

## Puzles de policubos

Ramón B. Zubillaga Berazaín (COMBIOMED – Tecnología Médica Digital. Cuba)

*Fecha de recepción: 20 de junio de 2021*

*Fecha de aceptación: 25 de noviembre de 2021*

---

**Resumen** Se explica el concepto de puzle de policubos y se presentan doce de estos, mostrando para cada rompecabezas una de sus soluciones. Finalmente, se muestran algunos récords mundiales Guinness relacionados con dos de los puzles de policubos más populares.

**Palabras clave** Disección de cubos. Cubo Soma. Cubo de Lola. Cubo de Lesk. Cubo de Bedlam.

---

**Title** Polycube puzzles

**Abstract** The polycube puzzle concept is explained and twelve of these are presented, showing for each puzzle one of their solutions. Finally, some Guinness World Records related with two of the most popular polycube puzzles are displayed.

**Keywords** Dissection of cubes. Soma Cube. Lola Cube. Lesk Cube. Bedlam Cube.

---

### 1. Introducción

En estos momentos, donde la pandemia de la COVID 19 entorpece nuestra rutina diaria y nos obliga a estar más tiempo en casa, es conveniente la lectura de artículos divulgativos, que entretengan y enseñen; y que, simultáneamente, hagan olvidar un poco el medio ambiente actual en que nos encontramos.

El presente artículo constituye parte de un libro en preparación (con nombre provisional de Desvaríos y Divertimientos Matemáticos) donde se dedica un par de capítulos a los puzles o rompecabezas de policubos.

Se ha realizado una selección de una docena de estos rompecabezas: diez con los que se forman cubos de tres unidades de lado y dos que permiten aumentar a cuatro la cantidad de unidades por lado. Para cada puzle se destaca su origen y principales características y se muestra una de sus soluciones.

Finalmente, se ofrecen los récords Guinness relacionados con dos de los puzles más populares, presentes en la selección.

### 2. Puzle de policubos

Se denomina policubo a la unión de dos o más cubos de igual tamaño por una o varias de sus caras. La figura 1 muestra todos los policubos que poseen desde uno hasta cuatro unidades.



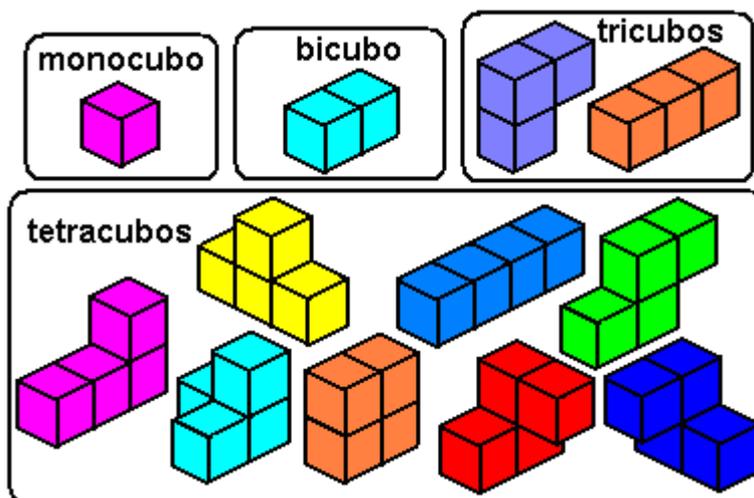


Figura 1. Policubos de menor tamaño.

Los últimos dos tetracubos, situados en la parte inferior derecha de la figura, tienen imágenes especulares entre sí, dado que uno es el reflejo especular del otro. A estos tetracubos se les denomina quirales porque uno es el reflejo especular del otro y no pueden superponerse entre sí.

El interés por los policubos, entre otras cuestiones, proviene del hecho de que, con algunos conjuntos de estos pueden formarse diferentes figuras y en especial, la de un cubo. Un conjunto de piezas con el que puedan formarse una o más figuras constituye un puzle de disección. A continuación, se presentan doce puzles de disección espaciales donde sus piezas son, precisamente, policubos.

### 3. El cubo Soma

Resulta extraño encontrarse con alguien que desconozca que es un cubo de Rubick. Su amplia divulgación y el reto que conlleva su solución lo llevó a un altísimo nivel de popularidad en todo el mundo.

Sin embargo, son muchos los que desconocen que es el cubo Soma. Este puzle fue inventado por el danés Piet Hein en 1936 mientras asistía a una clase de mecánica cuántica impartida por Werner Heisenberg, creador del principio de incertidumbre y premio Nóbel de Física en 1932. Las piezas de este rompecabezas están formadas por la unión de tres o cuatro cubos iguales por sus caras de forma que exista al menos una esquina interior (figura 2). Solo existe un tricubo mientras que hay seis tetracubos que incluyen los dos quirales (Gardner, M., 1986, pp. 28-43). Como puede verse, Hein tomó todos los policubos de tres y cuatro cubos excluyendo los tres que son convexos.

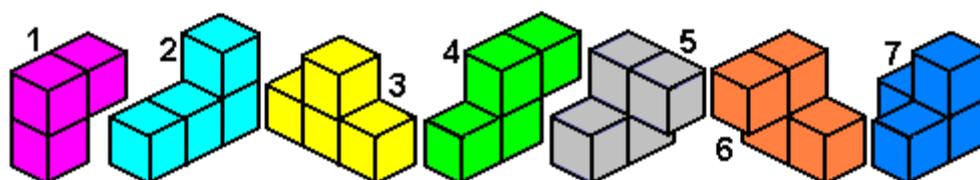


Figura 2. Piezas del cubo Soma.

Una vez escogidas las piezas, Hein notó que el total de cubos que las formaban era exactamente igual a 27 ( $3 + 6 \times 4$ ) e intentó formar un cubo con estas piezas lo que realizó sin gran dificultad. La figura 3 muestra una solución para armar este cubo. Note, en la parte derecha de la figura, la distribución espacial por pisos de las piezas que conforman esta solución.

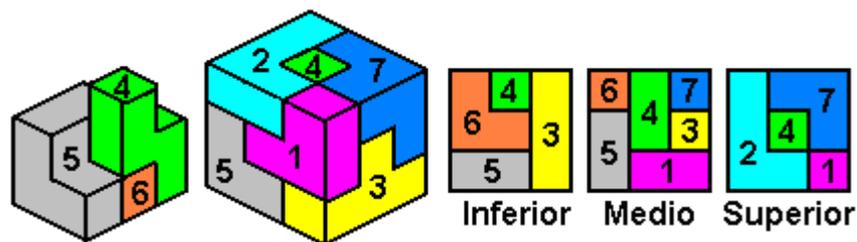


Figura 3. Solución del cubo Soma.

Hein elaboró, en poco tiempo, muchísimas figuras con estas siete piezas y se volvió adicto a la construcción. De ahí que lo denominara cubo Soma a partir de que así se llamaba una droga ficticia que creaba adicción y que estaba presente en una de las novelas del escritor Aldous Huxley. La creación de tal cantidad de figuras por parte del propio Hein propició, grandemente, la popularidad de este puzle.

Años más tarde, el matemático británico John Horton Conway realizó un análisis detallado del Cubo Soma y llegó a la conclusión de que existen 240 maneras diferentes de unir las siete piezas para armar el cubo. Debe aclararse que entre estas soluciones no se toma en cuenta la que pueda obtenerse a partir de la rotación o reflexión de alguna otra. Como curiosidad adicional, en cualquier solución en la formación de un cubo, la pieza T (número 3) siempre debe estar en la parte exterior ocupando dos de las esquinas del cubo, tal como ocurre en la solución mostrada.

La gran cantidad de soluciones para la formación del cubo muestra la ductilidad que poseen las piezas que constituyen este puzle, con el que se pueden formar las más diversas figuras. La figura 4 muestra cuatro de estas.

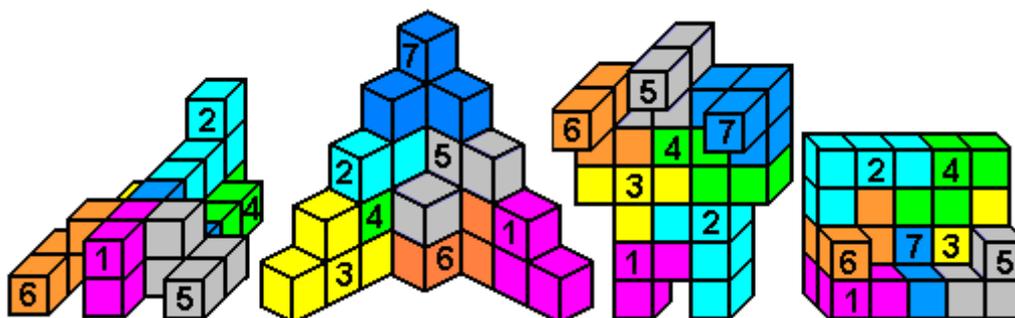


Figura 4. Alacrán, pirámide, gorila y sofá.

Sin lugar a dudas, el cubo Soma es el acertijo de disección espacial que mayor aceptación ha tenido. Algunos, tal vez por poseer igual número de piezas que el Tangram chino (el más famoso puzle de disección plano), lo han catalogado como el Tangram de la tercera dimensión.



La vida depara sorpresas en los momentos menos pensados. Gracias a la falta de atención que prestaba en clases el alumno Piet Hein, la humanidad cuenta hoy con este interesantísimo puzle que, además de su propia importancia, motivó el origen de otros más.

#### 4. El cubo de Cardano

El cubo que se presenta a continuación se le atribuye al matemático italiano del Renacimiento Gerolamo Cardano (1501-1576). Cuenta con las cinco piezas que se muestran en la figura 5 donde tres de estas son iguales (Rupérez J. A. y García M., 2009, pp. 129-139).

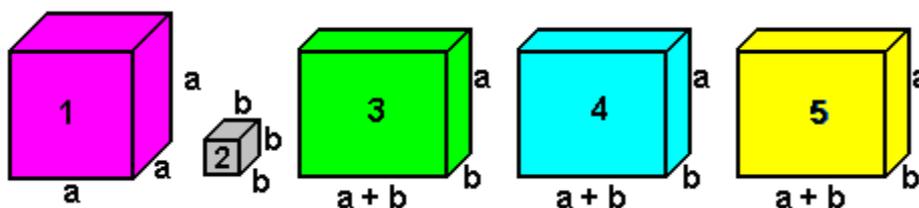


Figura 5. Piezas del cubo de Cardano.

Estas piezas son: un cubo de lado  $a$ , un cubo de lado  $b$  y tres paralelepípedos de lados  $a$ ,  $b$  y  $a + b$ . Jugando un poco con el álgebra se tiene:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

De esta última expresión queda claro que, con los cinco elementos que componen este puzle, se puede construir un cubo de lado  $a + b$ . La figura 6 muestra la única solución salvo rotaciones y reflexiones de este puzle, de indudable interés histórico y matemático.

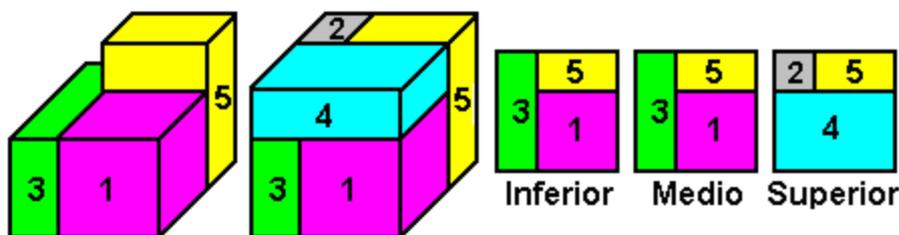


Figura 6. Solución del cubo de Cardano.

#### 5. El cubo diabólico

El cubo diabólico es un puzle de disección muy antiguo y se remonta a 1893 donde aparece en el libro *Puzzles Old and New* del profesor Louis Hoffman, seudónimo del matemático inglés Angelo Lewis (Coffin, S. T., 1991). Los seis policubos que forman el puzle son planos y poseen desde 2 hasta 7 cubos. Con estas siete piezas pueden formarse 13 cubos diferentes sin tomar en cuenta las reflexiones o rotaciones. La figura 7 muestra las piezas de este rompecabezas, así como una de sus soluciones.

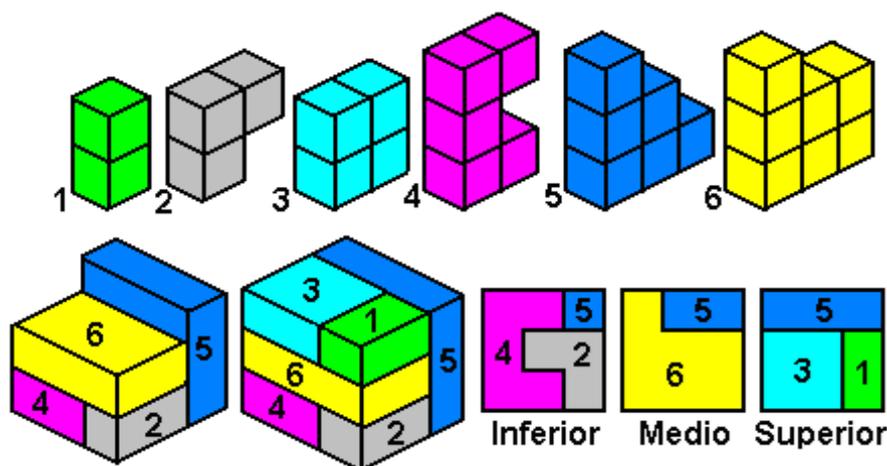


Figura 7. Piezas y solución del cubo diabólico.

## 6. El cubo de Yoshigahara

El japonés Nob Yoshigahara (1936-2004) está considerado como uno de los creadores de puzles más geniales del siglo XX. Fue un activo colaborador en varias columnas de revistas muy populares y escribió alrededor de 80 libros sobre puzles. Desde el 2005, la competencia internacional de puzles fue renombrada como la Competencia Anual de Diseño de Puzles Nob Yoshigahara.

La figura 8 muestra las piezas del cubo de Yoshigahara, así como su única solución salvo reflexiones y rotaciones. Encontrar esta solución no resulta una tarea fácil por lo que debe invertirse un tiempo promedio superior a una hora.

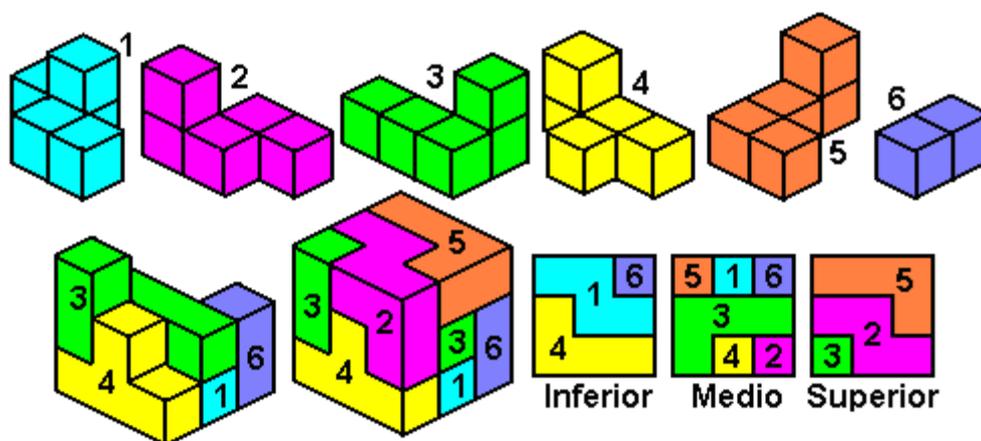


Figura 8. Piezas y solución del cubo de Yoshigahara.

## 5. El cubo de la media hora

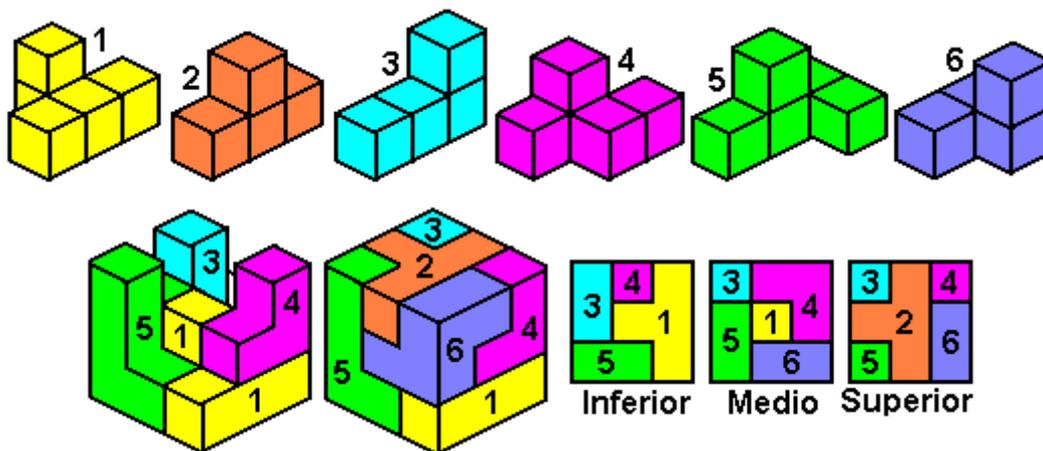
El estadounidense Stewart Coffin ha diseñado más de 500 puzles originales donde la mayoría de estos son poliédricos. Algunos de estos puzles han sido producidos comercialmente, como el conocido



Hectix. En el 2000, Coffin fue el ganador del premio Sam Loyd, mientras que, en el 2006, ganó el premio Nob Yoshigahara por su gran contribución a la creación de puzles mecánicos.

Coffin creó en 1980 un puzle de disección que permitía la formación de un cubo de lado 3 de una única manera (Coffin, S. T., 1991). Este cubo es conocido como puzle de la media hora (*half hour puzzle*) dado que el autor consideró este tiempo como el mínimo necesario para solucionarlo.

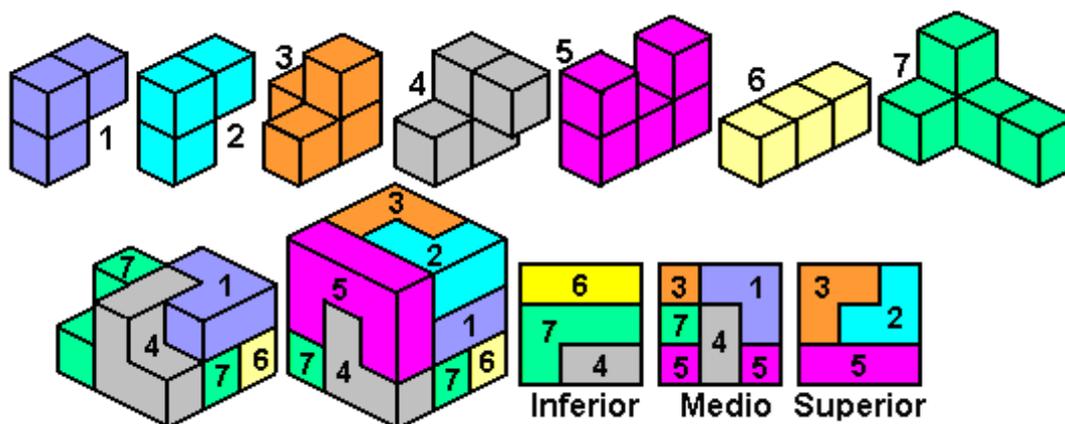
La figura 9 muestra las piezas de este puzle, así como su única solución salvo reflexiones o rotaciones.



**Figura 9.** Piezas del cubo de la media hora y su solución.

### 7. El cubo de Lola

El cubo de Lola se describió por primera vez en marzo de 2010 (Rupérez J. A. y García M., 2010, pp. 103-114) y surgió como homenaje de sus creadores, los profesores Muñoz y Hans, a su amiga Dolores de la Coba. Se trata de un puzle de disección donde, a partir de un conjunto de siete piezas, debe formarse un cubo. La figura 10 muestra las piezas de este cubo, así como una de sus soluciones.



**Figura 10.** Piezas del cubo de Lola y una solución.

Sin contar las reflexiones, rotaciones y los intercambios de las piezas 1 y 2, el cubo de Lola tiene un total de 608 soluciones (Zubillaga, R. B. y Zubillaga, D., 2019, pp. 135-138).

### 8. El cubo de Gribonval

El francés Gilbert Gribonval ha desarrollado varios puzles de disección; entre estos un puzle con policubos de cinco piezas con el que se puede construir un cubo en tres formas diferentes, salvo reflexiones y rotaciones. La figura 11 muestra las piezas de este puzle, así como una de sus soluciones.

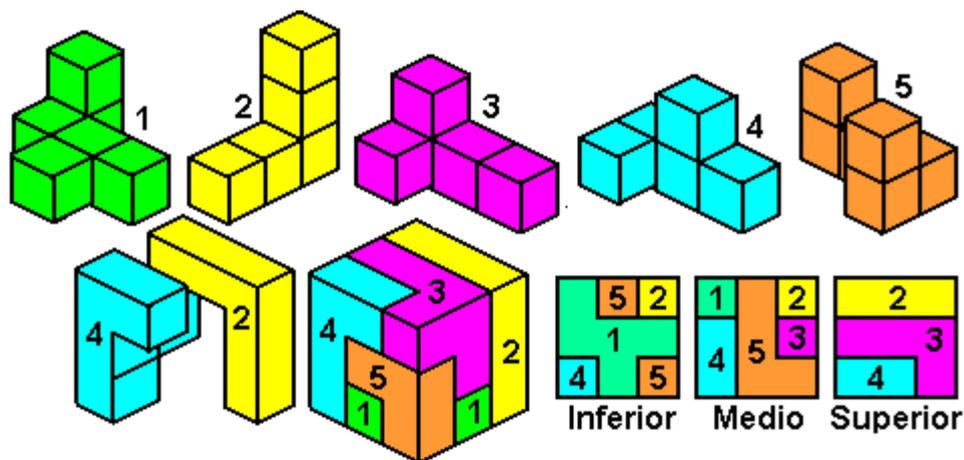


Figura 11. Piezas del cubo de Gribonval y una solución.

### 9. El cubo bucólico

Este cubo fue diseñado por el japonés Yasuhiro Hashimoto en el 2013 y presentado al IPP (Internacional Puzzle Party) Design Competition donde llamó la atención de inmediato. El puzle está constituido por tres heptacubos iguales con los que se debe formar un cubo de lado 3 al que le falten seis cubitos para completarlo (Rupérez J. A. y García M., 2015, pp. 141-157).

La figura 12 muestra las tres piezas que componen este rompecabezas, así como su única solución salvo reflexiones, rotaciones e intercambios entre sus piezas.

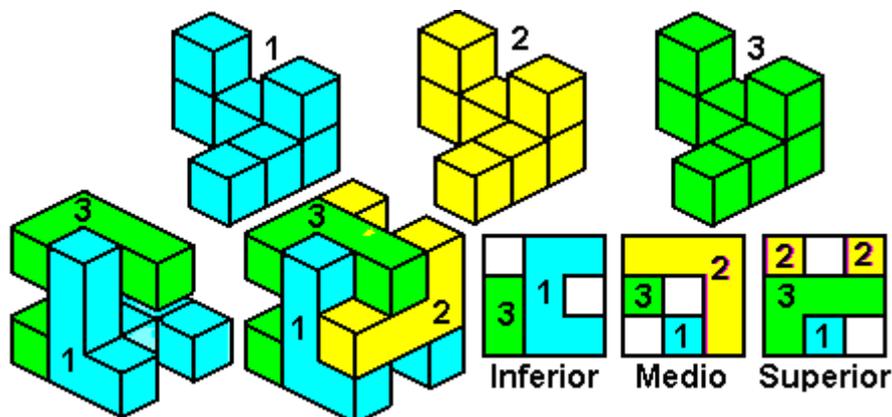


Figura 12. Piezas del cubo bucólico y su solución.



A pesar de su aparente simpleza, este cubo resulta algo complicado de construir, dado que por su propia naturaleza conduce a falsos derroteros. El tiempo de construcción puede estar entre una y dos horas. Brian Pletcher expresa: *Este es uno de mis puzles favoritos de la competición: parece simple al principio, y entonces se comienza a pensar que es imposible* (Pletcher, B., 2019).

Una ventaja del cubo bucólico es su impresión en 3D, dado que esta tarea se reduce al diseño de una única pieza que debe imprimirse tres veces.

## 10. El cubo Cecilia Valdés

Si buscar el número de soluciones del cubo de Lola fue un divertimento matemático para mí, crear un nuevo puzle de policubos fue, sin lugar a dudas, un verdadero desvarío.

¿Y por qué denominarlo Cecilia Valdés? *Cecilia Valdés* es el nombre de una de las primeras novelas cubanas escrita por Cirilo Villaverde y publicada en 1882. Esta novela constituye un reflejo costumbrista de La Habana colonial de principios del Siglo XIX y se relaciona con el sistema esclavista que reinaba en esa época. Cecilia Valdés es, además, el nombre de dos espectaculares obras artísticas, realizadas en homenaje a la obra de Villaverde: una zarzuela, en 1932, del gran músico Gonzalo Roig (con letra de Agustín Rodríguez y José Sánchez Arcilla) y un filme del destacado cineasta Humberto Solás (*Cecilia*), estrenado un siglo después de la aparición de la novela.

Este cubo posee cinco piezas y dos soluciones salvo reflexiones y rotaciones. La figura 13 muestra las piezas que componen este rompecabezas, así como una solución. Al solucionar este rompecabezas se llega a la conclusión de que la quinta pieza debe colocarse como una cara exterior del cubo; este hecho provoca que encontrar una solución sea relativamente simple y se realice en pocos minutos.

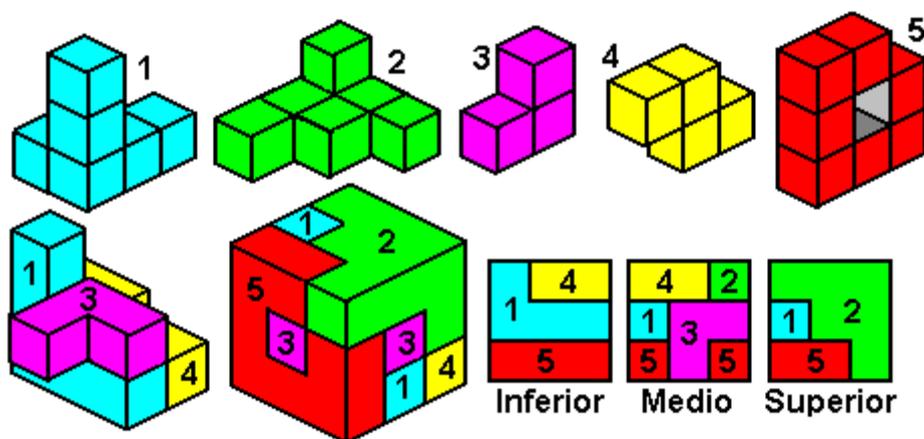


Figura 13. Piezas del cubo Cecilia Valdés y una solución.

## 11. El cubo de Lesk

Martin Gardner, en su libro *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas* (Gardner, M., 1986, pp. 28-43), describe un puzle de policubo de la autoría del neozelandés Lesk Kokay que se encuentra formado por las seis piezas que se muestran en la figura 14.

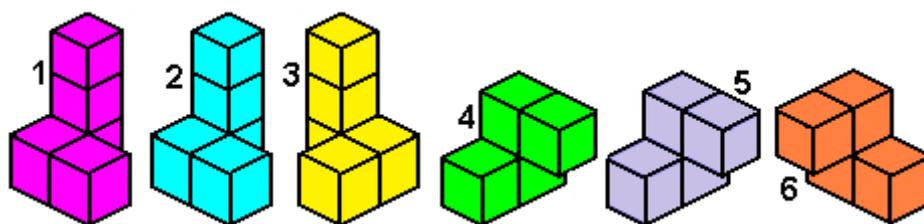


Figura 14. Piezas del cubo de Lesk.

Nótese la existencia de dos grupos de tres piezas, uno con pentacubos y otro de tetracubos; además, en cada uno de estos tríos hay una pareja de piezas iguales, siendo la restante quiral con respecto a las integrantes de la pareja.

Este cubo fue descrito en 1978 en la publicación escolar neozelandesa *Mathematical Digest* donde se establece que posee solución única. Gardner aclara que, desafortunadamente, esto no es cierto y que posee al menos tres soluciones.

Decidido a conocer cuál es el número total de soluciones de tan interesante cubo, adapté el programa con el que se calcularon las soluciones del cubo de Lola a este caso y, siguiendo un procedimiento similar, encontré todas sus soluciones.

Sin contar las reflexiones, rotaciones y los intercambios de las piezas 1 y 2 o de las piezas 4 y 5 (y los dobles intercambios entre estas piezas), el cubo de Lesk posee cuatro soluciones. La figura 15 muestra una de las soluciones con su distribución espacial.

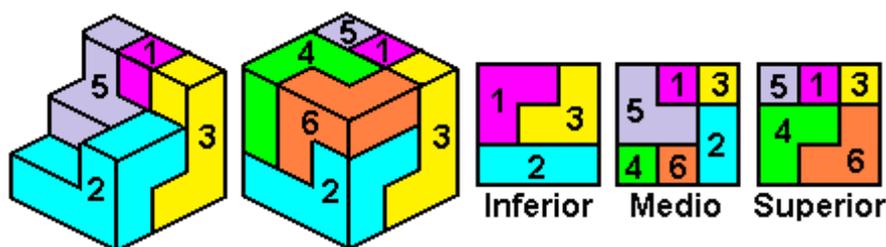


Figura 15. Solución del cubo de Lesk.

Resulta interesante decir que en las cuatro soluciones la pieza 3 se encuentra en una esquina del cubo ocupando, exactamente, la posición que tiene en la solución mostrada.

Una vez más, Martin Gardner tiene la razón. Sirva este simple comentario como un pequeño homenaje a la memoria de tan gran matemático.

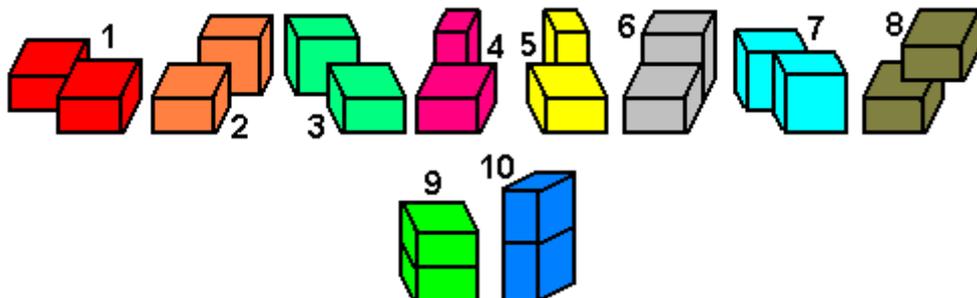
## 12. El cubo Patio Block

Para terminar esta muestra, se presentan dos puzles con los que se puede formar cubos de cuatro unidades de lado.

El primero de estos cubos es el denominado “Patio Block” y fue diseñado por Stewart Coffin del cual mostramos, con anterioridad, el cubo de la media hora.



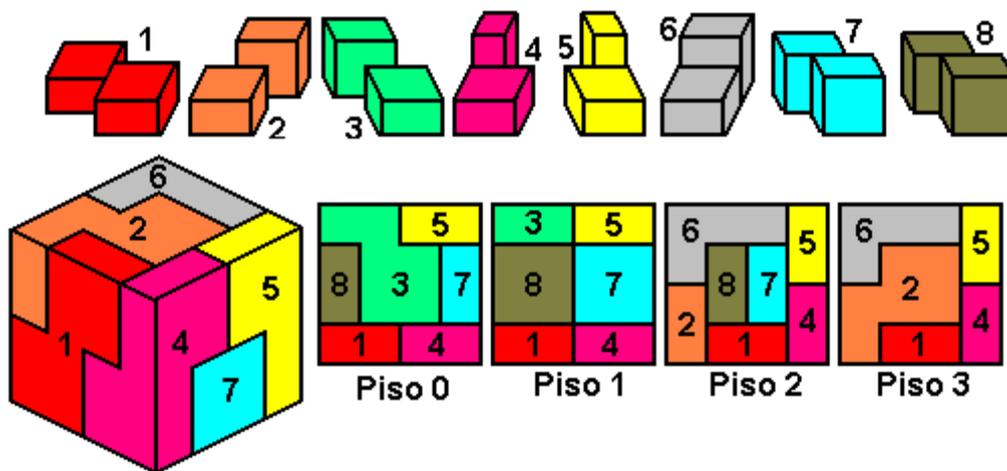
Originalmente, Coffin tomó las 10 piezas diferentes que se pueden formar a partir de la unión de dos tetracubos cuadrados (figura 16) e intentó formar un cubo con las ocho primeras, descartando las dos convexas (similar a lo realizado por Piet Hein cuando seleccionó las piezas del cubo Soma).



**Figura 16.** Las 10 piezas posibles.

Infelizmente, el cubo es imposible de formar a partir de estas ocho piezas, aunque puede construirse si se sustituye la pieza 8 por una cualquiera de las primeras siete piezas.

La figura 17 muestra las piezas del puzle Patio Block comercial (donde la pieza número 8 es copia de la 7) y una de sus soluciones.



**Figura 17.** Piezas del cubo Patio Block y una solución.

### 13. El cubo de Bedlam

El cubo de Bedlam es un rompecabezas inventado por el experto británico en puzles Bruce Bedlam en el 2006. Consiste de 13 piezas: 12 pentacubos y un tetracubo (figura 18). Con estas piezas se puede formar un cubo de lado cuatro de 19 186 formas diferentes sin tomar en cuentas las reflexiones y rotaciones (Kurowski, S., 2008).

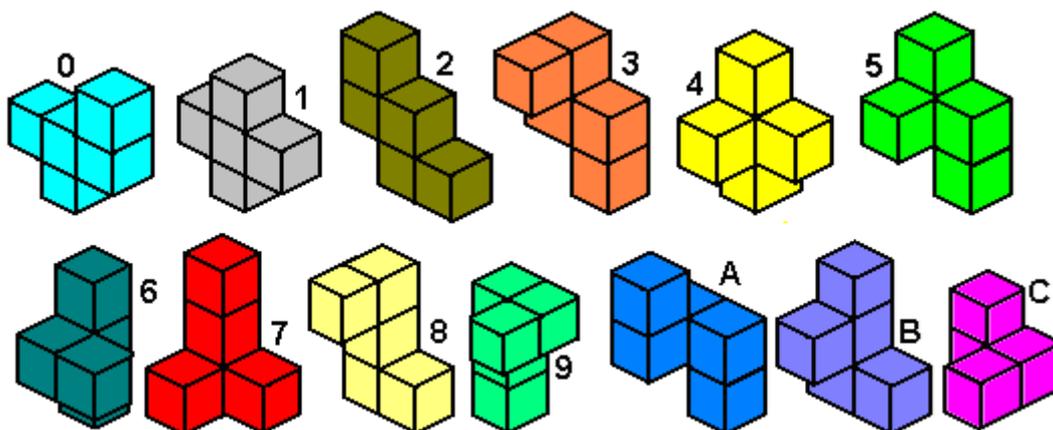


Figura 18. Piezas del cubo de Bedlam.

Note que las piezas se identifican con los dígitos del 0 al 9 y las letras *A*, *B* y *C*. Se ha seguido la notación empleada por Scott Kurowski, autor de la solución que se muestra en la figura 19 y quién, además, calculó el total de soluciones de este rompecabezas.

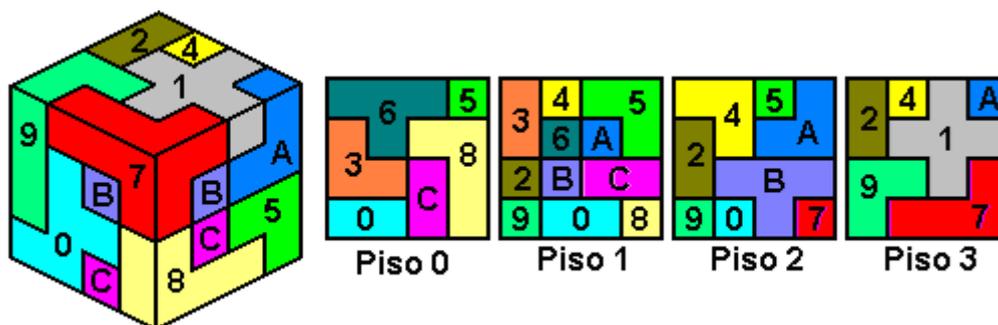


Figura 19. Solución del cubo de Bedlam.

## 14. Récorde Guinness

El récord Guinness para la construcción del Cubo Soma es de 2,643 segundos y fue establecido por el chino Huang Ruiyi en Xiamen, Fujian, China, el 16 de noviembre de 2020. Este resultado destrozó el récord anterior de 2,93 segundos en posesión del indio Krishnam Raju Gadiraju, obtenido en el 2017. ¡Nótese que ambos valores son inferiores a 3 segundos! Increíble, ¿no es cierto?

La construcción del cubo de Bedlam, indiscutiblemente más difícil, posee el récord Guinness de 11,03 segundos y está en posesión de Danny Bamping desde el 9 de noviembre del 2006; para este propio cubo, pero con los ojos vendados, el récord es de 27,21 segundos y fue establecido el 25 de febrero de 2008 por el noruego Aleksander Iljasov.

## 15. Reflexión final

Los cubos mostrados en este recorrido han sido diseñados por un danés, un italiano, un estadounidense, dos españoles, un francés, dos japoneses, un neozelandés, un cubano y dos británicos.



Esto muestra la atención que ha tenido este tipo de puzle de disección en todo el planeta. El hecho de que dos de estos puzles tengan sus propios récords Guinness destaca, además, la aceptación y popularidad que posee este tipo de rompecabezas. Espero que el lector haya aprendido y disfrutado a la vez, con los puzles mostrados en esta selección.

### ***Bibliografía***

- Coffin, S. T. (1991). Chapter 3 of “The Puzzling World of Polyhedral Dissections”. Recuperado el 4 de julio de 2019, de <https://johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap03.htm>.
- Gardner, M. (1986). *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*. New York: W. H. Freeman.
- Kurowski, S. (2008). *Bedlam Cube Solved*. Recuperado el 10 de enero de 2020, de [https://en.wikipedia.org/wiki/Bedlam\\_cube](https://en.wikipedia.org/wiki/Bedlam_cube)
- Pletcher, B., *Brian’s dawn puzzle blog*. Recuperado el 15 de enero de 2019, de <http://mechanical-puzzles.blogspot.com/2013/08/2013-puzzle-design-competition-part-1.html>.
- Rupérez, J. A. y García, M. (2009). Las disecciones de cubos. Secuenciación en tamaños y dificultad como una propuesta didáctica. *Números* [en línea], 72. Recuperado el 10 de enero de 2018, de <http://www.sinewton.org/numeros>
- Rupérez, J. A. y García, M. (2010). Disecciones de cubos, juegos de persecución y otros problemas. *Números* [en línea], 73. Recuperado el 10 de enero de 2018, de <http://www.sinewton.org/numeros>
- Rupérez, J. A. y García, M. (2015). Algunas cosas más sobre el cubo de Lola. *Números* [en línea], 88. Recuperado el 20 de febrero de 2019, de <http://www.sinewton.org/numeros>
- Zubillaga, R. B. y Zubillaga D., *Las 608 soluciones del cubo de Lola*. *Números* [en línea], 101. Recuperado el 10 de enero de 2020, de <http://www.sinewton.org/numeros>

**Ramón B. Zubillaga Berazaín.** Trabaja en Combiomed Tecnología Médica Digital, La Habana, Cuba. Lic. en Matemáticas de la Universidad de La Habana (1971) y MSc. en Sistemas Digitales, ISPJAE (1976). Es autor de los libros *Algo + que Acertijos Matemáticos* (2011); *+ curiosidades y acertijos matemáticos* (2015) y *101 acertijos matemáticos* (2017) publicados por la Editorial Científico-Técnica y de *Cuadrados mágicos y otras deidades matemáticas* (2018) publicado por la Editorial Academia.