NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 110, marzo de 2022, páginas 113-128

“Tips” para la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas

Melania Bernabeu
(Universidad de Alicante. España)

Fecha de recepción: 30 de julio de 2021
Fecha de aceptación: 17 de noviembre de 2021

Resumen El objetivo de este artículo es proporcionar ideas para tener en cuenta en los procesos de enseñanza de las figuras geométricas. Estas ideas surgen tras realizar un experimento de enseñanza dirigido a potenciar la comprensión del concepto de polígono y las clases de polígonos con estudiantes de tercero de educación primaria, así como a desarrollar formas de razonar con los atributos de las figuras (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019).

Palabras clave Situaciones de enseñanza-aprendizaje, figuras geométricas, concepto de polígono, clases de polígonos, material didáctico, educación primaria, geometría.

Title **Ideas for the teaching-learning of geometric figures**

Abstract The aim of this article is to provide ideas to consider in the processes of teaching geometric figures. These ideas arise after conducting a teaching experiment aimed at enhancing the understanding of the polygon concept and polygon classes with third-year primary school students, as well as developing ways of reasoning with the attributes of the figures (Bernabeu, Moreno & Llinares, 2019).

Keywords Teaching-learning situations, geometric figures, polygon concept, polygon classes, didactic material, primary education, geometry.

1. Introducción

La comprensión de los conceptos geométricos es un proceso progresivo que se va construyendo a medida que los estudiantes participan en situaciones de enseñanza-aprendizaje que impliquen reconocer y relacionar atributos de las figuras y cuerpos geométricos. Para favorecer esta comprensión es importante que los estudiantes experimenten con figuras y cuerpos geométricos (Mora, 1995, p. 1) para identificar atributos y relacionarlos (Berga, 2013, p. 2).

Uno de los conceptos relevantes en educación primaria es el de polígono. Podemos encontrarnos con diferentes definiciones de polígonos en los currículos de educación primaria y en los libros de texto. Por ejemplo, *polígono como porción del plano delimitada por una línea poligonal cerrada* (Nortes y Nortes, 2013, pp. 65-66; Pascual, Codes, Martín y Carrillo, 2019, p. 466). En lo que vamos a describir a continuación, hemos adoptado la definición de polígono como una *figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados* (adaptación de los libros de texto de Ferrero, 2009; Pérez y Álvarez, 2001), y no consideramos otras definiciones más extensas que incluyeran otras figuras, como por ejemplo los polígonos cruzados (*polígonos complejos*) (Galetzka y Glauner, 2017, p. 1; Togliani, 2019, p. 72).

Los maestros reconocen las dificultades que presentan las situaciones de enseñanza-aprendizaje de los conceptos geométricos y las carencias que pueden generar en la comprensión de los estudiantes según la forma en la que se introduzcan y ejemplifiquen (Barrantes y Zapata, 2008, p. 55). Por ejemplo, cuando algunos estudiantes solo reconocen como triángulo las figuras que son semejantes a un triángulo prototípico (normalmente un triángulo equilátero), o cuando solo reconocen como cuadrado la representación de un cuadrado con uno de los lados paralelo al borde de la hoja.

Las dificultades de esta naturaleza están vinculadas a las características de la enseñanza y no al significado matemático del concepto. Por ejemplo, al introducir las clases de polígonos, se suelen acompañar las descripciones verbales con representaciones prototípicas. Así, para ejemplificar la clase de los triángulos se suele usar como modelo de la clase la representación del triángulo equilátero con un lado paralelo al borde la hoja (posición prototípica); lo mismo suele ocurrir para otras figuras como el cuadrado o rectángulo que para ejemplificar estas clases se usan, respectivamente, las representaciones prototípicas del cuadrado o del rectángulo; y para la representación de la clase de los polígonos se usa la representación de polígonos regulares en posición prototípica, que a menudo se ejemplifica con un pentágono o hexágono regular (Figura 1).

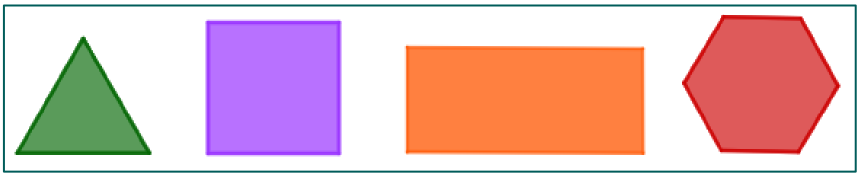


Figura 1. Triángulo equilátero, cuadrado, rectángulo y hexágono regular como ejemplos de figuras prototípicas.

Estas características de la enseñanza hacen que los estudiantes generen un limitado imaginario de las figuras geométricas que suele vincularse inicialmente a relacionar el nombre de la figura geométrica con una determinada representación (reconocimiento perceptual) en vez de considerar los significados derivados de la definición, lo que implicaría un reconocimiento de las figuras basado en un razonamiento analítico. Un ejemplo del razonamiento perceptual consistiría en que los estudiantes aceptaran la representación de un triángulo escaleno, un cuadrado en posición no prototípica o un polígono irregular, respectivamente, como contraejemplo de triángulos, cuadrados o polígonos al no cumplir con las características perceptuales asociadas a los ejemplos prototípicos. Por ello, para desarrollar el pensamiento geométrico, es necesario que la enseñanza apoye la progresión desde el reconocimiento perceptual de las figuras hasta la generación del razonamiento analítico. En particular, reconocer tanto los atributos *relevantes* como los *no-relevantes* para la definición del concepto; por ejemplo, la asimetría u orientación para el caso del concepto de polígono (Hershkowitz, 1990, p. 81); es decir, establecer la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Estos autores usaron el término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva global asociada con el concepto, que incluye las representaciones mentales y propiedades asociadas. Esta estructura cognitiva es dinámica, se construye y cambia con el tiempo a través de las diferentes experiencias con las que se encuentran los individuos. Por tanto, dada la importancia de apoyar la construcción y evolución de estas estructuras cognitivas para el aprendizaje de los conceptos geométricos, en este trabajo nos proponemos el objetivo de: cómo apoyar la construcción y evolución de las estructuras cognitivas para la enseñanza del concepto de polígono y de la relación entre clases de polígonos.

1.1. Desde el reconocimiento perceptual al razonamiento analítico: El papel de los recursos didácticos

Un aspecto clave en la comprensión de los polígonos es identificar tanto los atributos relevantes para la definición del concepto (figura plana, cerrada, con lados rectos y no cruzados) como los atributos no-relevantes para su definición (por ejemplo, ser cóncavo o convexo, el número de lados, la simetría o el paralelismo de dos de sus lados) para lo cual se deben reconocer y dotar de significado matemático a partes de las figuras. Adquirir esta capacidad es un proceso complejo que implica focalizar la atención en determinadas partes de una figura, descartar lo innecesario y relacionarlas con la definición para determinar la pertenencia a una clase. Este proceso requiere relacionar conceptos e imágenes. Fue Fischbein (1993, pp. 148-150) quien acuñó el término *concepto figural* para referirse a la asociación entre lo perceptivo (como el reconocimiento de atributos) y las condiciones lógicas que rigen el concepto (como las propiedades matemáticas que definen una clase). Por ejemplo, asignarle a un polígono el atributo *cóncavo* significa que presenta al menos una diagonal exterior, que además se trata de un atributo relevante para el concepto de polígono cóncavo. Los términos geométricos y su asociación con las figuras se van adquiriendo a través de situaciones de enseñanza (Vukovic y Lesaux, 2013, p. 241), por lo que es conveniente que los maestros proporcionen términos geométricos aceptados matemáticamente.

Un aspecto clave en la progresión de la comprensión de las figuras geométricas es saber reconocer y justificar cuándo una figura es o no un ejemplo de un concepto (Hershkowitz, 1990, p. 81). Entendiendo justificar como la exteriorización del pensamiento geométrico a través de registros discursivo (orales o escritos) y/o no-discursivo (dibujos, construcciones). Por ejemplo, para justificar que el polígono de la Figura 2 es un polígono cóncavo el estudiante podría representar mentalmente la diagonal marcada en la imagen como una línea discontinua y relacionar esta información con la definición dada de polígono cóncavo, para explicar que *es un ejemplo de polígono cóncavo porque tiene una diagonal exterior*.

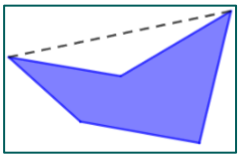


Figura 2. Ejemplo de polígono cóncavo con su diagonal exterior marcada.

La manera en la que los estudiantes pueden argumentar por qué una figura es o no un polígono de una determinada clase puede ser tanto discursiva (como en la justificación del ejemplo anterior), como no-discursiva usando otros registros semióticos; por ejemplo, a través del dibujo o mediante la construcción de determinadas figuras siguiendo algunas condiciones, para lo cual resulta útil usar recursos didácticos (el geoplano, el mecano, láminas de espejo o papel plegado). Estas acciones implican anticipar qué atributos debe cumplir (Sinclair, Cirillo y de Villier, 2017, p. 460), lo que supone conservar la percepción y, además, poner en práctica el conocimiento de conceptos geométricos empleando diversos sentidos (vista, tacto y oído) para reconocer, construir, posicionar, interpretar y expresar (Flores, Ramírez y del Río, 2015, p. 138). Por ejemplo, si se quiere dibujar un hexágono, el estudiante tiene que anticipar que el dibujo que vaya a realizar debe ser un polígono con seis lados (Torra, 2016, p. 1).

Otro aspecto clave en la comprensión de las figuras geométricas es establecer relaciones entre ellas para determinar la pertenencia a una clase. Esto implica reconocer las semejanzas y diferencias entre figuras perceptualmente diferentes, identificando cuál es el atributo común que presentan. Por ejemplo, reconocer que un cuadrado y un rectángulo pertenecen a la clase de los paralelogramos por tener dos pares de lados paralelos, aunque no compartan la congruencia de todos los lados.

Conseguir que los estudiantes construyan un conocimiento robusto sobre los conceptos de las figuras geométricas no es tarea fácil. No obstante, tras haber llevado a cabo un experimento de enseñanza destinado a fomentar la comprensión del concepto de polígono y las clases de polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019); y haber evidenciado diferencias entre los razonamientos de los estudiantes antes y después del experimento de enseñanza (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2021), hemos identificado algunas ideas (*tips)* que los docentes podrían usar y/o adaptar para ayudar a sus estudiantes a progresar en el aprendizaje de los polígonos y las clases de polígonos desde el reconocimiento perceptual hasta el razonamiento analítico, haciendo uso del mecano, geoplano, láminas de espejo y plegado del papel. A continuación, describimos estos recursos.

- El *meccano* (Figura 3) consiste en unas varillas de diferentes colores y longitudes que se unen con encuadernadores permitiendo construir diferentes figuras. Las actividades con este material pueden apoyar la transición desde el reconocimiento perceptual a razonar con los atributos de las figuras (razonamiento analítico). Es decir, puede ayudar a la interiorización de los atributos de los conceptos o la comprobación de la compatibilidad de varias clases de polígonos en un mismo ejemplo, permitiendo que una misma figura pueda tener asociados varios términos. Por ejemplo, el triángulo de la figura 3 es acutángulo e isósceles.

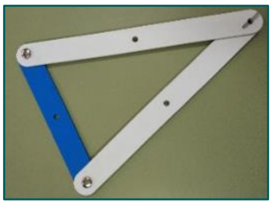


Figura 3. Triángulo isósceles construido con *meccano*.

- El *geoplano* es un tablero de madera o plástico con clavos que representan una malla cuadrada, isométrica o circular. Para construir las diferentes figuras se usan gomas elásticas, las cuales usan los clavos de la malla como puntos de apoyo. Con este material se pueden construir diferentes figuras o transformar un polígono en otro diferente estirando o cambiando la posición de las gomas. Además, con diferentes gomas de colores se pueden representar los elementos de las clases de polígonos, por ejemplo, las diagonales de los paralelogramos (Figura 4). Este material permite a los estudiantes hacer visible sus procesos de razonamiento y apoyar sus argumentos favoreciendo la relación entre lo perceptual y las condiciones lógicas que rigen los conceptos (es decir, apoyar el desarrollo de los conceptos figurales, Fischbein, 1993, pp. 148-150).

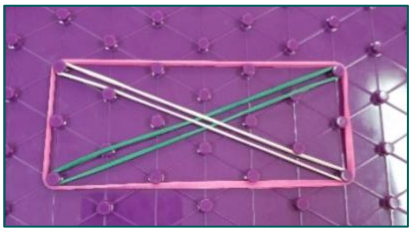


Figura 4. Rectángulo con sus diagonales construido en un *geoplano* con gomas elásticas.

- Las *láminas de espejo* son superficies cuadradas o rectangulares donde en una de sus caras hay un espejo. Uno de los usos de este material es para comprobar si una representación es simétrica o no. Para ello, se debe colocar el espejo sobre la hoja, formando dos planos perpendiculares (Figura 5), donde se piense que está el eje de simetría de la figura representada, y si lo que se refleja en el espejo es igual a lo que hay detrás de este, entonces el espejo está sobre el eje de simetría. Este material contribuye a desarrollar destrezas para familiarizarse con la simetría, regularidad de los polígonos, permitiendo a los estudiantes hacer visible sus procesos de percepción de la regularidad y apoyar sus argumentos mediante dibujos y las condiciones lógicas que rigen los conceptos (Flores et al., 2015, p. 139).

Figura 5. Estudiantes comprobando la simetría de figuras geométricas con las láminas de espejos.

- El *papel plegado*, al igual que las láminas de espejo, también se puede usar para abordar la simetría. Este material se puede usar con figuras geométricas que puedan ocasionar duda de cuántos ejes de simetría pueden tener. Para ello, se pueden dibujar o imprimir estas figuras, recortarlas por los lados de estas y doblarlas por donde se crea que están los ejes de simetría para comprobar si sus dos mitades coinciden. Este material permite identificar regularidades de una figura al aplicarle un movimiento. Asimismo, permite a los estudiantes hacer visible sus procesos de percepción de la regularidad y apoyar sus argumentos mediante la verbalización y los dibujos, lo que favorecerá la formalización de los conceptos (Flores et al., 2015, p. 139).

2. "Tips" para ayudar a la transición desde lo perceptual al razonamiento analítico: el ejemplo del concepto de polígono y las clases de polígonos

En esta sección introducimos dos tipos de sugerencias para apoyar la transición del razonamiento perceptual al razonamiento analítico. Con relación al papel del maestro, se recomienda usar ejemplos y contraejemplos en la planificación, así como aprovechar las interacciones con los estudiantes para pedir justificaciones y argumenten sus razonamientos. En relación con los procesos cognitivos, se recomienda proporcionar oportunidades de aprendizaje que favorezcan las capacidades de identificar, relacionar y clasificar figuras geométricas ya que, al razonar con los atributos, se desarrolla del razonamiento analítico.

A) Sobre el papel del maestro

2.1. Introducir un amplio abanico de ejemplos y contraejemplo

Para apoyar la comprensión de los conceptos geométricos es necesario usar un amplio abanico de ejemplos y contraejemplos de un concepto para que los estudiantes puedan reconocer, afirmar y contrastar los atributos de las figuras considerando las definiciones. El uso de contraejemplos ayuda a que los estudiantes puedan ver qué atributos no son relevantes para la definición de un concepto. Por ejemplo, en relación con el concepto de polígono sería aconsejable mostrar variedad de representaciones de polígonos, tanto prototípicas como no-prototípicas, y ejemplos de no-polígonos, es decir, figuras que no cumplan alguno o ninguno de los atributos relevantes de la definición de polígono. Esta característica de la aproximación a la enseñanza permite crear las condiciones para que los estudiantes puedan comprobar que el número de lados, la posición, la concavidad o la regularidad son atributos no-relevantes para que una figura sea un ejemplo de polígono (Figura 6). Además, permite apoyar el desarrollo de la comprensión del concepto (en este ejemplo, del concepto de polígono) desvinculándolo de los ejemplos prototípicos (que vinculan la comprensión a lo perceptual), y creando el contexto para el uso de la definición para reconocer cuándo una figura es o no un polígono (que vincula la comprensión al razonamiento analítico).

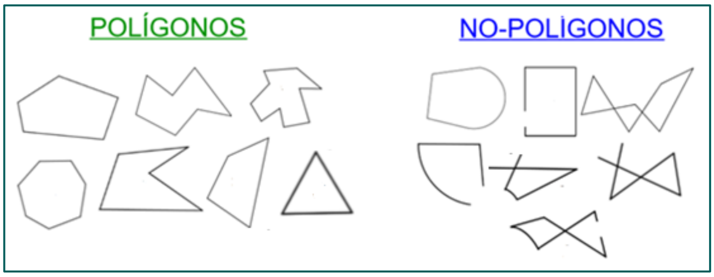


Figura 6. Ejemplos y contraejemplos de polígonos.

2.2. La necesidad de la argumentación y la justificación

Una de las características del desarrollo del pensamiento geométrico está vinculada a la mejora de los argumentos generados por los estudiantes para apoyar sus decisiones. El profesor debe intentar que los estudiantes construyan progresivamente la comprensión de los conceptos geométricos, y una forma de apoyar este desarrollo es a través de la argumentación y justificación. Los maestros pueden generar el contexto para que los estudiantes exterioricen su pensamiento geométrico sobre lo que entienden de un determinado concepto geométrico o describan lo que están *viendo*. Por ejemplo, cuando un estudiante, ante un ejemplo de polígono (Figura 7), determina que es un pentágono, el maestro debe interactuar con el estudiante para que este haga evidentes las razones que le han conducido a ese descubrimiento. La generación de un discurso (argumento) permite al maestro disponer de evidencias de cómo el estudiante usa los atributos del concepto de polígono (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y de pentágono (tener 5 lados), mostrando la relación con la representación.

Los contextos de argumentación en el aula permiten establecer relaciones entre lo perceptual y lo conceptual a través del discurso y del uso de diferentes representaciones semióticas. En estos contextos de generar relaciones entre lo perceptual y lo conceptual, a través de los discursos justificativos, es donde el uso de los recursos didácticos se consideran instrumentos para la generación de conocimiento, pues a través de estos pueden comprobar y justificar atributos de las clases de polígonos.

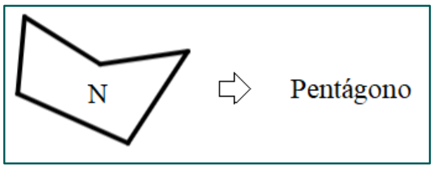


Figura 7. Ejemplo de pentágono.

B) Procesos cognitivos a desarrollar para potenciar la relación entre lo perceptual y el razonamiento analítico

2.3. Identificar

Identificar partes de una figura con significado matemático común en un conjunto de figuras es un proceso clave en la transición desde lo perceptual al razonamiento analítico que se apoya en el proceso de reconocer atributos de las figuras individuales. Este proceso cognitivo puede ser desarrollado en el aula a través de diferentes tipos da actividades considerando las características de lo que se pide a los estudiantes. En esta sección explicamos primero el significado del proceso identificar y luego ejemplificamos las características de las tareas de dibujar/construir y de reconocer atributos sobre las que se apoya.

Una evidencia de la comprensión de un concepto geométrico es poder abstraerlo de un conjunto de figuras perceptualmente diferentes. Abstraer implica tener la capacidad de discriminar los atributos de cada una de las figuras de un conjunto para identificar qué atributo tienen en común, y así determinar la pertenencia a una misma clase. Es decir, reconocer las partes de una figura y dotarlas de significado matemático, relacionándolas con los atributos de los conceptos geométricos; realizar el mismo proceso con una segunda figura, identificando las semejanzas y diferencias con la primera figura; y así con el resto de las figuras realizando un cribado de los atributos que comparten para determinar a qué clase de figura pertenecen. Por ejemplo, para apoyar la habilidad de identificar partes de una figura con significado matemático, en el experimento de enseñanza que realizamos, usamos la metáfora de la Máquina de Dibujar (Battista, 2012, p. 12). Para ello, diseñamos tareas en las que la Máquina de Dibujar hacía figuras con unos atributos y no podía hacer figuras que no cumplieran esos atributos (ejemplos y contraejemplos). En este tipo de situaciones, los estudiantes tienen que identificar el atributo común que comparte un conjunto de figuras para determinar cuál es la orden que se le ha dado a la Máquina de

Dibujar. En estas actividades, para evidenciar que los estudiantes han identificado correctamente el atributo que determinaba la clase, se les pide dibujar un ejemplo de una figura que la Máquina puede hacer y un ejemplo de una figura que no cumple esta condición. Además, y teniendo en cuenta la característica de potenciar la argumentación, se pide a los estudiantes explicar por qué podía hacerlo y por qué no. Por ejemplo, en la Figura 8 se muestra un conjunto de polígonos simétricos, los que la Máquina puede hacer, y no-simétricos, los que no puede hacer. El estudiante tiene que reconocer atributos de cada una de las figuras y ver cuáles son comunes (lo que permite identificar el tipo de figura que la Maquina de Dibujar puede hacer en este caso) y en qué se diferencian del otro conjunto (las figuras que la Maquina de Dibujar no puede hacer). Este tipo de tareas crea el contexto en el que se desarrolla la relación entre lo perceptual y las condiciones lógicas que rigen los conceptos.

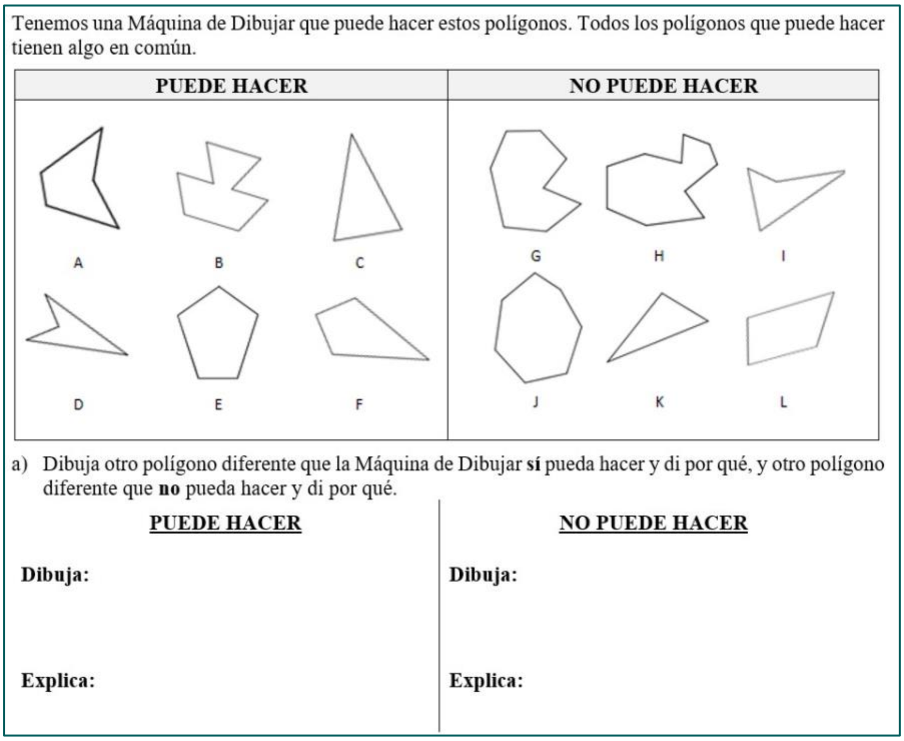


Figura 8. Ejemplo de tarea de la Máquina de Dibujar: polígonos simétricos y no-simétricos.

Para ejemplificar este proceso usamos la Tabla 1, donde la identificación de la concavidad/convexidad, número de lados y simetría, permite comprobar que los polígonos del “A” al “F” (puede hacer) comparten que son simétricos y que los polígonos del “G” al “L” (no puede hacer) que no son simétricos.

Polígono	Cóncavo/Convexo	Número lados	Simétrico
A	Cóncavo	5	Sí
B	Cóncavo	8	Sí
C	Convexo	3	Sí
D	Cóncavo	4	Sí
E	Convexo	5	Sí

F	Convexo	4	Sí
G	Cóncavo	8	No
H	Cóncavo	10	No
I	Cóncavo	4	No
J	Convexo	7	No
K	Convexo	3	No
L	Convexo	4	No

Tabla 1. Atributos de los polígonos de la tarea de la Figura 9

2.3.1 Dibujar o construir polígonos con condiciones

La geometría consiste en la sinergia entre dos registros de representación: la visualización de las formas y el lenguaje para enunciar y deducir propiedades (Duval, 1998, pp. 39-49). Sin embargo, el uso del registro no-discursivo, como la realización de dibujos o la construcción con materiales didácticos, es escasa en las situaciones de enseñanza-aprendizaje, predominando el reconocimiento y nombramiento de las figuras geométricas. Para fomentar el uso de los registros no-discursivos para razonar sobre los conceptos geométricos se pueden usar actividades de dibujar o construir polígonos con condiciones. Una forma de hacerlo es a través de tareas donde aparezcan los atributos o la clase de figura en una etiqueta y los estudiantes deban dibujar o construir figuras con condiciones. Por ejemplo, para comprender el significado del concepto de polígono (figura plana cerrada con lados rectos y no-cruzados), hay que saber diferenciar atributos relevantes de los no relevantes para la definición (ser una figura abierta, tener lados curvos o cruzados), y una forma de aprender a diferenciarlos es a través de tareas de dibujar o construir figuras con condiciones, como puede ser una figura con lados cruzados (no-polígono) (Figura 9).

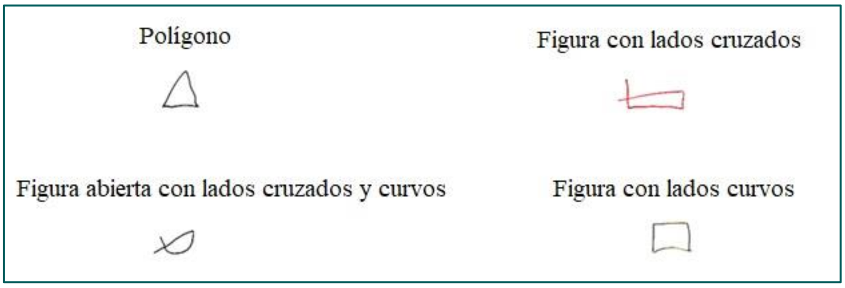


Figura 9. Ejemplo de dibujos de polígonos y no-polígonos por estudiantes de primaria.

Asimismo, el uso del registro no-discursivo se puede potenciar a través del uso de materiales didácticos como el *meccano* o el geoplano para la construcción de figuras. Por ejemplo, para construir un cuadrilátero cóncavo con gomas en un geoplano (Figura 10), el estudiante tiene que anticipar las condiciones que la figura debe cumplir derivadas de la definición (polígono de 4 lados, cóncavo) y visualizar cómo debería quedar con la goma o gomas enganchadas en el geoplano.

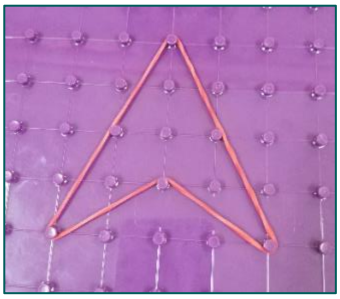


Figura 10. Ejemplo de cuadrilátero cóncavo construido con una goma en un geoplano.

Del mismo modo, en relación con la longitud de sus lados, como en el caso de las clases de triángulos equilátero, isósceles y escaleno, es posible usar el *meccano*, ya que presenta varillas de diferentes longitudes. Por ejemplo, cuando en el experimento de enseñanza introdujimos las clases de triángulos según sus lados, se mostraban dos varillas de igual o diferente longitud y se preguntaba a los estudiantes qué triángulo se podía construir con una tercera varilla. Los estudiantes tenían que anticipar qué clase de triángulo se podría construir dependiendo de la longitud de las varillas. Así, si se presentaban dos varillas de la misma longitud los estudiantes podían anticipar que el triángulo podría ser isósceles, si la tercera varilla era diferente a las dos primeras, o equilátero, si la tercera era igual a las dos primeras (Figura 11). Del mismo modo, si se mostraban dos varillas de diferente longitud, los estudiantes podían predecir que el triángulo podía ser escaleno, siempre que la tercera varilla fuera diferente a las otras dos; o bien isósceles si la tercera varilla era igual a una de las dos primeras. De este modo, las actividades dirigidas a construir figuras con el material permiten relacionar las condiciones lógicas del concepto con la representación que se pueden realizar, lo que permite apoyar la transición desde lo perceptual al razonamiento analítico.

Figura 11. Escena en clase del proceso de construcción de un triángulo con dos varillas iguales de *meccano*

2.3.2. Reconocer y razonar con atributos

Otro proceso cognitivo vinculado a potenciar la capacidad de asociar significado matemático a partes de una figura y a razonar con atributos de las figuras es el de *comprobar* que una figura cumple alguna condición. Así, además de usar los materiales manipulativos para construir figuras geométricas con condiciones, estos también se pueden usar para reconocer los atributos de los conceptos geométricos y la compatibilidad de varias clases de polígonos. Por ejemplo, con el *meccano* los estudiantes pueden comprobar si es posible combinar dos condiciones para representar un triángulo equilátero obtusángulo, donde al realizar un ángulo obtusángulo con dos varillas de la misma longitud podrán comprobar que es imposible unir estas con la tercera varilla (Figura 12), y concluir que un triángulo equilátero siempre es acutángulo. Igual que en los casos anteriores, este tipo de actividades crea el contexto para que los estudiantes puedan razonar con los atributos de las figuras y aprender a argumentar, generando un discurso geométricamente correcto.

Figura 12. Ejemplo de la construcción de un triángulo equilátero obtusángulo con varillas de *meccano*.

Otro ejemplo, relativo a lo que significa razonar con atributos (razonamiento analítico), puede ser la simetría de las figuras geométricas y el uso del papel plegado. Para usar este material, tan solo necesitamos dibujar o imprimir las figuras geométricas que queramos comprobar su simetría y recortarlas. De esta forma, los estudiantes podrán doblar la figura por dónde crean que están los ejes de simetría y comprobar si sus dos mitades coinciden, demostrando que el pliegue es o no el eje de simetría. También se puede aprovechar para desmontar ideas erróneas como, por ejemplo, que el rectángulo presenta los mismos ejes de simetría que el cuadrado. Para ello, se les puede proporcionar un folio (como representación de un rectángulo) y dejarles que experimenten para que comprueben que no tiene cuatro ejes de simetría como el cuadrado. Al realizar dobleces en su hoja de papel comprobarán que, al doblar por las diagonales, las dos mitades no coinciden y, por tanto, las diagonales no son ejes de simetría del rectángulo (Figura 13).

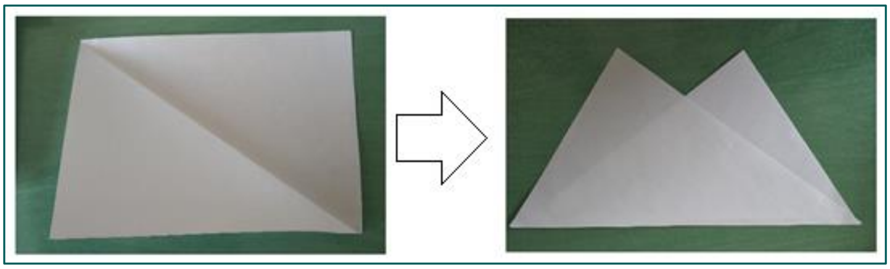


Figura 13. Comprobación de si las diagonales del rectángulo son ejes de simetría con papel plegado.

De la misma forma, las láminas de espejo son un buen recurso para comprobar qué líneas son o no ejes de simetría. Para ello, se puede presentar a los estudiantes diversas figuras geométricas y preguntar si las líneas marcadas son ejes de simetría comprobándolo con las láminas de espejo (Figura 14); o bien mostrarles solo las figuras geométricas y pedirles que indiquen cuántos ejes de simetría tienen, si es que los tienen, utilizando este material (Figura 15).

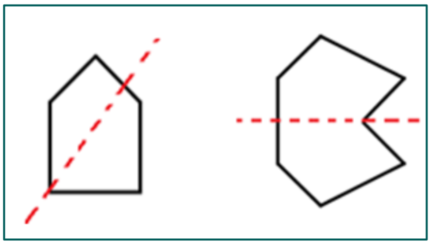


Figura 14. Ejemplos y contraejemplos de ejes de simetría.

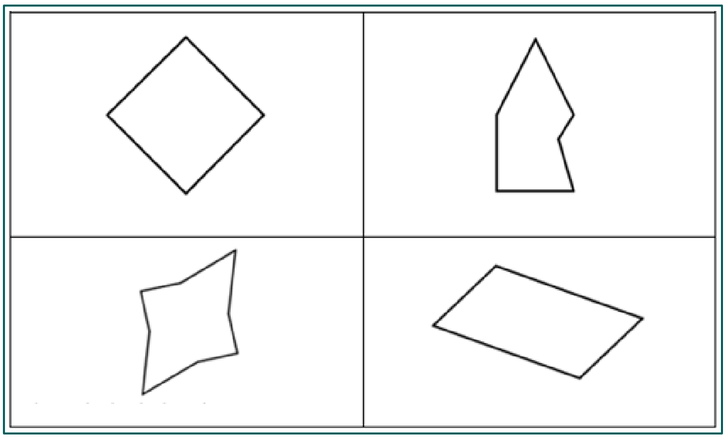


Figura 15. Ejemplos y contraejemplos de polígonos simétricos.

2.4. Clasificar

Otra forma de ayudar a comprender los conceptos geométricos es realizar tareas en las que los estudiantes tengan que clasificar las figuras explicando las clasificaciones realizadas. Un ejemplo de este tipo de tarea sería mostrar un conjunto de polígonos y pedir a los estudiantes que los clasifiquen según su concavidad y expliquen su pertenencia a cada clase (Figura 16). De este modo, un estudiante seleccionaría un polígono, por ejemplo, el 1, lo clasificaría en los polígonos cóncavos y justificaría que pertenece a esa clase porque *al menos tiene una diagonal exterior*. Con este tipo de tareas se evidencia si los estudiantes son capaces de: reconocer las partes de las figuras y relacionarlas con la definición de los conceptos a clasificar para determinar su pertenencia a una clase; y de diferenciar ejemplos y contraejemplos de una clase.

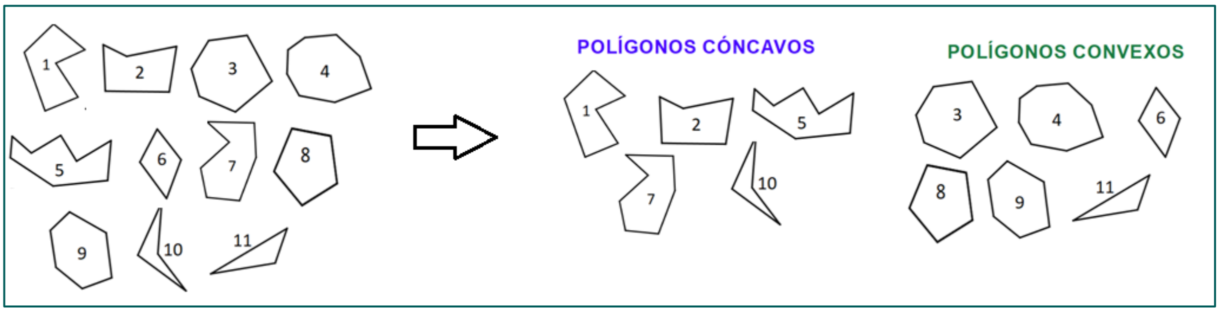
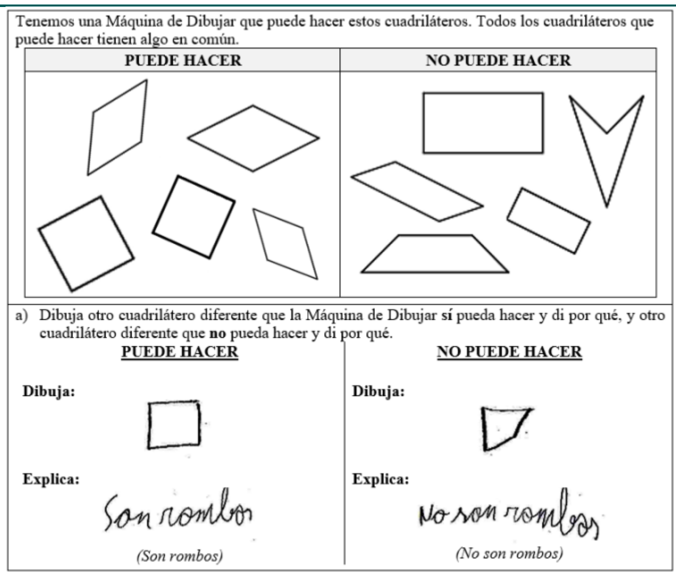


Figura 16. Ejemplo de clasificación de polígonos cóncavos y convexos.

2.4.1. Establecer relaciones entre figuras geométricas

Otro aspecto a desarrollar es establecer relaciones entre las figuras considerando una figura como un caso particular de clase de figuras más general (relaciones inclusivas). Por ejemplo, cuando se considera el triángulo equilátero (triángulo con tres lados iguales) como ejemplo de triángulo isósceles (triángulo con dos lados iguales) porque al menos tiene dos lados iguales. Para ello, se debe considerar la relación entre la manera de definir las figuras geométricas y las clasificaciones que se pueden generar. Considerar un ejemplo de polígono como caso particular de una clase más general implica un nivel cognitivo superior, ya que los estudiantes no se fijan en la apariencia de las figuras, sino en los atributos que los componen. Por ejemplo, en el experimento de enseñanza realizado, para introducir las clases de paralelogramos, pedimos a los estudiantes que construyeran un *paralelogramo con cuatro lados iguales* en un geoplano. De esta manera se pueden obtener diferentes rombos y cuadrados. El hecho de que el cuadrado tenga, además de la condición inicial (lados iguales), los ángulos congruentes puede ser aprovechado para indicar si los rombos son paralelogramos con lados iguales. Un ejemplo particular de rombo es aquel que además de tener los cuatro lados iguales tiene los cuatro ángulos congruentes, y que se le denomina "cuadrado" (rombo con los cuatro ángulos congruentes). Este tipo de situaciones permite mostrar la relación entre el proceso de añadir condiciones a las figuras en una clase (*especialización* (de Villier, 1994, p. 14) y la generación de relaciones de inclusión (al generarse un subconjunto de la clase de figuras inicial).

De la misma manera, si pedimos que construyan un *paralelogramo con cuatro ángulos iguales en un geoplano* (al ser un paralelogramo los lados opuestos son congruentes) se obtienen ejemplos de rectángulos y cuadrados (paralelogramos que cumplen la condición de tener los cuatro ángulos congruentes). El hecho de que el cuadrado en este grupo de paralelogramos también tiene los cuatro lados iguales permite indicar que a los rectángulos que tengan los cuatro lados iguales se les denomina cuadrados. De esta manera se visualiza que el cuadrado es un caso particular de rectángulo cuando el rectángulo es definido como un paralelogramo con los cuatro ángulos iguales De este modo, cuando se presentó una tarea con un conjunto de cuadriláteros con los cuatro lados congruentes y otro conjunto de cuadriláteros sin lados congruentes, los estudiantes identificaron el atributo común "tener cuatro lados congruentes" y asociaron el nombre de rombos a este conjunto de figuras. En esta tarea, los estudiantes estaban usando la definición de rombo como "cuadrilátero con cuatro lados congruentes" para nombrar al conjunto de figuras que cumplen esta condición (Figura 17).



Investigadora: ¿Son rombos todos? [Puede hacer]
Estudiante: Sí, porque los cuadrados también eran rombos.

Figura 17. Respuesta de un estudiante ejemplificando una relación de inclusión en una entrevista del experimento de enseñanza.

3. Conclusiones

El objetivo de este artículo es proporcionar algunas ideas (*tips*) para tener en cuenta durante los procesos de enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Hemos proporcionado algunos *tips* para que los maestros/as puedan ayudar a sus estudiantes de educación primaria a desarrollar el pensamiento geométrico, en particular, la transición del reconocimiento perceptual de las figuras al razonamiento analítico contextualizado en el contenido del concepto de polígono y las clases de polígonos. En general, la idea de esta propuesta es subrayar la importancia de motivar a los estudiantes a usar el razonamiento geométrico, analizando, comparando, abstrayendo, construyendo o dibujando figuras geométricas. Para ello, es imprescindible proporcionar a los estudiantes situaciones en la que dispongan de una gran cantidad de ejemplos y contraejemplos de clases de polígonos considerando diferentes atributos para que puedan reconocer y dotar de significado matemático las partes de las figuras y determinar la pertenencia a una clase. Además, otro punto importante para la progresión en la comprensión de los conceptos geométricos es proporcionar a los estudiantes situaciones en las que tengan que justificar los atributos de las figuras geométricas, ya sea con registros discursivos, como puede ser a través del discurso oral o el escrito, o con registros no-discursivos, mediante el dibujo o la construcción con material didáctico. Esta justificación puede ayudar a afianzar los conceptos geométricos adquiridos y potenciar el desarrollo de formas de pensar.

Por último, queremos destacar la importancia del uso de materiales didácticos en el aula para que los estudiantes interioricen y comprueben los atributos de los conceptos geométricos. El uso de este material ayuda a los estudiantes a establecer relaciones entre los atributos de las figuras generando un pensamiento más abstracto (Albarracín, Badillo, Giménez, Vanegas y Vilella, 2018, pp. 326-328; Flores et al., pp. 127-146), lo que permite abandonar la tendencia del reconocimiento basado en lo perceptual por un reconocimiento más conceptual.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido apoyada en parte por el proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana (España) y por la Universidad de Alicante (FPU2017-014).

Bibliografía

Albarracín, L., Badillo, L., Giménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto*, 27(1), 55-71.

Battista, M. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: building on students' reasoning*. Nueva York: Heinemann.

Berga, M. (2013) El juego con materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 3 a 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(2), 63-93.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Uni-pluri/versidad*, *19*(2), 103-123. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021). Primary school students’ understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 251-270. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11–18. https://www.jstor.org/stable/40248098

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, pp. 37-51. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Ferrero, L. (2009). *Matemáticas 3: Primaria: segundo ciclo*. Madrid, España: Anaya.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139-162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Galetzka, M. y Glauner, P. (2017). A Simple and Correct Even-Odd Algorithm for the Point-in-Polygon Problem for Complex Polygons. In *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications - GRAPP, (VISIGRAPP 2017)* (pp. 175-178). https://doi.org/10.5220/0006040801750178

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and cognition*, pp. 70–95. Cambridge University Press: Cambridge.

Mora, J. A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *3*, 101-115.

Nortes, R. y Nortes, A. (2013). Perímetro y área: un problema en futuros maestros. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *84*, 65-85.

Pascual, M.I., Codes, M., Martín, J.P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en matemáticas XXIII* (pp. 463- 471). Valladolid: SEIEM.

Pérez, M.C. y Álvarez, O. (2001). *Matemáticas 3. Proyecto Ágora*. León, España: Everest.

Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, pp. 457-489. National Council of Teachers of Mathematics: Reston.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Togliani, L. (2019). Forms of Crossed and Simple Polygons. *Science & Philosophy*, *7*(2), 71-82.

Torra, M. (2016). Más material manipulable para enseñar matemáticas en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(1), 59-64.

Vukovic, R. K. y Lesaux, N. K. (2013). The language of mathematics: Investigating the ways language counts for children’s mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *115*(2), 227-244. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.002

Melania Bernabeu Martínez. Nacida en Elche en el año 1991. Graduada en Maestra en Educación Primaria por la Universidad de Alicante y Doctora en Didáctica de la Matemática en el programa de doctorado *Investigación Educativa* de la Universidad de Alicante. Actualmente miembro del grupo de investigación GIDIMAT-UA del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante. Mi principal interés de investigación es la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en educación primaria. De la investigación reseñada en este trabajo se han realizado varias publicaciones en revistas científicas y presentado comunicaciones en congresos nacionales e internacionales (https://cvnet.cpd.ua.es/curriculum-breve/es/bernabeu-martinez-melania/42578).
Email: melania.bernabeu@ua.es