MODELOS TÁCITOS Y METÁFORAS CONCEPTUALES EN EL ESTUDIO DEL INFINITO MATEMÁTICO

Tamara Díaz Chang; Elizabeth Hernández Arredondo
Tamara.diaz@uach.cl,
elizabeth.hernandez@ulagos.cl
Universidad Austral de Chile, Universidad de Los Lagos

Resumen

En este trabajo abordamos los modelos tácitos o inconscientes que aparecen en el estudio del infinito matemático en la sala de clases universitarias, mirado bajo el lente de la metáfora conceptual, precisando obstáculos y dificultades que se deberían considerar para lograr una comprensión adecuada de este concepto matemático.

Abstract

In this paper we examine tacit models that appear in the study of mathematical infinity under the lens of conceptual metaphors, specifying obstacles and difficulties that must be considered in order to achieve an adequate understanding of this mathematical concept.

Problema de investigación

El infinito matemático es uno de los conceptos más complejos a los que se enfrentan estudiantes y profesores universitarios, por lo que ha sido ampliamente estudiado desde varias perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas. A pesar de esto, no es posible afirmar que comprendemos los complicados procesos cognitivos que se desarrollan en relación a su aprendizaje. Existen numerosos trabajos (e.g. Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein, 2001; Tall, 1981) que dan cuenta de la dificultad y complejidad que presenta, en este caso, el obstáculo epistemológico. En particular, Arrigo y D'Amore (2004) plantean que su concepción se produce lentamente, de modo contradictorio, tras un largo proceso de maduración cognitiva.

El clásico debate filosófico sobre el infinito en sentido actual y en sentido potencial, originado en la antigua Grecia por Aristóteles (trad. 1985), ha inspirado diferentes investigaciones (e.g. Bagni,1998; Tsamir & Tirosh, 1994). En algunos trabajos se considera que las intuiciones acerca del infinito emergen en consideración de procesos recursivos y como una extrapolación de nuestra experiencia que es finita (Arrigo & D'Amore, 2004). Los niños conciben al *infinito potencial* a través del proceso de conteo sin fin de los números naturales. Luego, cuando se introduce el símbolo $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de los números naturales, los estudiantes asumen que se tiene la totalidad de estos números. Según Tall (1981), la mayoría de los estudiantes pierden la concepción del *infinito potencial* en relación con los naturales a partir del estudio de la Teoría de Conjuntos, adoptando la noción de *infinito actual* introducida por Cantor.

Normalmente, para los estudiantes, hay más números enteros que números naturales. Una vez que se acepta la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes entonces creen que han podido concluir porque ambos conjuntos son infinitos, por lo que infieren que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad: infinita. Luego, aquí surge nuevamente una dificultad al tratar con las distintas cardinalidades de los conjuntos infinitos introducidas por Cantor y la noción de que existen infinitos más grandes que otros, es decir, al tratar con la existencia de los cardinales transfinitos. En este caso el estudiante concluye entonces que los conjuntos de los números naturales, de los números enteros, de los números racionales y el de los números reales, deberían tener la misma cardinalidad. Estudios clásicos realizados en los años 80 y 90 dan evidencia de este suceso (e.g. Fischbein, 1987; Tsamir & Tirosh, 1994) que se denomina *aplastamiento* de los cardinales transfinitos (D'Amore, 2011). En uno de sus trabajos, Duval (1983) analiza la dificultad que tienen los alumnos para aceptar la correspondencia biunívoca entre los naturales y su subconjunto de los números cuadrados, y explica que esto se debe a un obstáculo que él llama el deslizamiento, refiriéndose a la dificultad que en este caso, se tiene al hacer transformaciones entre diversos sistemas de representación.

Otra convicción intuitiva muy difundida entre los estudiantes es pensar que en un segmento más largo hay más puntos que en un segmento más corto (e.g. D'Amore & Martini, 1997; Tall, 1981), lo que D'Amore (2011) denomina *dependencia* de los cardinales transfinitos a hechos relativos a la medida. Por otra parte, algunos estudios (e.g. Dubinsky et al, 2005; Fischbein, 2001) muestran que muchas de las conocidas paradojas sobre el infinito (como la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga) (Bolzano, 1991) surgen como convicciones intuitivas que provocan dificultades en el proceso de emergencia de los significados de este concepto en los estudiantes.

Fishbein (2001) argumenta que tanto el aplastamiento, como el *deslizamiento* y la *dependencia*, constituyen *modelos tácitos*, implícitos e inconscientes, que aparecen cuando se trata con conceptos que son demasiado abstractos o complejos. En estas circunstancias, tenemos una tendencia natural a pensar en términos de modelos mentales simplificados, que nos ayudan a representar a las identidades originales con el fin de facilitar y estimular la tarea de comprensión o resolución, y que luego se vuelven implícitos o tácitos, controlando nuestro razonamiento de manera inconsciente para nosotros.

Numerosos trabajos muestran que la construcción del infinito matemático es un proceso complejo y lleno de obstáculos, y que para que éstos sean superados, hay que ayudar a los estudiantes a tomar consciencia de estos modelos inconscientes en sus procesos mentales. Por ejemplo, Arrigo y D'Amore (2004) recomiendan que para superar el modelo de dependencia, o sea, para rectificar la creencia de que en un segmento más largo hay más puntos que en un segmento más corto, se ayude a los estudiantes a separarse del modelo del segmento como "collar" cuyas "perlas" se hallan ordenadas.

Luego, en este trabajo abordaremos los *modelos tácitos*, implícitos o inconscientes que aparecen en el estudio del infinito matemático en la sala de clases universitarias, precisando obstáculos y dificultades que los estudiantes deberían superar y los profesores deberían considerar, para lograr una comprensión adecuada de este concepto.

Marco teórico

Para fundamentar nuestro análisis nos apoyamos en los estudios de la lingüística cognitiva (Lakoff y Núñez, 2000) basados en la teoría de la *Embodiment Cognition* (Rosch, Thompson, y Varela, 1991), que propone que ciertos procesos constituyentes de la cognición están basados y se derivan de la interacción del medio con el individuo, y ofrece un conjunto de técnicas para estudiar estructuras conceptuales inconscientes, implícitas en nuestras experiencias, jugando un rol fundamental en los procesos de abstracción en general, así como en la construcción de ideas matemáticas (Lakoff y Núñez, 2000).

Desde esta perspectiva teórica, *images schemas* pueden derivar en mecanismos cognitivos conocidos como *metáforas conceptuales*, que forman enlaces inconscientes entre dominios conceptuales diferentes, en el que la estructura del dominio de partida infiere una estructura en el dominio de llegada. El origen de esta metáfora puede ser una experiencia del mundo físico o una conceptualización ya existente, creando un vínculo que conecta conceptos o subdominios, fuera o dentro de las matemáticas. En particular, desde esta perspectiva, Lakoff y Núñez (2000) proponen que la concepción del *infinito actual* se basa en la llamada la *metáfora básica del infinito (MBI)*, mediante la cual, los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan alcanzando un resultado final, un "completamiento metafórico"

Método

Se implementó una metodología apoyada en la investigación bibliográfica de carácter cualitativo y argumentativo. Para estudiar con mayor profundidad estos *modelos tácitos* que aparecen en el aprendizaje del infinito matemático, es importante comprender cómo sucedió su proceso de evolución a lo largo de la historia. Luego, en este trabajo nos apoyamos en el análisis de la evolución histórica del infinito como concepto matemático, por medio de las *metáforas conceptuales* que condujeron a su proceso de axiomatización, expuesto en Díaz -Chang y Arredondo (2021). A partir de este estudio se realiza la interpretación y el análisis de la información extraída de la literatura seleccionada, que nos permitió identificar las dificultades, que en relación a estos *modelos tácitos* se tuvieron que superar a lo largo de la historia, mostrándonos a su vez, de esta manera, los obstáculos que deben superarse durante el aprendizaje de este concepto matemático.

Para realizar la selección de la literatura, la interpretación y el análisis de la información extraída, se utilizó el método de la meta-etnografía (Noblit y Hare, 1998) que nos permitió sintetizar de manera sistemática los resultados de nuestra investigación y dar respuesta focalizada a las preguntas establecidas por el objetivo de investigación mencionado anteriormente. Este método proporciona una forma específica de realizar meta-síntesis cuya meta va más allá del resumen y el análisis de datos, donde los hallazgos de los estudios originales se convierten en datos que son analizados a través de un proceso riguroso de interpretación y comparación de ideas, conceptos y perspectivas relevantes, conduciendo así a la síntesis esperada.

Resultados

Comencemos recordando que en el siglo IV a.C. en la Grecia antigua existían concepciones opuestas sobre el espacio y el tiempo, y en consecuencia, se concebía al infinito de formas diferentes. Las categorías filosóficas definidas por Aristóteles en su *Metafísica*, relacionadas con el infinito matemático: el *infinito potencial* y el *infinito actual*, se referían tanto a lo infinitamente grande como a lo infinitamente pequeño. A pesar de haberlo considerado en sus discusiones filosóficas, los antiguos griegos no aceptaron la existencia del infinito matemático de manera abierta, especialmente en su versión actual, al principio a causa de las paradojas de Zenón, y más tarde debido a la influencia de las ideas de Aristóteles.

Las paradojas de Zenón producían contradicciones lógicas, tanto si se consideraba el espacio y el tiempo como continuos, que como discontinuos. En estas paradojas nuestro análisis reconoce la presencia de varios de estos *modelos tácitos* reportados en la literatura. Por ejemplo, tomando la paradoja de Aquiles y la tortuga (Bolzano, 1991), se tiene la *inagotabilidad* (Fischbein, 1987) cuando se considera que "no se puede calcular" la suma infinita, debido a la *indefinición* (Belmonte y Sierra, 2011) que supone una cantidad infinita de términos, además de la *divergencia* (Belmonte y Sierra, 2011), porque "siempre se puede seguir sumando". En estrecha relación con los tres modelos anteriores, también se tiene el modelo que hemos acuñado en un estudio anterior como lo inalcanzable, cuando se afirma que "el límite de las sumas parciales nunca se alcanza"; y la *dependencia* (Arrigo & D'Amore, 2004), cuando se asocia el segmento como espacio geométrico con una distancia numérica. Similarmente, debido a las limitaciones geométricas, aparece el modelo *acotado-finito* (Belmonte y Sierra, 2011).

Es notable el hecho de que Aristóteles consideraba que la "totalidad" de los números no podía estar presente en nuestro razonamiento, puesto que al generar una lista de éstos, nunca se podía generar la lista completa, por lo que el infinito solo podía existir como *infinito potencial*, pues estaba caracterizado por su inherente *incompletitud* (*modelo tácito* considerado por Belmonte y Sierra, (2011)) y por su existencia solo como potencialidad (Aristóteles, 1985).

Durante los siglos posteriores esto no cambió, durante mucho tiempo los matemáticos se debatieron en contra o a favor de su existencia. Al igual que sus colegas griegos, los matemáticos de las siguientes generaciones se opusieron a aceptar la existencia del infinito matemático, especialmente en su concepción actual, debido a las numerosas paradojas y dificultades que originaba. Fue

Bolzano, a partir de los trabajos de Kant, quien lo abordó de manera formal y sistemática, explorando conceptualmente las propiedades de los conjuntos infinitos (Bolzano, 1991). De hecho, su trabajo se basó en las ideas de Galileo que ya había establecido las dificultades que aparecían cuando se trataba de hacer razonamientos acerca de este concepto (Galileo, 1954). Un ejemplo clásico de estas dificultades es precisamente la paradoja de Galileo, donde aparece el *modelo tácito* de *inclusión* (Fishbein, 1987) originado en la noción común: "el todo es mayor que una de sus partes".

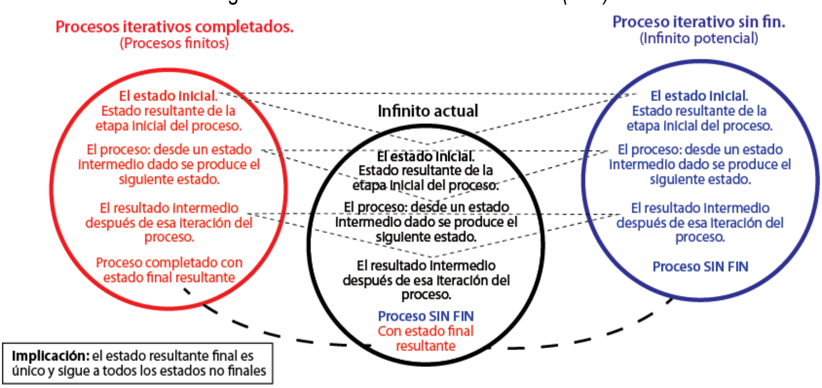
Fue cuestionando precisamente este *modelo tácito*, que Dedekind pudo dar su definición de conjunto infinito. Declaró que siempre que dos conjuntos -finitos o infinitos- pudiesen ser emparejados por una correspondencia biyectiva, entonces tendrían el mismo número de elementos. Pero, ¿cómo fue que Dedekind pudo superar la dificultad planteada por este *modelo tácito*? Y en general, ¿cómo fue posible superar todos los obstáculos que estos *modelos tácitos* implican, desde Zenón hasta la culminación del proceso de axiomatización del infinito matemático a finales del siglo XIX con los trabajos de Cantor?

Comencemos nuestro análisis con el caso de Dedekind y la superación del *modelo tácito* conocido como *inclusión.* Las caracterizaciones de conjuntos infinitos dadas hasta Galileo, estudiaban las nociones cotidianas de "misma cantidad que" y "más que", que se basaban de manera natural en nuestra experiencia con colecciones finitas. Cuando trabajamos con conjuntos finitos consideramos que si el conjunto A tiene la "misma cantidad" de elementos que B, esto significa que si para cada elemento de A, quitamos un elemento correspondiente de B, entonces no queda ningún elemento de B "sobrante". Si extendemos esta idea de "sobrante" a conjuntos infinitos para responder a la pregunta: ¿hay más números naturales que números impares?, podemos hacer coincidir los elementos de ambos conjuntos y llegar a la conclusión de que hay más números naturales que números impares, porque en el conjunto de los naturales quedan números "sobrantes". Sin embargo estos dos conjuntos son "emparejables" porque podemos poner sus elementos en correspondencia biyectiva. Luego, el "emparejamiento" y la "misma cantidad que" son dos ideas que tienen la misma extensión para colecciones finitas, pero son cognitivamente diferentes y no tienen la misma extensión para colecciones infinitas. Dedekind se dio cuenta de esto y utilizó el concepto de "emparejamiento" en lugar de nuestro concepto cotidiano de "misma cantidad que", dándole un significado metafórico a la comparación del número de elementos de conjuntos infinitos a través de la *metáfora conceptual* definida por Lakoff y Núñez (2000) como "misma cantidad" como "emparejamiento".

Luego, para extender la noción de cardinalidad a conjuntos infinitos, hay que ignorar activamente la cláusula "sobrante" que está implícita de manera inconsciente en nuestra noción ordinaria de "más que". A partir de esta definición de conjuntos infinitos, Cantor pudo crear todo el aparato conceptual de su Teoría de Conjuntos, y para lograrlo tuvo que superar estos *modelos tácitos* ya mencionados, especialmente relacionados con la concepción actual del infinito, absolutamente rechazada por la comunidad matemática hasta ese momento.

Notemos que para superar estos *modelos tácitos,* Cantor tuvo que construir la llamada *MBI* (ver Figura 1), cuya riqueza y peculiaridad es su organización y estructura. La correspondencia entre los dos espacios de partida implica a todos los elementos con la excepción del último, que distingue esencialmente un proceso finito de un proceso potencialmente infinito. Luego, aquí hay un conflicto entre la caracterización de un proceso con fin y estado resultante final, y la caracterización de un proceso interminable, sin estado final resultante, mostrando así la presencia de estructuras conceptuales contradictorias.

Figura 1. *La metáfora básica del infinito (MBI)*



Fuente: Lakoff y Núñez (2000, p.1730) (Traducción propia)

El *aplastamiento* de los cardinales transfinitos (D'Amore, 2011) es otro *modelo tácito* que está presente inconscientemente en los procesos de pensamiento de los estudiantes, al afirmar que el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales tienen el mismo número de elementos. El ingenioso argumento de la diagonal de Cantor que demostró lo contrario de esto, es decir, que hay más números reales que números naturales, también hace uso implícito del *MBI*

(Lakoff y Núñez, 2000). Así, una vez más, la *MBI* proporciona un mecanismo para abordar este *modelo tácito* de manera consciente.

De manera similar, a partir del análisis realizado en Díaz-Chang y Arredondo (2021) concluimos que tanto los cardinales y los ordinales transfinitos de Cantor, así como los infinitesimales de Robinson (1966), se "completaron metafóricamente" a través de esta metáfora. Así, los obstáculos planteados por los modelos tácitos relevantes en cada uno de estos casos podrían superarse mediante la construcción consciente de estos mapeos y proyecciones metafóricas.

Conclusiones o reflexiones finales

Nuestro análisis muestra que la *metáfora conceptual* es un mecanismo cognitivo que nos permite construir estructuras que nos ayudan a superar estos *modelos tácitos* de manera consciente. Al mismo tiempo, estas metáforas nos permiten comprender estas estructuras conceptuales inconscientes contradictorias, así como las razones por las cuales nos parecen contraintuitivas; nos brindan información sobre las estructuras cognitivas y las dificultades que implica el aprendizaje de éste y, en general, de otros conceptos matemáticos. A menudo los estudiantes no resuelven estos conflictos y en consecuencia no se logra el completamiento metafórico, por lo que es tarea del profesor guiar este proceso de manera que los estudiantes logren hacerlo.

En particular, este estudio nos permitió concluir que no hay nada incorrecto con nuestra intuición respecto al infinito matemático, nuestros mecanismos cognitivos se ven limitados por nuestras sensaciones moto-sensoriales, y se basan en esquemas de contenedor para colecciones finitas y sus jerarquías, en experiencias cinestésicas relacionadas con la comparación de tamaños y la correspondencia de elementos (Lakoff y Núñez, 2000). Luego, también nos invita a poner atención y a reflexionar sobre la inconsistencia de nuestros propios pensamientos e intuiciones en relación con este concepto matemático, al mismo tiempo que nos permite mostrar a los estudiantes la validez de estos *modelos tácitos* y estas inconsistencias, enfatizando la relatividad del infinito en las matemáticas a lo largo de la historia.

Argumentamos que la incorporación de los resultados de este tipo de investigación, en especial bajo este marco teórico, es de gran relevancia en la transformación de nuestra práctica docente universitaria en relación con este concepto matemático. Este tipo de reflexiones nos permite mejorar el diseño de actividades encaminadas al desarrollo de *metáforas conceptuales*, que conduzcan a los estudiantes a superar estos modelos, guiándolos hacia una comprensión adecuada del infinito matemático y haciendo más efectiva nuestra propuesta didáctica en la sala de clases.

Referencias bibliográficas

Aristóteles. (trad. 1985). *The complete Works of Aristotle. The revised Oxford translation*. In J. Barnes (Ed.). New Jersey, United States: Princeton University Press.

Arrigo, G. y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5-20.

Bagni, (1998). L'infinitesimo nelle concezioni degli student prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*, *3*(2), 110-121.

Belmonte, J. L., Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 139-171.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México.

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. En AA. VV., *Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*, Bogotá, Colombia. CD. ISBN 978-958-57050-0-5, 21-29.

D'Amore, B., Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, *32*, 26-32.

Díaz-Chang, T., Arredondo, E-H. (2021). Del infinito potencial al actual: un recorrido histórico a través de la metáfora conceptual. *Revista Paradigma*, *42*(1), 106-132.

Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M.,Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis. *Educational studies in Mathematics*, *58*, 335-359.

Duval, R. (1983). L'obstacle de dédoublement des objets mathématiques. *Educational studies in Mathematics*, *14*, 385-414.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, *48*, 309-329.

Fischbein, E. (1987). *Intuitions in Science and Mathematics*. Dordrecht, Reidel Publ.

Galilei, G. (trad.1954). *Dialogues concerning two new sciences*, Dover Publications, New York.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Princeton University Press.

Rosch, E., Thompson, E. y Varela, F. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press, Cambridge, MA.

Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. Basic Books, New York, USA.

Noblit, G. W., Hare, R. D. (1998). *Metha-etnography: synthesizing qualitative studies*. Sage Publications, California.

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School*, *10*(3), 30-33.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Actas del PME*, *18*(4), 345-352.