



APLICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DE VOLUMEN, CONSTRUIDA MEDIANTE LA TEORÍA ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO

Jorge Astudillo Ugalde, Daniela Soto Soto y Gladys Bobadilla

Abarca. Jorge.astudillo@usach.cl,

gladys.bobadilla@usach.cl,

daniela.soto.s@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile.

Santiago, Chile.

.....

Resumen

En la presente investigación se diseñó situaciones didácticas a partir de la teoría educacional de Kuzniak "El Espacio de Trabajo Geométrico", esta conlleva contenidos geométricos de enseñanza básica. La idea fundamental de la situación de aprendizaje es estimular las génesis, que son una de las componentes de la teoría. La manera de validar el instrumento de enseñanza fue a través de la metodología de la "Ingeniería Didáctica", que está compuesta de varias fases, en donde una de las principales, será la ejecución del material en estudiantes de 8° básico de un colegio particular subvencionado ubicado en la comuna de Maipú, Santiago de Chile.

Abstract

In the present work, a didactic situation was designed based on Kuzniak's educational theory "The Geometric Work Space", this entails basic teaching geometric content. The fundamental idea of the learning situation is to stimulate genesis, which are one of the components of the theory. The way to validate the teaching instrument was through the methodology of "Didactic Engineering", which is composed of several phases, where one of the main ones will be the execution of the material in 8th grade students of a private school subsidized located in the commune of Maipu, Santiago of Chile.

Problema de investigación

La tradición en la enseñanza de la geometría tridimensional se reduce casi exclusivamente a la pizarra, lápiz y papel, lo que dificulta la visualización y comprensión de los conceptos geométricos espaciales, por otra parte, los profesores tienen cierto rechazo a la utilización de tecnologías en la sala de clase (Artigue, 2001). Los dos motivos anteriormente nombrados, son el foco del problema al enseñar geometría tridimensional. Centrándose en la utilización de los recursos de enseñanza se mencionan dos puntos, el primero menciona la mala utilización de recursos de 2D para enseñar conceptos 3D, y el segundo enfatiza la utilización de recursos 2D no adecuados para la enseñanza de conceptos 3D. A continuación, se darán algunos ejemplos.

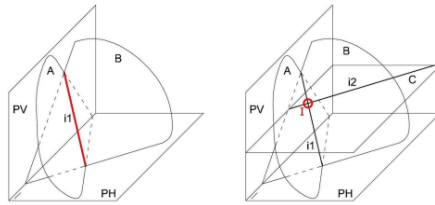


Figura 1. Exceso de información y perspectiva única al trabajar conceptos 3D en espacios 2D.

La figura anterior muestra la intersección de dos planos, lo que da como resultado una recta. Aquí se observa una gran cantidad de líneas e información, lo que complejiza el entendimiento de lo que quiere mostrarse, por lo que se produce confusión. Es este un ejemplo claro de un recurso 2D no adecuado para enseñanza de esta situación 3D.

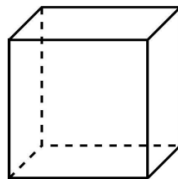


Figura 2. Confusión entre lo teórico y lo visual, en particular la definición del cubo y su representación

La figura anterior es uno de los ejemplos más claros de la utilización errónea de recursos 2D, para enseñar conceptos 3D, ya que una de las características fundamentales de un cubo, es que todas sus aristas son iguales. Lo anterior, no se observa en la imagen, puesto que el ancho y el largo se ven diferentes, aun así, se utiliza esta representación para enseñar cálculo de volumen de cubos.

A modo de síntesis, estos son los principales puntos que sostiene la problemática de la investigación.

Marco teórico

Espacio de trabajo geométrico (ETG).

El espacio de trabajo matemático es una teoría de la didáctica de la matemática, que propicia un ambiente de trabajo facilitador del aprendizaje, pero no cualquier aprendizaje, sino aquel que produce conocimiento a través de la resolución de situaciones problema. En particular, se hablará del espacio de trabajo geométrico ya que es el área donde estará centrado este estudio. Esta teoría ha sido introducida por Kuzniak y Houdement (Kuzniak, 2006).

El espacio de trabajo geométrico y sus componentes.

Los autores anteriormente mencionados, definen el espacio de trabajo geométrico (ETG) como el ambiente organizado por y para el geómetra, de tal forma que articule de manera idónea, los siguientes componentes:

- Un conjunto de objetos: es un constituyente esencial del ETG y los diferentes puntos de vista sobre su naturaleza exacta depende a la vez del modelo teórico que los define. Ejemplo, en Geometría III el espacio está constituido de puntos, rectas y planos y sus relaciones son explicitadas por el modelo teórico usado. En la Geometría II los objetos son subconjuntos de los objetos de Geometría III y se hablará de figuras o configuraciones. En Geometría I se trata de dibujos o maquetas.
- Un conjunto de artefactos: son las herramientas e instrumentos puestos al servicio del sujeto, específicamente: regla, escuadra, compás, etc. Esta componente es determinante en el espacio de trabajo, porque constituye la fase más visible y aprehensible por el alumno. La elección y los usos de los artefactos e instrumentos están reglamentados por el paradigma en que ellos se insertan.

- Un referente teórico: los objetos y los artefactos de la geometría constituye la parte empírica, la que tomará su sentido cuando ella sea articulada mediante un conjunto de axiomas, definiciones y propiedades que constituyen este referencial teórico o modelo teórico.

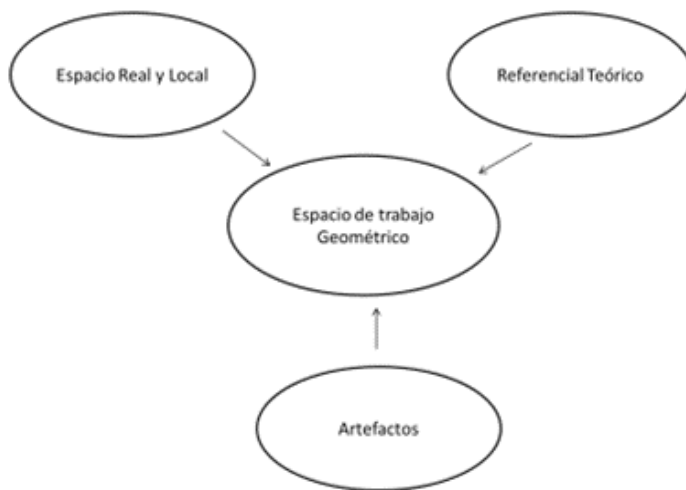


Figura 3. Componentes que componen el EFG

Montoya, Kuzniak y Houdement han profundizado esta teoría durante los últimos años y han propuesto un nuevo esquema que la describe. Este modelo, no es tan diferente a la inicial, ya que mantiene los mismos componentes iniciales, pero agrega y define componentes nuevos. Según Montoya et al., (n.d.), un ETG es un ambiente que se concibe como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de dos planos: el plano epistemológico y el plano cognitivo, los cuales son conectados mediante los puentes llamados génesis (instrumental, discursiva y semiótica). Esta unión, es fundamental, puesto que provoca que el conocimiento dialogue con el individuo y adquiera un propósito.

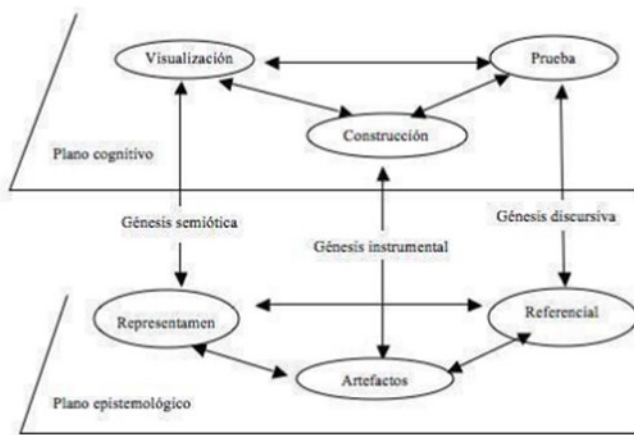


Figura 4. Nuevo esquema ETG

Método

Para este estudio se utilizó la ingeniería didáctica como metodología de investigación, que se caracteriza por:

1. Ser un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
2. Ser un registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La noción de ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero. Para realizar un proyecto el ingeniero se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, acepta someterse a un control científico, pero al mismo tiempo, está obligado a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede tomar a su cargo todavía (Artigue, 1988, p. 283).

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminar.
2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

En este estudio, la primera fase consistirá en comentar cómo se enseña el cálculo de volumen según el Ministerio de Educación de Chile, además de la realización de un análisis epistemológico del volumen de cuerpos geométricos. La segunda fase consistirá en la creación de situaciones didácticas que activen las génesis del ETG. La tercera parte consistirá en ir a un establecimiento a aplicar las situaciones didácticas. Finalmente, en la cuarta fase se analizará si realmente ocurre lo que se predijo en el análisis a priori, con el objetivo de ver si debemos realizar modificaciones o mantener las actividades intactas.

Recursos necesarios:

- Elementos tecnológicos (computadores, software GeoGebra 6.0.356.0, gafas 3D).
- Estudiantes de 8° básico de algún colegio de cualquier estrato social.
- Permiso administrativo para poder trabajar con menores de edad.

Resultados

Ahora bien, antes de indicar los resultados se mostrarán algunas actividades que trabajaron los estudiantes y algunas imágenes de las respuestas que propusieron.

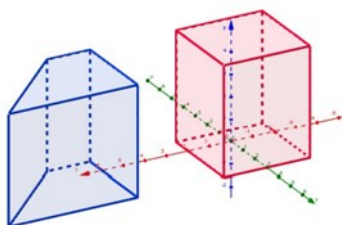


Figura 5. Figuras similares

Esta actividad consiste, en trabajar la idea de volúmenes iguales, implican formas diferentes. El objetivo principal, es trabajar la visualización que apunta al error.

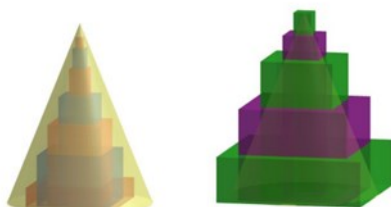


Figura 6. Pirámides Aztecas: Volumen del cono por exceso y por defecto.

Esta actividad, consiste en trabajar el cálculo de volumen del cono, utilizando aproximaciones desde el interior y desde el exterior.

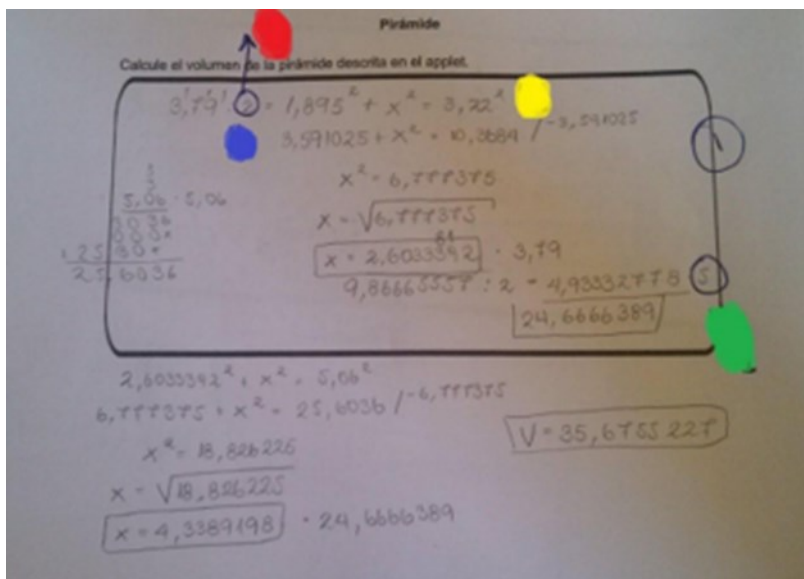


Figura 7. Respuesta de algunos estudiantes de la actividad “Pirámide”

La imagen anterior, muestra los resultados de un estudiante que respondió correctamente el problema. Los puntos de colores indican donde utilizó las herramientas teóricas en sus cálculos. El punto rojo indica la utilización de la propiedad del triángulo isósceles, el punto azul y amarillo la utilización del teorema de Pitágoras, y el punto verde las propiedades de un polígono regular.

Luego de la fase de aplicación, se observó en los estudiantes que participaron en la investigación, a manera transversal, los siguientes aspectos:

Aspecto 1: En cuanto a dificultades para resolución se observó:

Observación 1: Calcular el área de polígonos regulares de más de cuatro lados.

Observación 2: Calcular el área de figuras compuestas.

Observación 3: Enfrentarse a situaciones enfocadas en habilidades superiores de las taxonomías de Bloom.

Observación 4: Los jóvenes desconocen cómo calcular el volumen de una esfera y definición de una pirámide truncada.

Aspecto 2: En la mayoría de los problemas la percepción visual predomina frente a los datos concretos, es decir, existe una falta de contraste entre los datos empíricos y las representaciones visuales, por lo tanto, hay una falta de razonamiento crítico en ocasiones, entre los datos que se entregan y los que realmente son necesarios.

Aspecto 3: Los jóvenes tienen costumbre a trabajar con sólidos simples, por lo que presentan gran asombro y desconocimiento, cuando se les presentan sólidos compuestos y con formas poco habituales. Un ejemplo de esto se percibe en el desarrollo del problema de la Broca.

Aspecto 4: Los jóvenes no utilizan las gafas 3D, por falta de costumbre de la herramienta, habría sido necesario un proceso de instrumentalización más extenso.

Aspecto 5: Existe un gran predominio de la visualización icónica.

Conclusiones

La génesis del Espacio de Trabajo Geométrico es el puente que conecta lo conceptual con lo cognitivo, es decir, es el proceso donde la información

estática toma sentido, a través de los diferentes procesos mentales del ser humano. A modo general, considerando los procedimientos que efectuaron los estudiantes para resolver los problemas, y descartando los índices de logros, se puede afirmar que la situación didáctica activa las diferentes génesis, es decir, estimula la génesis instrumental, semiótica y discursiva, ya sea en un menor o mayor grado, no obstante, es importante destacar que en todo momento se encuentra bajo estimulación la génesis instrumental, debido a que todos los problemas fueron diseñados con el objetivo de fomentar el uso de la geometría dinámica a través del uso de la herramienta física GeoGebra. A modo de cierre, las génesis del ETG siempre se encuentran al momento de enseñar algún concepto, pero no siempre es simple su visualización, ya sea por el tipo de actividad o por el tipo de conocimiento, en particular, cuando se enseña geometría tridimensional, enfocada al cálculo de volumen de poliedros y sólidos generados por rotaciones, es factible sostener que se pueden diseñar situaciones didácticas que estimulen las génesis del ETG.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2001). The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. Université Paris 7 Denis Diderot & IREM.

Available at: <http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final>. [Archivo PDF], [Accessed 16 Apr. 2017].

Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. (2015). 1st ed. [Archivo PDF] Santiago. Available at: http://www.curriculumlineamineduc.cl/605/articles-37136_bases.pdf [Accessed 11 Dec. 2017].

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, pág.5-53.

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A. y R. Richard, P. (2015). Espacio de Trabajo Matemático Mathematical Working Space Espace de Travail Mathématique. In: Cuarto Simposio Internacional ETM. [Archivo PDF] Madrid: Inés M^a Gómez-Chacón, Jesús Escribano, Alain Kuzniak & Philippe R. Richard.

- Henríquez-Rivas, C. and Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. Montoya Delgadillo, E. (n.d.). Espacio de trabajo Matemático: identificación y construcción. 1st ed. Valparaíso, pp. <http://www.ciae.uchile.cl/download.php?file=noticias/844-1465933444.pdf>.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. HAL, [Archivo PDF] pág.176-191. Available at: <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709> [Accessed 30 May 2017]. 132
- Houdement, Catherine, y Alain Kuzniak. (1998). "Géométrie Et Paradigmes Géométriques". IUFM de Haute-Normandie, IREM de Rouen, DIDIREM de l'Université Paris 7, [Archivo PDF].
- Kuzniak, A. (2013). Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométrico Espacios de trabajo matemático. [Archivo PDF] <http://www.univ-irem.fr/>. Available at: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Diapo_Valpo.pdf [Accessed 16 Apr. 2017].
- Kuzniak, A. and Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(4), pág.5-15.
- Kuzniak, A., Vivier, L., Montoya-Delgadillo, E. and Gutiérrez, T. (2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. In: CIAEM. Cicata, México: Javier Lezama.