PROPUESTA INSTRUCCIONAL PARA ESTUDIAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL EN FUTUROS PROFESORES

Safira Pech Chi, Gustavo Martínez Sierra
safirapech@gmail.com,
gmartinezsierra@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero
Guerrero, México

Resumen

Este escrito muestra los resultados de la implementación de una propuesta instruccional para ecuaciones diferenciales, cuyo objetivo fue mostrar la utilidad de los conceptos avanzados en la futura práctica docente, aún cuando no sean objeto de enseñanza. Los resultados mostraron que le propuesta permitió llegar al objetivo planteado.

Abstract

This paper presents the results of the implementation of a sequence of tasks on differential equations, whose objective was to show the usefulness of advanced concepts in future teaching practice, even when they are not taught. The results showed the proposal will reach the stated objective.

Problema de investigación

Uno de los enfoques en las investigaciones sobre el conocimiento del profesor, se ha basado en analizar desde la perspectiva de los modelos Ball, Thames, y Phelps, (2008); Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar, y Carrillo, (2014), cuando estos conocimientos están presentes en los docentes y cuando no. Sin embargo, poco se ha trabajado para desarrollar diseños de instrucción que favorezcan la emergencia de los conocimientos, es por ello, que esta investigación se enmarcó en este punto.

Investigaciones como las de Zazkis y Leikin (2010), Wasserman, Weber, Villanueva, y Mejia-Ramos (2018); Buchholtz et al. (2013) se han cuestionado cuál es el papel de las matemáticas avanzadas en la formación de los profesores. Los resultados muestran, que los profesores, consideran que éstas tienen poca utilidad cuando se trabaja en niveles elementales. Al respecto, Wasserman et al., (2018) comenta que posiblemente esto se deba a la forma en que se enseñan estas matemáticas en los cursos universitarios para docentes, puesto que un enfoque tradicional, pocas veces deja ver las conexiones que hay entre lo avanzado y lo que se enseña en niveles básicos.

Por tanto, se reconoce como un problema el hecho de que los profesores de matemáticas encuentren poco útil la matemática avanzada que reciben en su formación, puesto que, como menciona Jakobsen, Thames, y Ribeiro (2013) un profesor que vincula lo avanzado con lo que enseña en nivel elemental, fortalece su práctica docente en cuanto a su tratamiento matemático y también, con respecto a las decisiones que toma para planear sus clases.

Por ello, esta investigación se centró en desarrollar una propuesta instruccional para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales con el objetivo de mostrar a los futuros profesores la utilidad de éstas en la práctica docente, aún cuando no sea su objeto de enseñanza.

Marco teórico

La idea de saber "más matemáticas" de lo que se va a enseñar en cierto nivel, tiene sus orígenes en el concepto del Conocimiento del Horizonte del Contenido (HCK). Según lo que mencionan los autores, "éste incluye una visión útil para ver conexiones con matemáticas más tardías" (Ball et al., 2008, p. 403).

Este concepto se ha ido refinando teóricamente desde diferentes perspectivas. Sin embargo, como se comenta en Pech-Chi (2019), una de las más recientes y con un enfoque que se puede adaptar a investigaciones de diseño, es la de Jakobsen et al (2012), que es la que se menciona a continuación.

Jakobsen et al (2012), establece que el HCK tiene tres elementos principales: el conocimiento de la estructura matemática, el conocimiento de las prácticas matemáticas y la orientación a la práctica docente. Para esta investigación, sólo se consideró el primer y último elemento del HCK.

Conocimiento de la estructura matemática

Flores-Medrano et al. (2014) lo definen como: el tipo de conocimiento que le permite al profesor establecer relaciones entre temas matemáticos. De acuerdo con estos autores, éste puede observarse mediante conexiones intramatemáticas, que pueden ser de complejización, simplificación; conexiones de contenidos transversales y auxiliares.

En particular, para el objetivo de este trabajo, sólo consideraremos las conexiones de complejización, que son aquellas que vinculan los contenidos que se enseñan (en este caso temas de cálculo) con contenidos posteriores (como la ecuación diferencial). Es decir, cuando logramos reconocer la presencia de las matemática avanzada en escenarios elementales, estamos llevando a cabo este tipo de conexiones.

Orientación hacia la práctica docente

Jakobsen et al (2012) comenta que para este elemento, se requiere el diseño de tareas relacionadas con contenido avanzado, pero situadas en contextos de la enseñanza; como las producciones de los alumnos en el aula, intervenciones al resolver una actividad matemática, un ejercicio de un libro de texto o un diálogo entre alumnos.

Matemática avanzada y elemental

Para fines de esta investigación, se entiende por matemática avanzada aquella que es exclusiva de la educación universitaria. Y matemática elemental, es aquella transpuesta en el currículo que va desde la educación primaria hasta la del nivel medio superior.

Metodología

La propuesta instruccional estuvo constituida por cuatro tareas matemáticas; cuatro situaciones hipotéticas de aula y una entrevista post aplicación.

Tareas Matemáticas (TM)

Las TM se diseñaron de manera que su planteamiento estuviera enmarcado en un contexto de curso de cálculo diferencial (matemática elemental), pero que implícitamente tuviera una estructura matemática relacionada con una ecuación diferencial o su solución (matemática avanzada). A continuación, se presenta un ejemplo y su vínculo con los elementos conceptuales del HCK.

La tarea TM-2 (ver figura 1) generalmente se plantea en los cursos de cálculo diferencial, cuando se trabaja con el criterio de la primera y la segunda derivada.

TM-2: La gráfica que se muestra a continuación corresponde a $f'(x)$, con base en ésta, grafica la función $f(x)$.

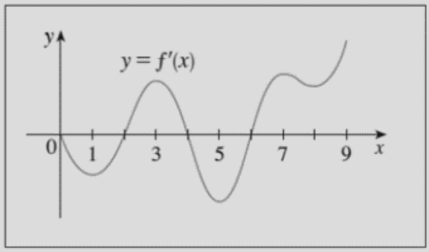

Figura 1. TM-2

En esta tarea es posible reconocer la presencia gráfica y algebraica de una ecuación diferencial de la forma: $dy/dx = f(x)$ (Conexión de complejización). Aunque en los curso de cálculo diferencial a éstas no se les llama ecuaciones diferenciales, lo cierto es que son caso particular de ellas (Blanchard, Devaney, y Hall, 1999, p. 38).

Situaciones Hipotéticas de Aula (SHA)

Considerando el trabajo de Jakobsen et al. (2013), creamos escenarios hipotéticos de aula centrados en encapsular situaciones de las dificultades que normalmente muestran los estudiantes cuando trabajan con las tareas matemáticas propuestas.

En la figura 2, la SHA-2 (referente a la TM-2) se basa en una problemática que se relaciona con la dificultad del estudiante para dar un significado geométrico a la función antiderivada como una familia de funciones. Sin embargo, este escenario también puede relacionarse la idea de la condición inicial para la solución de una ecuación diferencial.

Se considera que las SHA son una forma de abarcar el tercer elemento del HCK porque su diseño, consideró escenarios de análisis y reflexión que muestran las conexiones entre el reconocimiento de las ecuaciones diferenciales y su aporte en la solución de situaciones hipotéticas de dificultades en estudiantes.

SHA-2: (diálogo entre profesor y un alumno)

-Profesor: ¿cómo se resolvería esta tarea?
-Alumno: No sé dónde empezar, es decir, no sé por dónde pasaría la función.
-Profesor: ¿A qué te refieres cuando dices que no sabes dónde iniciar?
-Alumno: Sí, por ejemplo. En el punto 0, 2 y 6, sé que la derivada es cero, pero no sé cómo ubicarlo con respecto a y, es decir, sé que en ese punto del dominio hay una pendiente cero, pero no sé por dónde pasaría esa función con respecto al eje y.
-Profesor: Ya entiendo. Usemos un caso particular, el caso en que la función pase por el origen. Así ya tendrás idea de dónde ubicar la gráfica de la función.

Reflexiones SHA-2

1. Desde tu opinión, haber cambiado la demanda de la tarea para que pase por el origen, es una buena vía para dar respuesta a la pregunta del alumno. Explica.
2. ¿Cómo hubieras resuelto esa situación?

Figura 2. SHA-2

Entrevista post aplicación

Después de que se aplicaron las tareas matemáticas, junto con sus respectivas situaciones hipotéticas de aula, se realizó una entrevista semiestructurada con el objetivo de esclarecer elementos que no hayan quedado totalmente claros en la resolución matemática o en reflexiones de las SHA.

Población de estudio

Este reporte de investigación es parte de un estudio más amplio que se llevó a cabo con nueve futuros profesores de matemáticas que ya habían acreditado un curso de ecuaciones diferenciales. Para fines de esta publicación, se reportará sólo el caso de un futuro profesor, que por conveniencia se nombró futuro profesor FP-1.

Recolección de los datos

La recolección de los datos estuvo constituida por cuatro etapas. La primera consistió en realizar una pregunta a los futuros profesores sobre la utilidad de la ecuación diferencia en la futura práctica. La segunda etapa fue para la resolución individual de cuatro tareas matemáticas consecutivamente, en esta etapa, además de resolverlas de forma clara, se solicitaba que al finalizar escribieran los conceptos matemáticos que se reconocían en cada una. Esto con el fin de que poder identificar si el profesor daba evidencia de las conexiones de complejización. La tercera etapa; consistió en el análisis de las situaciones hipotéticas de aula y finalmente la entrevista semiestructurada post aplicación.

Resultados

Los resultados obtenidos después de la aplicación de toda la propuesta instruccional muestran que se cumplió el objetivo de la investigación en el futuro profesor FP-1. Ya que éste mostró un cambio en las reflexiones y conclusiones que hizo antes y después del trabajo con las tareas y las situaciones hipotéticas de aula.

Etapa 1: "Las ecuaciones diferenciales serán útiles, aunque dependen del nivel"

En esta primera parte, cuando se le pregunta al futuro profesor FP-1 si la ecuación diferencial le será útil en su futura práctica, éste respondió:

Sí, aunque depende del nivel educativo. Las EDO son el inicio de las matemáticas avanzadas, por lo que requiere un conocimiento de distintos conceptos matemático. En el nivel medio superior, si bien las EDO no son parte del contenido de los planes de estudio, se puede establecer de manera intuitiva relaciones con la derivada de una función.

Esta reflexión permite suponer que el futuro profesor tiene claridad sobre las relaciones que guardan las ecuaciones diferenciales con cursos inferiores a ellas, como los de cálculo diferencial. Los resultados de la entrevista final muestran que estas ideas se refuerzan después de haber vivido la propuesta instruccional en su totalidad.

Etapa 2: "Creo que esta tarea también se relaciona con una ecuación diferencial"

El futuro profesor FP-1 sólo reconoció la presencia de la ecuación diferencial en una tarea de las cuatro que se plantearon durante el trabajo individual. Empero, durante la entrevista el futuro profesor FP-1 logra hacer más conexiones de complejización, tal fue el caso de la tarea TM-4 sobre "derivación implícita". En esta FP-1 concluye: "Creo que esta tarea tiene que ver también con una ecuación diferencial", y continúa, "porque ahora que lo veo, al resolver una derivación implícita, realmente se llega a una ecuación diferencial".

Previo a la entrevista, este futuro profesor sólo reconoció los siguientes conceptos: derivación implícita, curvas y lugar geométrico. Ver figura 3.

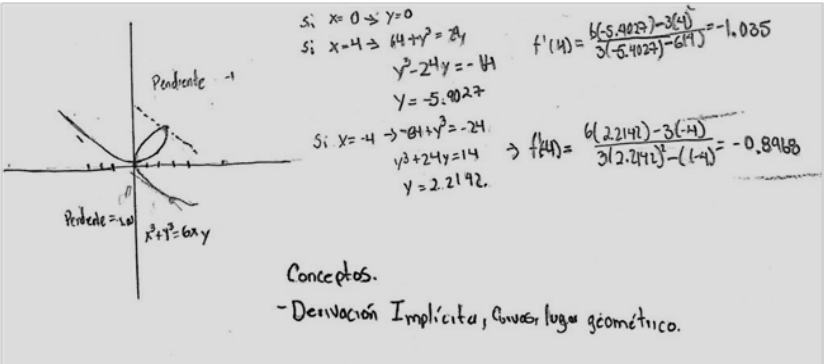

Figura 3. Producción escrita de FP-1 en la TM-4

Etapa 3: "Ahora que lo pienso, el alumno en la SHA tenía la misma pregunta que yo…"

A continuación, se presenta la SHA-4 que se corresponde con la tarea TM-4.

Tarea SA-4: Considera la ecuación de la curva: $x^3 + y^3 = 6xy$

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente en el punto (3,3)?
b) Calcula el valor de la pendiente en otros seis puntos del plano y da una interpretación gráfica de este resultado.

Situación de Aula 4:

-Alumno: ¿Cómo puedo saber cuáles puntos del plano debo considerar para evaluar en la derivada y así obtener la pendiente? ¿qué es lo que estaría graficando en realidad?

Figura 4. TM-4 y SHA-4

Durante la entrevista, FP-1 deja ver cómo el haber entendido la relación de esta tarea con la ecuación diferencial, le permite entender con mayor profundidad la duda que planteaba el estudiante en la SHA-4. Esto se puede ver en el siguiente fragmento de la entrevista:

FP1: Ahora que lo pienso, el alumno en la situación hipotética de aula tenía la misma pregunta que yo… yo estaba tratando de interpretar acá (señalando en una producción escrita, el punto arbitrario (5,0) "si tomo cualquiera (cualquier punto) me va a dar un valor, pero ¿cómo lo interpreto?"

FP1: Entonces, según yo, esto tiene una relación con lo del plano fase. Veo dos casos, si se quiere literalmente sólo para la curva, pues ya sabemos que tiene *que ser puntos que cumplan la ecuación. Solo que había que tener cuidado, porque, por ejemplo, en el cero ya vimos que pasan cosas raras.*

Entrevistadora: Claro ¿cómo manejarías la duda del estudiante ahora que eres consciente de todo lo que esta tarea implica?

FP1: Sí, no es tan trivial, hay muchas cosas detrás, pero en este caso, creo que le diría que grafique los que cumplen la ecuación, lo que había dicho inicialmente. Yo ya estoy consciente que los otros puntos del plano corresponden a otras curvas, en caso de que algo así me pasara.

Después de haber experimentado la propuesta de instrucción, se le preguntó a FP-1 ¿qué cambios generó en él respecto a su opinión inicial sobre la importancia de la ED para la futura práctica? Y su respuesta fue:

En el principio de la actividad se me dificultó concebir la importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias como profesor fuera de si impartiese un curso de esa asignatura. Al terminar la actividad, me di cuenta de que las EDO´s no están presentes solamente en cursos de matemáticas avanzadas, sino que son relaciones que se pueden encontrar en cualquier curso de cálculo, de modo que me permite como profesor generar argumentos y explicaciones para los estudiantes.

Conclusiones

Los resultados obtenidos con FP-1, muestran que una propuesta instruccional con tareas matemáticas como las planteadas y con situaciones hipotéticas de aula, favorece el reconocimiento de las conexiones de la matemática avanzada con la futura práctica aún cuando éstas no sean el objeto de enseñanza.

La importancia de que un futuro profesor establezca estas conexiones no sólo reside en lo matemático, sino también en lo didáctico. Esta idea se hizo visible cuando el futuro profesor FP-1 logró dar un sentido matemático más profundo a la pregunta del estudiante en la SHA después de reconocer la presencia de la ecuación diferencial en la tarea matemática. Zazkis y Leikin (2010), habían reportado que la falta de vínculos entre lo avanzado y lo elemental, limita la acción instruccional de los profesores. Los resultados obtenidos en esta investigación demuestran que el reconocimiento de estos vínculos podrían mejorarla.

Finalmente, este trabajo se reconoce como un primer acercamiento para desarrollar investigaciones de diseño, que promuevan el estudio de la matemática avanzada desde una perspectiva funcional (matemática y didácticamente) para los futuros profesores.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. Boston, Estados Unidos: International Thomson Editores, S.A de C.V.

Buchholtz, N., Leung, F. K. S., Ding, L., Kaiser, G., Park, K., y Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(1), 107–120. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0462-6

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L. C. Contreras, M. Á. Montes, D. Escudero, & E. Flores (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 66–88). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Jakobsen, A., Thames, M. H., y Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Eight Congress of European Research in Mathematics Education (CERME-8)* (pp. 3125–3134). Antalya, Turquía: ERME.

Pech-Chi, S. (2019). *Efectos que en futuros profesores tiene la resolución de tareas en su percepción sobre la utilidad de la ecuación diferencial en la futura práctica.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., y Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers ' views about the limited utility of real analysis : A transport model hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*(1), 74–89. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.004

Zazkis, R., y Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263–281. https://doi.org/10.1080/10986061003786349