupos consensuaron en la siguiente respuesta: "*los cuerpos que tienen capacidad se llaman huecos, y los que no, macizos*". Una alumna del G6 investigó en internet sobre la capacidad de los cuerpos, y registró una explicación donde relaciona la capacidad y el volumen de una misma botella. Es decir, se refiere a la botella diciendo que su volumen es de 1500cm^3, y puede contener 1,5l o 1500ml de agua. Una alumna de G6, vinculó diversas nociones estudiadas hasta ese momento del proceso de estudio con el objetivo de aportar respuestas a la siguiente pregunta, que surgió en su grupo: $Q_{4\text{-}2}$: *¿Cuál es la capacidad de un cuerpo geométrico? ¿Cómo se calcula?* Esta pregunta condujo a un "experimento" con una botella. Se concluyó que, para calcular la capacidad de un cuerpo, se debe calcular el volumen y luego hallar su equivalencia en unidades de capacidad.

A partir de este trabajo, la profesora decidió proponer dos tareas del libro que refieren a la noción de capacidad. La primera de ellas pone en juego la técnica de pasajes de unidades, la relación entre ellas y la equivalencia entre volumen y capacidad. Esto se desarrolla a partir del género de Tareas que podríamos rotular de "Comparar". La segunda tarea, que podríamos agrupar dentro del tipo de tareas de "identificar y clasificar los cuerpos", aborda el reconocimiento de áreas de polígonos y la equivalencia entre unidades de volumen y de capacidad.

Ambas fueron resueltas por los estudiantes y luego, se realizó una discusión grupal para compartir los resultados determinando las resoluciones correctas para cada una de ellas. En esta etapa del proceso de estudio, si bien se ha realizado un estudio de diferentes nociones, quedaba aún por investigar y analizar una parte de la pregunta generatriz, específicamente, respecto a los cm^2. Se decidió entonces que hacía falta investigar cómo vincular la noción de "área" a la de "cuerpos". En este proceso, de una de las investigaciones de los alumnos, surgió el concepto de desarrollo de los cuerpos, y en consecuencia se formuló una nueva pregunta: Q_5: *¿Qué es el desarrollo de un cuerpo?* La respuesta a esta pregunta se aportó a partir de una discusión con la clase en su conjunto y se consensuó que, cuando se hace referencia al "desarrollo del cuerpo", se está indicando o aludiendo al "molde" necesario para construirlo. Uno de los grupos aportó una caja de cartón y vinculó su desarrollo al de un prisma de base cuadrada (Figura 14).

Figura 14. Gráfico de un prisma de base rectangular en perspectiva y su desarrollo.

Luego de este análisis, la profesora propuso a los demás grupos efectuar una tarea similar, aportando a la clase próxima, una caja de la cual se pudiera extraer un "molde". Esto permitió trabajar en torno al "desarrollo en el plano ➔ superficie, cuerpo armado en el espacio➔ volumen". Esto permitió recuperar las nociones exploradas durante las primeras clases, investigando sobre unidades de medidas: $Q_{5\text{-}1}$: *¿Qué calculamos al encontrar el área de un cuerpo?*

Cuando los grupos desarmaron sus cajas, advirtieron una superficie del plano formada por un conjunto de rectángulos, a los cuales es posible calcularles su área. Concluyeron entonces que, para calcular el área de un cuerpo, es posible calcular el área que ocupa el desarrollo del cuerpo en el plano. Luego de esta conclusión, la profesora propuso resolver un tipo de tareas asociado al desarrollo de cuerpos poniendo que involucró la identificación del mismo (indicando su nombre) y el cálculo del área lateral y del área total. Luego de la difusión de las resoluciones de estas tareas, la profesora propuso ampliarlas incorporando otros cuerpos, entre ellos, dos cuerpos redondos. Luego de la difusión de resultados, la profesora propuso un conjunto de tareas cuyo objetivo es integrar las nociones de área y volumen. Las tareas corresponden a una reformulación de las anteriores, demandando el cálculo del volumen de los cuerpos allí presentados. Esto permitió poner en juego las nociones de área, volumen y teorema de Pitágoras. Con el objeto de poder exponer la dependencia entre el valor del área lateral del cilindro y el radio de la base, con su área y volumen, y la necesidad del trabajo algebraico para el trazado del desarrollo de dicho cuerpo, la profesora les propuso la siguiente tarea: "*Cortar 2 rectángulos iguales: a) armar 2 cilindros distintos (hacer las bases correspondientes), b) realizar todo el trabajo algebraico, c) calcular los volúmenes*".

Los estudiantes dedicaron un tiempo importante al proceso de elaboración para poder resolver las tareas. En primer lugar, unieron los extremos del rectángulo y dibujaron el "círculo" que quedaba formado a partir de los pliegues; luego, intentaron darle forma de círculo utilizando un compás, pero no podían lograrlo. Finalmente, trabajaron algebraicamente, basados en la relación entre la base del rectángulo y la longitud de la circunferencia. Para hallar el valor del radio de cada uno de los círculos, los estudiantes plantearon ecuaciones, partiendo de que las longitudes de la circunferencia para ambos círculos son conocidas (coinciden con los lados del rectángulo que forma el área lateral), 18cm y 13cm respectivamente. Al encontrar el valor del radio de cada uno los círculos, pudieron construir los círculos de las bases y armar los cilindros. Al tener los valores necesarios (los radios de los círculos de las bases), pudieron utilizar las fórmulas para calcular las áreas y los volúmenes de ambos cilindros. Luego realizaron los ítems de la tarea propuesta y arribaron a la siguiente conclusión sobre qué cilindro tiene más capacidad. Según sus cálculos, el que tiene mayor radio, tiene más volumen y, por ello, más capacidad. Además, explicaron que, si quisieran aumentar la capacidad del cilindro de menor radio, deberían aumentar la cantidad de material y con ello el área del cuerpo. Como conclusión final, acordaron en que, si el radio es mayor, usan menos material. Se pudo observar que volvieron a Q_0, con el fin de poder resolver "utilizando la menor cantidad de material".

Luego del cálculo del área y volumen de los distintos cuerpos geométricos, la profesora propuso un conjunto de actividades que involucran el pasaje de unidades, el planteo y la resolución de ecuaciones, además de las propiedades y relaciones entre los elementos de los cuerpos. Se tiene aquí otro ejemplo de un estudio por una necesidad. Los estudiantes han planteado y resuelto una ecuación como una necesidad de determinar el radio de una circunferencia para, a su vez, alcanzar un objetivo, que es calcular el área y volumen de un cuerpo. Entendemos estas instancias como un gesto propio de un proceso de estudio más funcional que monumentalista, tal como lo formula Chevallard (2013a, 2013b). Posteriormente, la profesora propone otro tipo de tareas (Figura 15) que pone en juego, específicamente, la determinación de ciertos valores a partir de datos dados.

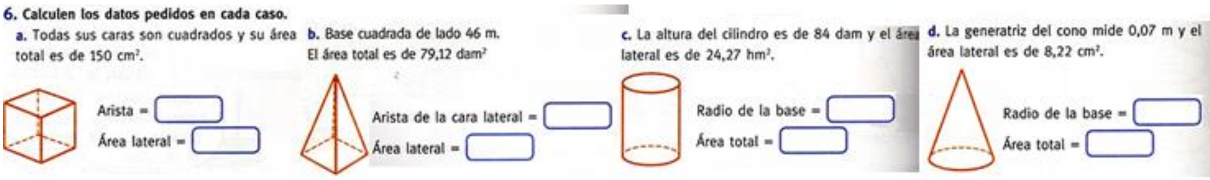

Figura 15. Extracto página 182. Capítulo 8: Cuerpos. Área lateral y total.

La realización de esta tarea les exigió reconocer los elementos de la pirámide y sus propiedades, así como el reconocimiento de los triángulos rectángulos que forman en sus caras. Luego, se proponen otras tareas con el objetivo de volver a abordar la determinación de ciertos valores a partir de datos dados. Podríamos sintetizar hasta aquí, los conceptos involucrados en Q_0 que fueron abordados: las unidades de medida cm^2 y ml, la referencia "espesor despreciable", las unidades de volumen y capacidad, la relación entre ambas, y por último el área de los cuerpos. Para continuar el trabajo se decidió seguir explorando la condición de "*menor material posible*" formulando la pregunta Q_6: *¿Dos cuerpos que tienen la misma área lateral, tienen la misma área total?*

El G4 comparó el área total de un cilindro y un prisma partiendo de que ambos cuerpos tienen la misma área lateral. La altura de ambos cuerpos es de 10 cm. En el cilindro, los 18 cm corresponden a la base del rectángulo del área lateral; por ello coincide con la longitud de la circunferencia de la base. Ello permite encontrar el valor del radio de la base. El trabajo continuó con el prisma de base cuadrada. Luego calcularon el área lateral y el área de la base, y las sumaron. El trabajo continuó con el diseño de un prisma de base cuadrada. En el prisma, los 18 cm corresponden al perímetro de la base. Como es un cuadrado, se puede hallar el valor del lado, dividiendo por cuatro. Luego calcularon el área lateral y el área de la base, y las sumaron. Por último, compararon las áreas totales encontradas. Se decidió indagar un poco más sobre la relación entre área y capacidad y se planteó la siguiente pregunta: Q_{6-1}: *Dos cuerpos que tienen la misma área total ¿tienen la misma capacidad?*

El G4 construyó con papel dos cuerpos con la misma cantidad de material, un cubo y un prisma de base rectangular. Llenó ambos cuerpos con arroz, y llegó a la conclusión de que dos cuerpos que fueron hechos con la misma cantidad de material no necesariamente tienen la misma capacidad. Consensuaron a partir de esta experiencia que: "*Al hacer 2 cuerpos con la misma cantidad de material no tienen la misma capacidad*". Esta conclusión dio origen a la siguiente pregunta: Q_7: *¿Cuál es el cuerpo que con el mismo volumen 125 cm^3, tiene menor área, el cilindro o el prisma?* Un miembro de G1 consultó a su padre, quien le explicó que no se puede conocer el valor de los distintos elementos de un cilindro sin utilizar matemática más avanzada. Por esta dificultad, optaron por la esfera que solo depende de una sola variable, el radio.

Recuperando la pregunta inicial, los grupos tomaron distintas opciones. G4 decidió trabajar con un cubo. Ofrece una explicación de por qué cree que el cubo es el cuerpo que cumple con la condición de Q_0, menor material posible, en base a las conclusiones a las que se fue arribando en relación con capacidad-área total. En las Figuras 16 y 17 se presenta el trabajo y los cálculos que realizó el G4 y G7, respectivamente, para diseñar el envase del perfume con forma cúbica. Luego de trabajo algebraico, G4 arribó a que el cubo debe tener 5 cm de arista y que la cantidad de material a utilizar es de 150 cm^2: "*Sabiendo la capacidad, tenemos el volumen que es 125 cm^3 y calculando el área tenemos la cantidad de material que utilizaremos*". El G3 optó por un envase esférico. Por ello, calculó el valor del radio de la esfera de 125 ml de capacidad. Para asegurarse que tenga 125 ml de perfume y un poco de aire (como los perfumes envasados), tomaron un r=3,2 cm. Este grupo decidió comprobar el volumen de su envase, que es de 137,24 cm^3. El G6 decidió realizar una semiesfera. Igualando la fórmula de volumen de la esfera a 250 cm^3, encontraron el radio de su envase. El radio encontrado es de una esfera es de 250 cm^3, pero desean trabajar con una semiesfera. Por ello muestra que, como una semiesfera es la mitad de una esfera, el volumen de una semiesfera es la mitad del volumen de la esfera, en consecuencia, el radio encontrado corresponde a una semiesfera de 125 cm^3. El G7, luego de la comparación entre el prisma y el cilindro, realizado para responder a la pregunta Q_7, escogió el cilindro. Además, realizó el cálculo de una posible caja para el perfume.

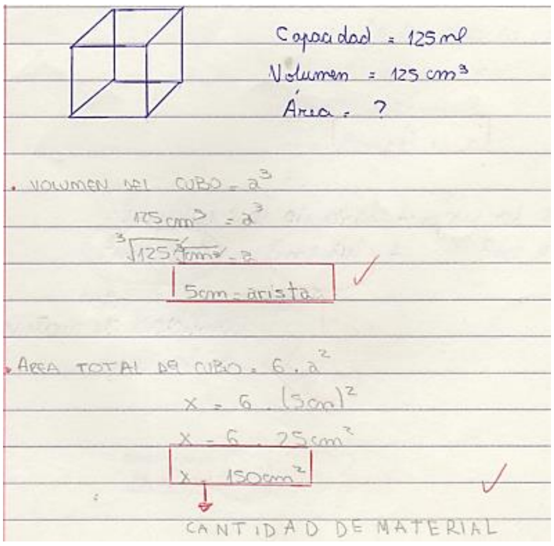

Figura 16. Respuesta del G4 de la pregunta Q_0.

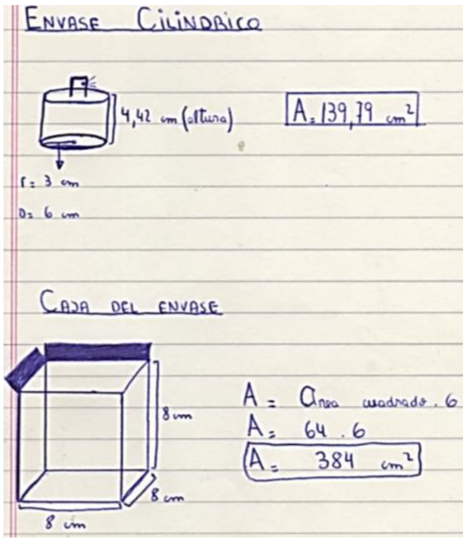

Figura 17. Respuesta de G7 a Q_0.

Q_0: ¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm^2?

Q_5: ¿Qué es el desarrollo de un cuerpo?

OM	TIPO DE TAREAS
Desarrollo de un cuerpo geométrico	Dibujar el desarrollo de un prisma

Q_6: Dos cuerpos que tienen la misma área lateral ¿tienen la misma área total?

OM	TIPOS DE TAREAS
Área de figuras planas Área lateral, área la/las bases y área total de un cuerpo geométrico. Longitud de circunferencia	Diseñar el desarrollo de un cuerpo dado. Calcular en área lateral, área de la/las bases y total de cuerpos geométricos. Planteo y resolución de ecuaciones.

$Q_{5\text{-}1}$: ¿Qué calculamos al encontrar el área de un cuerpo?

OM	TIPOS DE TAREAS
Área de figuras planas Área lateral, área la/las bases y área total de un cuerpo geométrico. Volumen de cuerpos geométricos. Longitud de circunferencia Cilindro: desarrollo del cilindro y cuerpo en 3D. Equivalencia de unidades. Teorema de Pitágoras.	Reconocer un cuerpo dado su desarrollo. Calcular en área lateral, área de la/las bases y total de cuerpos geométricos. Calcular el volumen de cuerpos geométricos. Diseño y construcción de un cilindro. Planteo y resolución de ecuaciones. Resolver problemas. Calcular un elemento del trianguló rectángulo, conociendo los otros dos, planteando el teorema de Pitágoras.

$Q_{6\text{-}1}$: ¿Dos cuerpos que tienen la misma área, tienen la misma capacidad?

OM	TIPOS DE TAREAS
Desarrollo de cuerpos geométricos Cuerpos en 3D Capacidad	Diseño del prisma de base rectangular Diseño del cubo Comparar cantidad de capacidades

Q_7: ¿Cuál es el cuerpo que con el mismo volumen 125 cm^3, tiene menor área, el cilindro o el prisma?

OM	TIPOS DE TAREAS
Equivalencia entre magnitudes de capacidad y volumen Ecuaciones Esfera. semiesfera Prisma rectangular Volumen del Prisma Área lateral y total del prisma rectangular Cilindro Volumen del cilindro Área lateral y total del cilindro	Expresar una unidad de medida de capacidad en su equivalente de volumen. Reconocer en la dependencia del área y volumen de la esfera, de su radio Diseño del prisma de base rectangular Diseño del cilindro Planteo de ecuaciones

Figura 18. Preguntas Q_5, Q_6, sus derivadas, Q_7 y los tipos de tareas explorados.

Se ha caracterizado de esta forma todo el proceso de estudio a partir de duplas preguntas-respuestas. Preguntas derivadas que fueron formuladas por los propios estudiantes y consensuadas por toda la comunidad de estudio. Este proceso dio lugar al estudio de nociones geométricas logrando cierta autonomía en los estudiantes y dándole un lugar, un genuino, a la geometría dentro del aula. Se exploraron una gran cantidad de tipos de tareas que no forman parte de una misma OM. Los esquemas de las Figuras 5, 6, 13 y 18 presentan detallada y de forma minuciosa cada uno de esos tipos de tareas.

Además, cada uno de ellos está vinculado a una OM y emergen de una pregunta. Sin duda, ha sido un proceso de estudio funcional.

5. Reflexiones finales

En este trabajo se describió la implementación de una actividad de estudio e investigación (AEI) para estudiar cuerpos geométricos. La AIE se desarrolló con un grupo de estudiantes (entre 13 y 14 años) del nivel secundario argentino, durante 21 sesiones de clases. La descripción del proceso de estudio se realizó a partir de las preguntas derivadas de Q_0, de las exploraciones de los estudiantes y de las tareas abordadas para las diferentes nociones que iban emergiendo. Concluimos que esta experiencia permitió:

- Desarrollar el estudio de cuerpos geométricos de una forma funcional, con una razón de ser y un sentido, tanto para los estudiantes, como también para la profesora.
- Que los estudiantes se hicieran cargo de la construcción de su saber, comprometiéndose de forma genuina en el proceso de estudio, formulando preguntas, buscando sus propias respuestas, consultando diferentes fuentes, desde libros hasta personas que pudieran ayudarlos.
- Que la actitud de los estudiantes dejara de ser pasiva, logrando una autonomía en los estudiantes, un compromiso e interés en la construcción de su propio saber. Aspectos mencionados por varios autores, por ejemplo, Flores-Compañ, Bellés Agut, Nebot Romero y Tintoré (2019).
- Generó un trabajo colaborativo, donde cada grupo discutió y consensuó resultados y caminos a seguir. Se plantearon debates al interior de cada grupo que les permitió justificar sus ideas y buscar puntos de acuerdo con sus pares y, además, debates con la clase en general en los momentos de difusión de respuestas, de puestas en común, donde se logró un clima de escucha y de respeto. Estas discusiones favorecieron el uso de vocabulario específico por parte de los estudiantes en particular y cierta evolución en la expresión oral en general. Los estudiantes pudieron reconocer la importancia de los aportes de cada uno en los logros grupales. Resultados similares fueron obtenidos por Martín, Fanaro y Parra (2015) y Farías (2015) al implementar dos AEI relativas a fractales y por Corica y Marin (2014) al implementar una AEI sobre ángulos inscriptos en una circunferencia.
- Permitió estudiar diferentes "cuestiones" pertenecientes a ejes distintos del diseño oficial. En general, en una "enseñanza tradicional" suele ocurrir un estudio lineal, es decir, se estudia un eje, por ejemplo "números", hasta agotar lo que se propone a estudiar en el programa y luego, una vez finalizado este estudio y una vez acreditado, se prosigue al eje siguiente. En este caso, el proceso de estudio no siguió un orden "lineal". Se lograron abordar cuestiones de diferentes ejes (geometría y magnitudes; números y operaciones e introducción al álgebra y al estudio de funciones).
- Permitió estudiar cuerpos geométricos de forma "más abierta", menos rígida en términos del programa de estudio, conectando con sentido diversos temas del mismo como resultado de una necesidad respuestas a una pregunta. Por ejemplo, a partir de la pregunta $Q_{3\text{-}2}$*: ¿Alcanza para calcular el volumen de un cono, saber solo los valores de la generatriz y la altura?,* surgió la necesidad de investigar y estudiar el teorema de Pitágoras. Este es un ejemplo en el que, para poder responder a una pregunta, se estudió lo necesario de un tema perteneciente al programa que, de otra forma, hubiera sido presentado a los estudiantes como un capítulo más del programa de estudio. En la misma línea, al buscar respuestas a la pregunta $Q_{2\text{-}3\ B}$ *¿Por qué algunas calculadoras escriben los resultados con exponente negativo*?, fue necesario estudiar,

por ejemplo, cuestiones referidas a notación científica: qué es, cómo se anota, cómo se interpreta, etc. Esta noción no estaba prevista en la planificación a priori realizada por la profesora, ya que en la institución se propone estudiar en tercer año. Sin embargo, este abordaje permitió darle una razón de ser y cierta funcionalidad.

- Dedicarle tiempo reloj, dentro del aula, con los estudiantes, a nociones geométricas.

En síntesis, le implementación de la AEI logró desarrollar algunos gestos que son claves en la PICM: estudiar cuerpos geométricos de una manera funcional, con sentido, con una razón de ser, a partir de respuestas a preguntas que formula la comunidad de estudio; estudiar determinados saberes en función de la necesidad de aportar respuestas y no solamente porque se encuentran detalladas en un programa de estudios; trabajar en grupos de forma colectiva arribando siempre a un consenso respecto, por ejemplo, a las conclusiones, síntesis y preguntas a explorar; implicar de forma activa a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento. Estos aspectos, tal como se han mencionado previamente, son algunos de los gestos claves que propone Chevallard (2013a, 2013b, 2017) dentro de una PICM.

Es importante volver a mencionar que esta experiencia se desarrolló en una institución de gestión privada que dispone de diversos recursos: biblioteca, conexión a Internet, recursos tecnológicos tales ordenadores portátiles en las aulas, entre otros. Entonces es oportuno cuestionar sobre la ecología de esta misma AEI en una institución que no disponga de todos estos recursos. Probablemente habría que gestionar la búsqueda de respuestas de forma diferente. Por ejemplo, la profesora aportaría una serie de textos escolares, de apuntes, entre otros. Las búsquedas en Internet podrían quedar como actividad fuera de la escuela, donde los estudiantes puedan acceder a una conexión a Internet. De esta forma, el desarrollo de la AEI sería viable, pero ocuparía más tiempo fuera del aula.

Finalmente, aunque el momento de la evaluación no ha sido el foco de este proceso, resulta interesante mencionar que, si bien se evaluó el trabajo diario, ya sea por los protocolos como por su participación áulica, por necesidad del establecimiento educativo, se debió realizar una evaluación formal al finalizar la AEI. Esto conduce a formular algunas preguntas en torno a los procesos de "acreditación" en una enseñanza de este tipo, preguntas que quedan abiertas para una futura investigación. Por ejemplo, ¿Cómo darle al menos un sentido a la forma "tradicional de acreditar"? ¿Cómo transformar las evaluaciones (en sentido fuerte) en evaluaciones funcionales, no sólo para el profesor sino más aún para los propios estudiantes?

Bibliografía

Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 125-142.

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. En Bosch, M.; Gascón, J.; Ruiz Olarría, A.; Artaud, M., Bronner, A.; Chevallard, Y.; Cirade, G.; Ladage, C.; Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, 553-577. Centre de Recerca Matemàtica: Barcelona.

Bosch, M., y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En Bronner, A. ; Larguier, M. ; Artaud, M. ; Bosch, M. ; Chevallard, Y. ; Cirade, G. ; Ladage, C. (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 55-91. IUFM de l'académie de Montpellier : Uzès.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013b). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. doi: 10.4471 /redimat.201 3.26

Chevallard, Y. (2013c). *La matemática en la escuela*. Buenos Aires: Libros El Zorzal.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *20*(1), 159-169.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Ciccioli, V., y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141-170.

Colombo Rojas, E., Llanos, V.C., y Otero, M. R. (2016). La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza en la Escuela Secundaria. *Números*, *93*, 93-110.

Corica, A. R., y Marin, E. A. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números*, *85*, 91-114.

Diseño Curricular para la Educación Secundaria 2 año (SB). (2008). *Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Matemática*. Recuperado el 95 de abril de 2009, de de http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/secundaria2.pdf

Farías, P. R. (2015). *Diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación a partir de la pregunta: ¿Cómo se puede medir un fractal?* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Flores-Compañ, M-J., Bellés Agut, D., Nebot Romero, V., y Tintoré, D. R. (2019). Nuevas tecnologías y aprendizaje basado en proyectos aplicado a la Geometría. *Números*, *101*, 179-191.

Gascón, J. (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria (I). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria (II). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *45*, 41-52.

Gómez-Escobar, A., y Fernández-Cézar, R. (2020). Metodología Aprendizaje-Servicio (ApS) en la formación de maestros en Didáctica de la Geometría y la Medida. *Números*, *104*, 65-74.

Gutierrez, A. J. (2020). GeoGebra: herramienta didáctica para fortalecer competencias geométricas en Educación Media. *Números*, *105*, 165-188.

Henríquez, C., y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70.

López, M. B., y Fernández, I. B. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *31*(2), 139-162.

Martín, N., Parra, V., y Fanaro, M. (2019). Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *102*, 25-34.

Sánchez, I. C., y Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA*, *14*(1), 55-83.

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números*, *78*, 73-94.

Webgrafía

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Recuperado el 5 de marzo de 2012, de http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à l´école et la révolution épistémologique à venir. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013a). Éléments de didactique du développement durable. Notes & documents. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Navarro, V., y Sgreccia, N. (2010) *¿Cuál es la presencia real de la geometría en los dos primeros años de la escuela secundaria? análisis de la situación en las dos escuelas de una localidad santafesina*. Recuperado el 9 de agosto de 2015, de http://www.soarem.com.ar/Documentos/46%20Navarro.pdf.

Andrea Berenguel Rinaldi. Profesora para la EGB 3 y Polimodal en Matemática por el Instituto Superior Juan XXIII. Licenciada en Educación Matemática por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Profesora del Nivel Secundario en el Instituto Don Bosco y del Nivel Superior en ISFD n° 3, en el Profesorado de Secundaria en Matemática, ambos institutos en la ciudad de Bahía Blanca.
Email: andreberenguel19@gmail.com

Verónica Parra. Profesora en Matemática. Licenciada en Educación Matemática. Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Postdoctorado en la Universidad de Brest, Francia. Investigadora Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Profesora adjunta en Facultad de Ciencias Exactas (UNICEN). Miembro del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).
Email: vparra@exa.unicen.edu.ar