



## INTRODUCCIÓN A LA DERIVADA MEDIANTE RECTAS TANGENTES Y PENDIENTES

Eduardo Rafael Canul Pech

educanul@gmail.com

CEDART-Mérida

Mérida, Yucatán, México

.....

### Resumen

*El siguiente artículo presenta los resultados de una experiencia didáctica en el aula con estudiantes preuniversitarios. El objetivo fue introducir el concepto de derivada, mediante el trazo rectas tangentes a curvas y el cálculo de pendientes. Los resultados muestran que lograron superar dificultades en sus trazos y cálculos, lo que contribuye a mejorar los significados de la derivada.*

**Palabras clave:** Recta tangente, Pendiente, Derivada

### Abstract

*The following article presents the results of a didactic experience in the classroom with pre-university students. The objective was to introduce the concept of derivative, drawing lines tangent to curves and calculating slopes. The results show that they managed to overcome difficulties in their plotting and calculations, which contributes to improving the meanings of the derivative.*

**Keywords:** Tangent line, Slope, Derivative

### Problema de investigación

El concepto de derivada involucra varios conceptos matemáticos como el límite, pendiente, recta tangente, razón de cambio, entre otros. Debido a ello, diferentes estudios mencionan que la derivada es un concepto que en el sistema educativo conlleva a dificultades en sus procesos de enseñanza y aprendizaje (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Robles, Del Castillo y Font, 2010; Park, 2015; Moya, Rojas, Arzola y García, 2021). En ese sentido, es importante proponer actividades didácticas que atiendan dichas dificultades para que los estudiantes construyan nuevos significados en el concepto de derivada.

Tradicionalmente se presenta el concepto de manera analítica con una interpretación geométrica de una recta secante que se vuelve tangente o con la pendiente de la recta tangente en un punto dado. Sin embargo, el tránsito del registro analítico al geométrico no es inmediato, pues varios estudiantes no tienen la comprensión de algunos conceptos previos como el caso de la recta tangente a curvas. A partir de ello, se consideró relevante diseñar una propuesta didáctica en el aula, que pretende relacionar los conceptos de pendiente y recta tangente en diferentes curvas, previo a abordar la definición formal de la derivada.

### Marco teórico

La investigación se fundamenta en los estudios realizados sobre tres conceptos: derivada, recta tangente y pendiente.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) mencionan que algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada (expresión analítica, límite del cociente incremental, interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente). En cuanto a la construcción de significados de la derivada, mencionan que las concepciones previas de los estudiantes pueden tener aspectos contradictorios, que se manifiestan según las situaciones y son muy resistentes al cambio.

La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con la noción de límite en el centro de sus acepciones puntual y funcional, conlleva un alto nivel de complejidad, lo que pudiera explicar el origen de las dificultades que presentan los estudiantes (Robles et al. 2010). En el aula de matemáticas, los estudiantes muestran poco o ningún interés hacia los contenidos de cálculo, pues de acuerdo con Moya et al. (2021), no muestran una actitud positiva para empoderarse de técnicas que les ayuden a resolver ejercicios de forma autónoma.

Un concepto esencial para dotar de significados a la derivada es el concepto de pendiente. Al respecto, Rivera, Salgado y Dolores (2019) mencionan que los estudiantes suelen tener dificultades cuando se enfrentan a preguntas que involucran a la pendiente en diferentes representaciones, debido a que no han entendido este concepto ni trabajado a profundidad antes de ingresar a la universidad.

La variedad de significados asociados al concepto de pendiente en el proceso de enseñanza y aprendizaje encierra una gran complejidad que van desde el

uso cotidiano o común, pasando por sus aplicaciones, hasta las conceptualizaciones que se han determinado hacia dicho concepto (Abreu, Dolores, Sánchez y Sigarreta, 2020). De ahí la importancia de diseñar actividades previas con el concepto de pendiente para generar nuevos significados que mejoren la comprensión de la derivada.

Otro concepto fundamental para comprender la derivada es la recta tangente. De acuerdo con Orts, Llinares y Boigues (2016), en la construcción genética de la recta tangente intervienen los conceptos de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función, así como los procesos de aproximación a una curva desde varios sistemas de representación. La relación entre estos conceptos durante el aprendizaje favorece el que se generen diferentes significados para la recta tangente a una curva en un punto, mismos que pueden coexistir en la mente de un matemático, pero resultan difíciles para los alumnos.

De acuerdo con Canul, Dolores y Martínez (2011), el concepto de recta tangente, en el contexto escolar, presenta obstáculos en la comprensión de los estudiantes debido a que presentan dificultades al trazar la recta tangente a cualquier curva, ya que ocupan la definición global de tangente sin percatarse de que ésta es insuficiente. Para atender dichas dificultades, los autores elaboraron una propuesta didáctica donde se establecieron algunas condiciones geométricas para trazar rectas tangentes a curvas: 1) la curva debe ser continua, 2) la recta solo es tangente en el punto donde toca o corta a la curva, siguiendo la forma de la curva, 3) la tangente puede cortar en más de un punto en su prolongación, 4) las rectas tangentes forman a la curva, 5) el punto de tangencia no debe ser un vértice.

Las condiciones geométricas de tangencia serán fundamentales para introducir el concepto de derivada en la siguiente investigación, mediante una propuesta didáctica llevada a cabo en el aula de matemáticas con un grupo estudiantes de Nivel Medio Superior en México

### **Método**

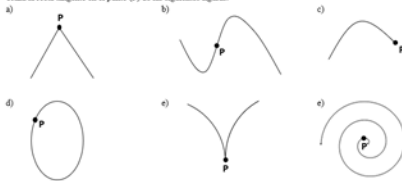
La investigación realizada fue cualitativa con un alcance descriptivo. El instrumento de investigación consistió en tres actividades (ver figura 1) donde los estudiantes tenían que trazar rectas tangentes y calcular pendientes en diferentes curvas, para lo cual se tomaron como base las curvas presentadas en Canul et al. (2011) y Orts et al. (2016). Las actividades se aplicaron con un grupo de 40 alumnos de Educación Media Superior (17 -18 años) en México que cursaban la asignatura de cálculo diferencial en el Centro de Educación

Artística (CEDART-Mérida) en el ciclo escolar 2019-2020.

La aplicación se realizó en tres momentos cuyos objetivos fueron: 1) identificar los obstáculos al trazar rectas tangentes a curvas, 2) establecer las condiciones geométricas para trazar las rectas tangentes a curvas, 3) calcular las pendientes de rectas tangentes a diferentes curvas. El docente titular de la asignatura aplicó las actividades en dos sesiones de 50 minutos, como parte del bloque II (derivada de la función) bajo un enfoque por competencias. En cuanto a las estrategias didácticas, en el primer momento, los estudiantes realizaron el trazo de rectas tangentes a curvas de manera individual en una hoja de actividades. El segundo momento inició con una plenaria y con la guía del docente se establecieron las condiciones geométricas de tangencia a curvas, luego los estudiantes realizaron, de manera individual, el trazo de rectas tangentes a curvas. En el tercer momento, los estudiantes trazaron, de manera individual, las rectas tangentes a curvas y calcularon sus pendientes respectivas en tres ejercicios diferentes.

**Actividad 1**

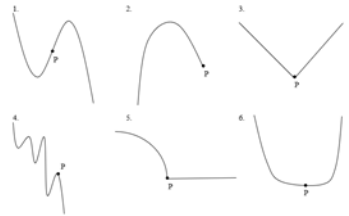
Traza la recta tangente en el punto (P) de las siguientes figuras.



a) ¿Cuáles son las características que debe tener una recta tangente?

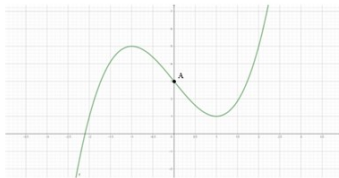
**Actividad 2**

Ejercicio: Con base a las cuatro condiciones nombradas, identifica cuáles de las siguientes gráficas tienen una recta tangente en el punto indicado. En caso afirmativo traza la recta tangente y en caso negativo argumenta por qué no tiene.

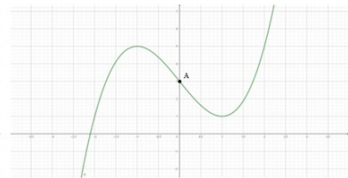


**Actividad 3**

Calcular la pendiente de la siguiente gráfica en el punto A(0, 3)



Calcular la pendiente de la siguiente gráfica en el punto A(0, 3)



Calcular los puntos máximos y/o mínimos de las siguientes gráficas con el trazo de rectas tangentes.

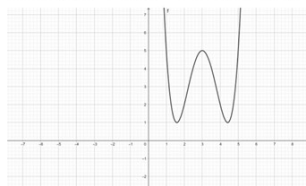


Figura 1. Actividades realizadas por los estudiantes.

## Resultados

Después de aplicar las actividades con los estudiantes, a continuación se presentan algunos resultados obtenidos.

En la actividad 1 los estudiantes presentaron dificultades para trazar rectas tangentes a diferentes curvas. En la figura 2, se observa que algunos trazaron tangentes en picos, o en los puntos extremos de las curvas. Algunos no trazaron tangentes en puntos de inflexión y en algunos casos no prolongaron la recta tangente. Sólo en las curvas cerradas como la elipse no presentaron dichas dificultades. Al mencionar las características que debe tener una recta tangente se observa su concepción global al mencionar que *debe ser una recta que no corte totalmente a la figura o que solo debe tocar en un punto a figura*. De acuerdo con Orts et al. (2016) y Canul et al. (2011), las dificultades presentadas se deben a la concepción global que utilizan los estudiantes para trazar rectas tangentes a curvas.

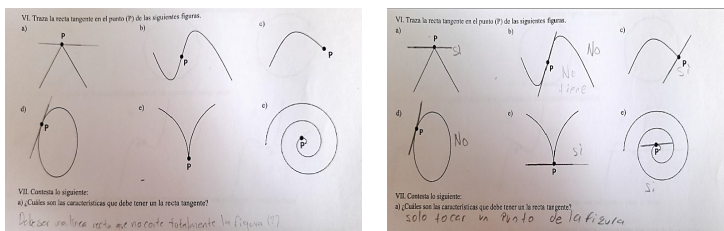


Figura 2: Resultados de los estudiantes en la actividad 1.

La actividad 2, inició con una plenaria guiada por la pregunta, ¿Cuáles son las características que debe tener una recta tangente? El docente orientó la actividad analizando los trazos realizados por los estudiantes en las gráficas de la actividad 1 para establecer las condiciones geométricas para trazar las rectas tangentes a curvas. Cabe mencionar que la guía del docente fue clave para que los estudiantes establezcan dichas condiciones y superen las dificultades presentadas en la actividad 1. Las condiciones se escribieron en la pizarra y fueron las siguientes: 1) la gráfica debe tener puntos a la derecha y a la izquierda de P. Es decir, la continuidad local, 2) la gráfica no debe tener un “pico” en el punto P, 3) la recta trazada a la izquierda de P debe coincidir con la recta trazada a la derecha de P. Es decir, la tangente es única, 4) la recta debe tener la forma de la curva en el punto P y puede cortar en más de un punto al prolongarse.

Después de la plenaria los estudiantes trazaron rectas tangentes a nuevas curvas para comprobar si habían superado las dificultades presentadas en la actividad 1. Los resultados presentados en la figura 3, muestran que algunos estudiantes trazaron correctamente las rectas tangentes en puntos de inflexión, en los puntos de “pico” mencionaron que *la gráfica no tiene tangente porque termina en pico en el punto P* o que *las rectas no coinciden*, en los puntos extremos no trazaron las rectas tangentes mencionando que *no tiene puntos a la derecha del punto P*. En algunos casos analizaron la relación (local) entre la recta y la curva, aspecto muy importante para entender el concepto de tangencia. Cabe mencionar que algunos alumnos siguieron presentando dificultades en sus trazos, sin embargo, los fueron superando poco a poco en el transcurso de la actividad.

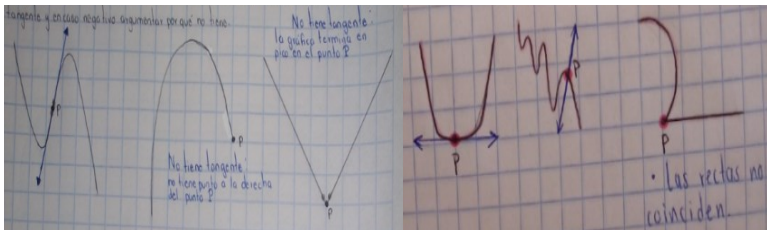


Figura 3: Resultados de los estudiantes en la actividad 2.

En la actividad 3, los estudiantes realizaron tres ejercicios donde trazaron tangentes a curvas y calcularon las pendientes respectivas. En el primer ejercicio (ver figura 4) tenían que trazar la recta tangente en un punto de inflexión y calcular su pendiente. Al trazar la recta mostraron que superaron algunas dificultades presentadas en la actividad 1. Para calcular pendiente ubicaron dos puntos, el punto de tangencia y el punto de intersección de la recta con alguno de los ejes coordenados. Los cálculos de la pendiente fueron realizados con la fórmula  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

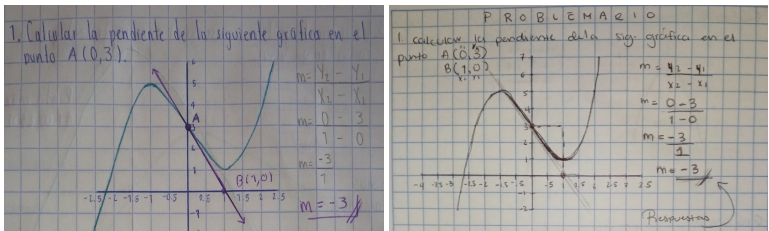


Figura 4: Resultados del primer ejercicio de la actividad 3.

En el segundo ejercicio, los estudiantes tenían que calcular la pendiente de la tangente en una gráfica que representa las páginas leídas en un tiempo determinado. En dicho ejercicio los estudiantes trazaron la recta tangente y calcularon la pendiente ubicando dos puntos, el de tangencia y un punto de intersección con el eje x o el eje y. Aplicaron la fórmula mencionada para calcular la pendiente y al final escribieron los significados de sus resultados obtenidos. La figura 5 muestra que, para un alumno, la pendiente es *el tiempo que se tarda en leer cada página* y para otro alumno, *la pendiente indica el crecimiento de la gráfica*. Con ello, se muestra cómo los estudiantes otorgan significados a la pendiente de la recta tangente en un punto y no sólo se reduce a un simple cálculo numérico.

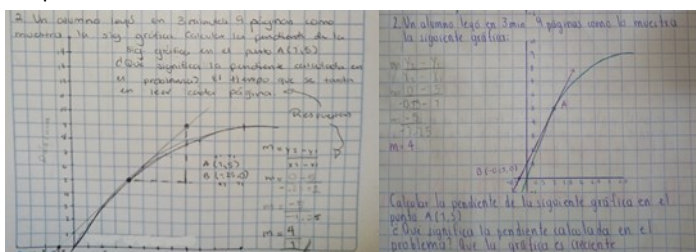


Figura 5: Resultados del segundo ejercicio de la actividad 3.

En el tercer ejercicio los alumnos tenían que identificar los puntos máximos y/o mínimos relativos en una gráfica. Para ello trazaron la recta tangente horizontal sin importar si corta en más de un punto en su prolongación, superando algunas dificultades presentadas en la actividad 1. Luego calcularon su pendiente con la fórmula mencionada. La figura 6 muestra los trazos realizados y el valor obtenido al calcular su pendiente. Este resultado será significativo en los temas posteriores de su curso para calcular los valores máximos y mínimos con los criterios de la primera o segunda derivada de manera analítica, pues tendrán que igualar su resultado a cero.

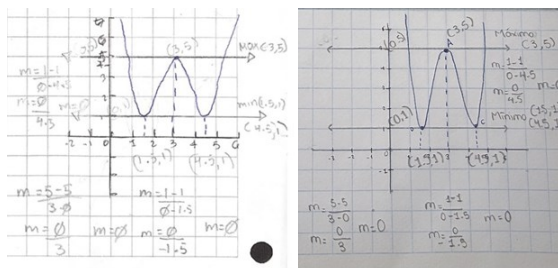


Figura 6: Resultados del tercer ejercicio de la actividad 3

### Conclusiones

La actividad realizada en el aula de matemáticas permitió introducir el concepto de derivada mediante el trazo de rectas tangentes y el cálculo de pendientes a curvas previo a abordar su definición formal, aspecto que muestra una diferencia con el enfoque de enseñanza donde se analiza la recta tangente solo hasta que se presenta su definición o en algunos ejemplos aplicativos posteriores.

La actividad 1 muestra que los estudiantes presentaron dificultades en el trazo de tangentes a curvas, debido a su concepción global de tangencia reportada en los estudios previos (Canul et al. 2011; Orts et al. 2016). En la actividad 2, los estudiantes, con apoyo del docente, empezaron a superar las dificultades en el trazo de rectas tangentes al establecer las condiciones geométricas para trazar rectas tangentes a curvas. La labor del docente, como guía para realizar la actividad fue fundamental superar dichas dificultades.

En la actividad 3, los estudiantes mostraron mejoría en sus trazos al calcular las pendientes en los puntos indicados de las curvas. También otorgaron significados a sus resultados, pues mencionaron que la pendiente de la recta tangente indica el crecimiento de una función o la ubicación de un punto máximo o mínimo cuando su valor es igual a cero. Aspecto que contribuye a que otorguen significados a la derivada y a reducir las dificultades que se reportan en Sánchez-Matamoros et al. (2008).

En las actividades presentadas, algunos estudiantes siguieron presentando dificultades para trazar rectas tangentes a curvas, lo cual nos invita a realizar ajustes en su diseño y/o aplicación. Una variante puede ser incorporar la tecnología para analizar más a detalle la relación entre la curva y la recta tangente. Una recomendación sería realizar más propuestas didácticas en el aula para que los estudiantes otorguen significados a la derivada y con ello mejorar en su comprensión.

### Referencias bibliográficas

Abreu, R., Dolores-Flores, C., Sánchez, J. y Sigarreta, J. (2020). El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 103. 81-89.



- Canul, E., Dolores, C. y Martínez, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14(2). 173-202.
- Moya, D., Rojas, R., Arzolay, W. y García, A. (2021). Aprendizaje de los conceptos de diferenciación e integración en el nivel secundario. *Revista educare* 25(1). 62 -83.
- Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 10. 111-134
- Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. *Educational Studies in Mathematics* 89. 233-250.
- Rivera, M., Salgado, G. y Dolores, C. (2019). Explorando las concepciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* 33(65). 1027-1046.
- Robles, M., Del Castillo, A. y Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.
- Sánchez-Matamoras, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 11 (2). 267-296.