Tangram
Revista de Educação Matemática

UFGD editora

DOI: 10.30612/tangram.v5i2.15900.

A reta numérica e jogo de sinais posicional e operacional no ensino da adição e subtração de números inteiros na 8ª classe

The number line and positional and operational sign game in teaching addition and subtraction of whole numbers in grade 8

La recta numérica y el juego de signos posicionales y operacionales en la enseñanza de la suma y la resta de números enteros en el 8º grado

Rosalino Subtil Chicote
Universidade Rovuma – Extensão de Cabo Delgado
Montepuez, Moçambique
Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL)
Email: rschicote1@gmail.com
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3454-7816

Gabriel Mulalia Maulana
Universidade Rovuma – Extensão de Cabo Delgado
Montepuez, Moçambique
Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL)
Email: gmulalia@gmail.com
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3859-8266

Geraldo Vernijo Deixa
Universidade Licungo
Quelimane, Moçambique
Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Email: gdeixa@gmail.com ou gdeixa@unilicungo.ac.mz
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3992-0993

Resumo: Objetivo da pesquisa foi caracterizar a base dos argumentos utilizados pelos professores de Matemática para ensinar adição e subtração de números Inteiros na reta numérica. Foi aplicado um questionário *online* e apenas 4 professores Licenciados em Matemática que possuem 1 à 12 anos de experiência no ensino dos números Inteiros na 8ª classe responderam-no. Os resultados indicam que o ensino dos números inteiros por via da reta numérica é permeado por obstáculos epistemológicos. O jogo dos sinais, embora não justificada sua coerência tem sido uma saída argumentativa para justificar contradições.

Palavras-chave: Jogo de sinais. números inteiros. reta numérica.

Abstract: Objective of the research was to characterize the basis of arguments used by Mathematics teachers to teach addition and subtraction of Integers on the number line. An online questionnaire was applied and only 4 Mathematics Graduated teachers who have 1 to 12 years of experience in teaching Whole numbers in grade 8 answered it. The results indicate that the teaching of whole numbers via the number straight line is permeated by epistemological obstacles. The game of the signs, although not justified its coherence has been an argumentative exit to justify contradictions.

Keywords: Sign game. whole numbers. number line.

Resumen: El objetivo de la investigación fue caracterizar la base de los argumentos utilizados por los profesores de matemáticas para enseñar la suma y la resta de números enteros en la recta numérica. Se aplicó un cuestionario en línea y sólo lo respondieron 4 profesores licenciados en matemáticas que tienen de 1 a 12 años de experiencia en la enseñanza de los números enteros en el octavo grado. Los resultados indican que la enseñanza de los números enteros a través de la recta numérica está impregnada de obstáculos epistemológicos. El juego de los signos, aunque no justifica su coherencia ha sido una salida argumental para justificar contradicciones.
Palabras- chave: Juego de signos. números enteros. línea numérica.

Recebido em:
26 de abril de 2022

Aceito em:
17 de maio de 2022

INTRODUÇÃO

A noção de números inteiros no Sistema Nacional de Educação moçambicano é iniciada na 8ª classe (Hirage, Chicote e Deixa, 2021). Para professores, a experiência atesta que este tema demanda algum poder argumentativo, sobretudo por incluir números negativos. Nas classes precedentes, alunos desenvolvem um significado de número e operações que na nova realidade precisa ser (re)contextualizado.

Conforme assegura Neto (2010), no conjunto de números inteiros os significados dos sinais operacionais mudam, assim $(+)$ pode representar acréscimo, decréscimo ou neutro. Da mesma forma, $(-)$ deixa de comportar a ideia de "tirar" representa operação inversa da adição. Para Martin (2013), no conjunto de números inteiros há risco de alunos vivenciarem confusão semântica, caracterizada por ambiguidade entre sinais operacionais e posicionais.

Poucos anos depois, a mesma pesquisadora defende que mais pesquisas sobre ensino de números inteiros devem ser desenvolvidas tomando professores de matemática como sujeitos. Amorin (2012) destaca que a reta numérica não foi enfoque em Teses e Dissertações produzidas em quatro Universidades Brasileiras num recorte temporal de dez anos.

Esses posicionamentos revelam insuficiências de conhecimentos relacionados a prática docente no ensino de números inteiros associado a reta numérica. Nessa direção, foram estabelecidas duas questões de pesquisa: como é ensinada adição e subtração de números inteiros na reta numérica? Qual o significado do sinal posicional e operacional na reta numérica? O objetivo da pesquisa foi caracterizar o ensino da adição e subtração de números inteiros, sobretudo a argumentação docente formulada em torno dos sinais posicional e operacional na reta numérica.

A pertinência de uma pesquisa voltada à prática docente reside no facto de poder trazer informações úteis cruzar com as dos alunos e, desse modo, possibilitar uma compreensão cada vez melhor das influências professor-aluno no modo de pensar e operar em Z. O estudo pode desvelar experiências úteis para refletir a prática e formação de professores que ajude a melhorar o ensino da matemática em Moçambique. Também as contribuições se aplicam à práticas de ensino da adição de números inteiros na reta numérica. Espera-se incitar uma reflexão que possa culminar com a criação ou inovação de estratégias de ensino de números inteiros com base nas condições do contexto moçambicano. Tais estratégias podem ser úteis para modelar a formação de futuros professores de matemática.

Exige-se do professor um conjunto de saberes que o permitam compreender as complexidades do assunto que vai abordar na sala de aula. Reconhecendo-se que o livro é uma das fontes de base de conhecimento para ensino, este não deve ser um material imune à críticas, pelo contrário, precisa de vigilância crítica do professor para adequar ao contexto formativo, dando sentido ao conteúdo do livro. Essa vigilância crítica presume-se que resida no professor de matemática.

REVISÃO DA LITERATURA

Inicia-se por apresentar um retrato histórico da reta numérica acompanhado das discussões em torno do assunto. Em seguida, explora-se as prescrições em relação ao ensino da adição e subtração de números inteiros recorrendo a pesquisas e o programa de ensino de matemática do Ensino Secundário Geral de Moçambique.

A RETA NUMÉRICA

A reta numérica é uma noção matemática que ganhou visibilidade gradualmente nos livros de matemática, enciclopédias e outras obras. Por diversos anos, essa noção tem merecido pouca atenção da maior parte dos pesquisadores da Educação Matemática. Estes estudos têm sido relegados aos pesquisadores da História da Matemática.

No domínio da História de Matemática, Amadeo (2013) desenvolve uma pesquisa que culmina com a produção da dissertação de mestrado intitulada: Desenvolvimento da noção de reta numérica e seus contextos de 1708 a 1824. O propósito do trabalho foi discutir a origem da noção em obras cujo recorte temporal situa-se entre o século XVIII e início do século XIX. A pesquisa envolve obras de carácter científico produzidas principalmente na Alemanha e França.

O pesquisador supracitado, observa que a noção de reta numérica geralmente apresentada no trabalho de George Glaeser; Yannis Thomaidis e Constantinos Tzanakis, evidenciam a projeção de noções matemáticas atuais sobre práticas anteriores. Em outras palavras, os pesquisadores colocam a responsabilidade do desenvolvimento de uma noção matemática sobre predecessores que nunca sequer se pronunciaram de forma objetiva sobre uma determinada noção.

Ainda de acordo com Amadeo (2013) a reta numérica concebida hoje é uma noção que emergiu depois do tempo de Leonard Euler. Quanto a origem da noção da reta numérica o autor conclui que,

> é uma noção que está inicialmente vinculada às práticas da geometria analítica. Ela, então, se estabelece como um recurso didático na análise de curvas a partir de expressão algébrica de suas variáveis. Vemos em Fischer o primeiro registro dessa noção, ou seja, somente no século XIX (Amadeo, 2013, p. 146).

Assim, a reta numérica surge como recurso que auxilia a análise de curvas por meio de expressões algébricas. Essa noção foi desenvolvida especificamente para fins pedagógico-didático, de tal maneira que alunos pudessem perceber o processo de análise de curvas com base nas expressões algébricas.

Atualmente a reta numérica ainda é utilizada como recurso pedagógico-didático. A sua aplicação se estendeu ao ensino de números inteiros e suas operações. Martins (2013, p. 29) atesta essa afirmação quando refere que, “a reta numérica, comummente chamada de reta numerada nos livros didáticos, é utilizada como objeto de visualização dos números relativos e das operações que os envolvem, não apresentando o conceito de número atribuído a ela”.

A reta numérica é um dos conceitos que permite a intersecção entre a geometria, álgebra e aritmética a partir das propriedades comuns sobre a completude e continuidade. Amadeo (2013, p. 15) defende que,

> Essa relação entre número e reta tem muitas vantagens epistemológicas. Uma das principais está na questão dos números negativos. Contudo, na história da matemática, bem como no próprio ensino, o entendimento de número negativo como um objeto em si é bastante tardia. Diversas fontes atestam contradições entre o uso operacional e o entendimento dos números negativos.

Martins (2013) e Amadeo (2013) convergem ao assumir que a reta pode ser utilizada para o ensino de números e suas operações. Porém, observa-se uma contradição entre eles quanto ao desenvolvimento do conceito de número. Martins (2013) advoga que a reta numérica não permite desenvolver o plano abstrato do conceito de número. Outrossim, Amadeo (2013) intercede que há vantagens no uso da reta numérica sobre o desenvolvimento no plano abstrato sobre o conceito de número negativo.

Para Martins (2013) a compreensão da reta numérica como lugar geométrico de todos números passa por considerar a noção de zero origem. Este aspeto, de acordo com a pesquisadora, constitui um entrave porque parte significativa dos alunos reconhece o zero absoluto, pois vem sendo familiar desde o ensino primário. Essa posição é também partilhada por Glaeser (2010), o que vem sendo destacado como dificuldade em unificar a reta numérica por causa da presença dos dois zeros: zero absoluto e zero origem.

Importa salientar que Glaeser concebe essa dificuldade no contexto histórico, sendo como uma das justificativas para a dificuldade da aceitação dos números negativos. Ainda assim, Glaeser (2010) destaca que matemáticos como Leonard Euler, Pierre de La Place e Herman Hankel trabalhavam com a reta numérica unificada, oque Amadeos (2013) discorda, pelo facto de que a reta numérica unificada somente ter sido compreendida na segunda metade do século XIX.

Entende-se que emerge um problema de pesquisa, sobre o qual sugerimos o seu encaminhamento científico por meio de metodologias de pesquisa distinta da teológica e da hermenêutica ou análise histórica.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS NA RETA NUMÉRICA

A introdução do conceito de número acontece nos primeiros anos de escolaridade, especificamente na 1ª classe e, junta e gradativamente, a noção de adição e subtração. Essas operações são interpretadas como “antes” para subtração e “depois” para adição (INDE, 2015). Desse modo, predomina a noção de antecessor e sucessor.

No contexto Brasileiro, também ocorre a introdução do conceito de número e suas operações nas classes iniciais. A esse respeito, Rosa (2012) refere que,

> A introdução para operação da adição, na maioria das proposições brasileiras, é realizada a partir da contagem nos dedos. Por exemplo, para a resolução da operação 3 + 2 levanta-se três dedos em uma mão e dois na outra. Inicia-se a contagem nos dedos levantados em uma das mãos e prossegue-se na outra mão, em forma única: um, dois, três, quatro, cinco. Isso significa que a operação de adicionar não é realizada, trata-se apenas da contagem de todos os dedos. Então, fica somente a ideia: a operação da adição consiste na contagem conjunta dos objetos de agrupamento distintos (Rosa, 2012, p. 197).

A adição e a subtração são introduzidas, respetivamente, como contagem para frente (contagem progressiva) ou para trás (contagem regressiva); posteriormente, registadas como sentenças e, gradualmente, elevadas ao plano mental (Rosa, 2012). Essa perspetiva é semelhante com a utilizada em Moçambique, embora com palavras diferentes: antes e depois (INDE, 2015).

As operações da adição e subtração são também ensinadas com base no uso da reta numérica:

> Na continuidade, segue-se o trabalho mental com a reta numérica. É importante relacionar a direção do deslocamento na reta com os operadores " $+$ " e " $-$ " com os termos antecessor e sucessor. Por exemplo, quando o professor fala $5+1$, ou o sucessor de 5, a criança deverá falar o número 6. Ao se questionar sobre quanto é $5 - 1$, ou qual é o antecessor de 5, elas responderão 4 (Rosa, 2012, p. 199-200).

A afirmação apresentada acima evidencia que existe um símbolo da operação e um símbolo do número. O deslocamento na reta numérica está associado ao símbolo da operação (Rosa, 2012; Martins, 2013). Todavia, este argumento não é justificado pelas pesquisadoras e por alguns trabalhos da área. Em outras palavras, não se apresentam as razões de ser dessa forma de proceder. Como o professor explica esse fenómeno?

No Sistema de Ensino moçambicano, na disciplina de matemática, introduz-se o conjunto dos números inteiros relativos na 8ª classe. Conforme o programa dessa disciplina, sugere-se recorrer a situações da realidade e associar os sinais posicionais negativo $(-)$ ou positivo $(+)$ a prejuízo ou lucro, perdas ou ganhos, temperatura negativa ou positiva, posição abaixo ou acima do nível do mar, esquerda ou direita de um referencial, respetivamente (INDE, 2007).

Considerando a reta numérica, essa associação permite usar retas numéricas de qualquer direção: horizontais (esquerda ou direita de um referencial), vertical (abaixo ou acima do nível do mar), indefinida (prejuízo ou lucro, perdas ou ganhos, temperatura negativa ou positiva).

As operações no Conjunto de Números Inteiros são abordadas na primeira unidade temática denominada Números Racionais. Para a unidade temática estão previstas 35 aulas. Porém, não há indicação sobre quantas aulas devem ser dedicadas as operações em Z.

Em seguida, são apresentados os objetivos de aprendizagem das operações de adição e subtração em Z.

Quadro 1. Objetivos de aprendizagem da Adição e Subtração de Números Inteiros

	Adição	Subtração
Com reta numérica	- Reconhecer as propriedades da adição e a sua utilidade no cálculo; - Aplicar as propriedades da adição; - Distinguir sinais de operação e de posição;	- Distinguir sinais de operação e de posição; - Conjugar o sinal de operação e o de posição; - Efetuar as operações algébricas
Sem reta numérica	- Conjugar o sinal de operação e o de posição; - Efetuar as operações algébricas.	

Fonte: Adaptado de INDE, 2007, p.18

Para a introdução das operações de adição e subtração de números inteiros INDE (2007) não expõe nenhuma sugestão referente ao trabalho com a reta numérica. Contudo,

> aconselha-se o professor, a procurar explicar o significado destas regras na base de exemplos que reflictam situações reais da vida. Há que evitar no máximo ensinar aos alunos estas regras de forma mecanizada, onde o aluno procura apenas decorá-las sem compreender o seu significado (INDE, 2007, p.24).

Portanto, verifica-se que o professor possui liberdade de inovar e desenvolver suas estratégias de ensino baseadas na reta numérica. O que se deseja é que o aluno compreenda o significado.

METODOLOGIA

Neste estudo considerou-se um questionário com 8 perguntas concebidas para reunir experiências ou argumentos em torno da adição de números inteiros na reta numéricas. Inicialmente cogitou-se coletar dados com recurso a entrevista, com contacto direto entre entrevistador e entrevistado. Devido a pandemia da Covid 19, concebeu-se um questionário *online* contendo perguntas abertas e disponibilizou-se o *link* em dois grupos de *WhatsApp* constituídos por professores de matemática do Ensino Secundário de três distritos da província de Cabo Delgado (Balama, Montepuez e Namuno), com os quais realizavam-se atividades de extensão.

A produção de dados envolveu professores de matemática que lecionam no Ensino Secundário Geral com experiência na lecionação da disciplina de matemática na 8ª classe onde a matéria pesquisada é introduzida. A participação foi consentida, já que cada professor tinha a liberdade de o fazer.

Obteve-se respostas de quatro professores que se designou por $P_1, P_2, P_3\ e\ P_4$ todos do género masculino, Licenciados em Ensino de Matemática e possuíam entre 1 à 12 anos de experiência no ensino da matemática na 8ª classe: P_1 com 6 anos de experiência, P_2 com 3 anos de experiência, P_3 com 12 anos e P_4 com 1 ano de experiência. Portanto, tratou-se de um grupo heterogéneo quanto aos anos de experiência no ensino de matemática na 8ª classe.

Esses professores responderam ao questionário que tinha 8 perguntas: duas em torno do sentido atribuído aos sinais posicionais e operacionais; 6 com visão específica para constatarem particularidades ou uniformidades em todo do sentido atribuído aos sinais e aos jogos de sinais.

A análise de dados seguiu uma abordagem qualitativa, pela análise de conteúdo (AC),

> um conjunto de técnicas de análise de comunicações visando por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos as condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (BARDIN, 2016, p. 48).

A AC, enquanto conjunto de técnicas, demanda escolhas e, porventura, combinações de técnicas. Nesse sentido, escolheu-se análise temática e cumpriram-se os seguintes passos. O primeiro momento, a pré-análise, consistiu na recolha e organização dos dados bem como o início de leitura flutuante dos dados por questão, sublinhados aspetos relevantes dessa leitura e terminou-se fazendo anotações dos códigos inerentes a cada questão.

No segundo momento, entendeu-se que havia possibilidade de explorar algumas respostas a partir de perguntas que se direcionavam no mesmo ponto. Por exemplo, uma das perguntas solicitava que os professores expusessem como têm explicado as operações de adição e subtração na reta numérica e outra já trazia umas situações para explicar suas resoluções. Neste contexto, as duas perguntas se complementaram e o processo de análise de dados buscou consistência nas respostas de ambos os casos.

No terceiro momento, interpretação e inferências, reconheceu-se as estruturas latentes o que permitiu gerar as categorias (emergentes) dos argumentos sobre adição e subtração, portanto, possibilitou a caracterização do ensino da adição e subtração de números inteiros na reta numérica.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta secção apresentamos os resultados obtidos em três momentos. No primeiro momento abordamos o tratamento e interpretação dos sinais posicional e operacional na reta numérica, no segundo momento articulamos desses sinais, doravante denominada jogo de sinais operacional e posicional na reta numérica e, no terceiro, apresentamos e discutimos os fundamentos da adição e subtração de números inteiros na reta numérica. Com esses elementos caracteriza-se o ensino da adição e subtração de números inteiros com recurso a reta numérica.

A RETA NUMÉRICA E OS SINAIS POSICIONAL E OPERACIONAL

No primeiro grupo de questões, usando termos como posição ou localização, os professores indicaram que os sinais posicionais ($-$ e $+$) indicam a posição do número em relação ao zero (designado centro da reta numérica pelo P_1 e origem da reta numérica pelo P_2.

[P_1] O sinal posicional representa o sinal indicador de cada inteiro na reta graduada, onde zero e central, positivos naturalmente a direita e negativos a esquerda, porem o ordenamento dos números inteiros é indispensável, pois crescem da esquerda para direita.

[P_2] O sinal posicional usando a reta numérica, explicaria que é a localização do valor num dos sentidos da reta em relação a origem (0).

[P_3] O sinal posicional indica apenas a posição do número em relação a reta graduada, se encontra na parte positiva o número acompanha o sinal positivo e se encontra na parte negativa o número acompanha o sinal negativo.

[P_4] A direita de zero são números Positivos ao passo que a esquerda são números negativos.

Nessas falas, os professores P_1 e P_4 relacionaram o sinal negativo e positivo aos lados esquerdo e direito de zero, respetivamente, intuindo que apenas usam reta numérica na posição horizontal. As asserções dos professores P_2 e P_3 são abertas em relação a posição da reta, embora isso não signifique que usam outras posições de reta: vertical ou oblíqua.

É possível compreender também, das falas dos professores P_1, P_2 e P_4 a referência ao zero com o número que distingue/separa os números negativos dos positivos. O P_1 também referiu que os sinais posicionais indicam a ordem, ou seja, todo o número negativo é menor que qualquer número positivo. Portanto, em termos de posição, além da ordem, o número inteiro tem três lugares: esquerdo de zero (negativo), origem ou centro (zero) ou direito (positivo).

Em relação ao sinal operacional, os professores P_2 e P_4 foram mais explícitos e suas asserções mostram que esses sinais são responsáveis pelas transformações que se realizam, ou seja, são responsáveis pelas deslocações em unidades ao longo da reta numérica e pela indicação do resultado. As operações são associadas a termos como juntar, acrescentar ou diminuir.

[P_2] O sinal operacional usando a reta numérica, eu explicaria que trata-se de um sinal que junta ou diminui certos números quando se parte da origem da reta indo para um certo ponto e do ponto de novo vai no outro dependendo da operação

[P_4] Se temos por exemplo: $a + (+b)$ esclarecesse que acrescenta-se $+b$ Unidade em "a" unidade, isto para a direta. Caso seja $a - (+b)$ diminui-se "$-b$" unidades em "a" unidade, isto partindo do ponto "a" para a esquerda.

Na fala do P_4 é possível compreender a associação dos sinais operacionais negativo $(-)$ a um deslocamento à esquerda (considerado diminuição) e positivo $(+)$ a um deslocamento à direita (aumento).

O JOGO DE SINAIS (POSICIONAL E OPERACIONAL) NA RETA NUMÉRICA

Na segunda parte de questões, solicitou-se aos professores a explicação da resolução de 4 expressões numéricas em que se trocou posições dos sinais operacionais pelos posicionais: $(-2) + (-3) =$; $(-2) - (+3) =$; $(-2) - (-3) =$; $(-2) + (+3) =$. Neste grupo de questões não se considerou respostas do professor P_3 porque apenas resolveu e não explicou.

Na explicação da 1ª expressão numérica, $(-2) + (-3) =$ constatou-se que há duas ideias. A primeira relaciona-se com as parcelas. O P_1 adota duas parcelas e os professores P_2 e P_4 trazem implicitamente a parcela nula a partir da qual realizam uma operação (o deslocamento) baseada no sinal posicional da primeira parcela da expressão dada.

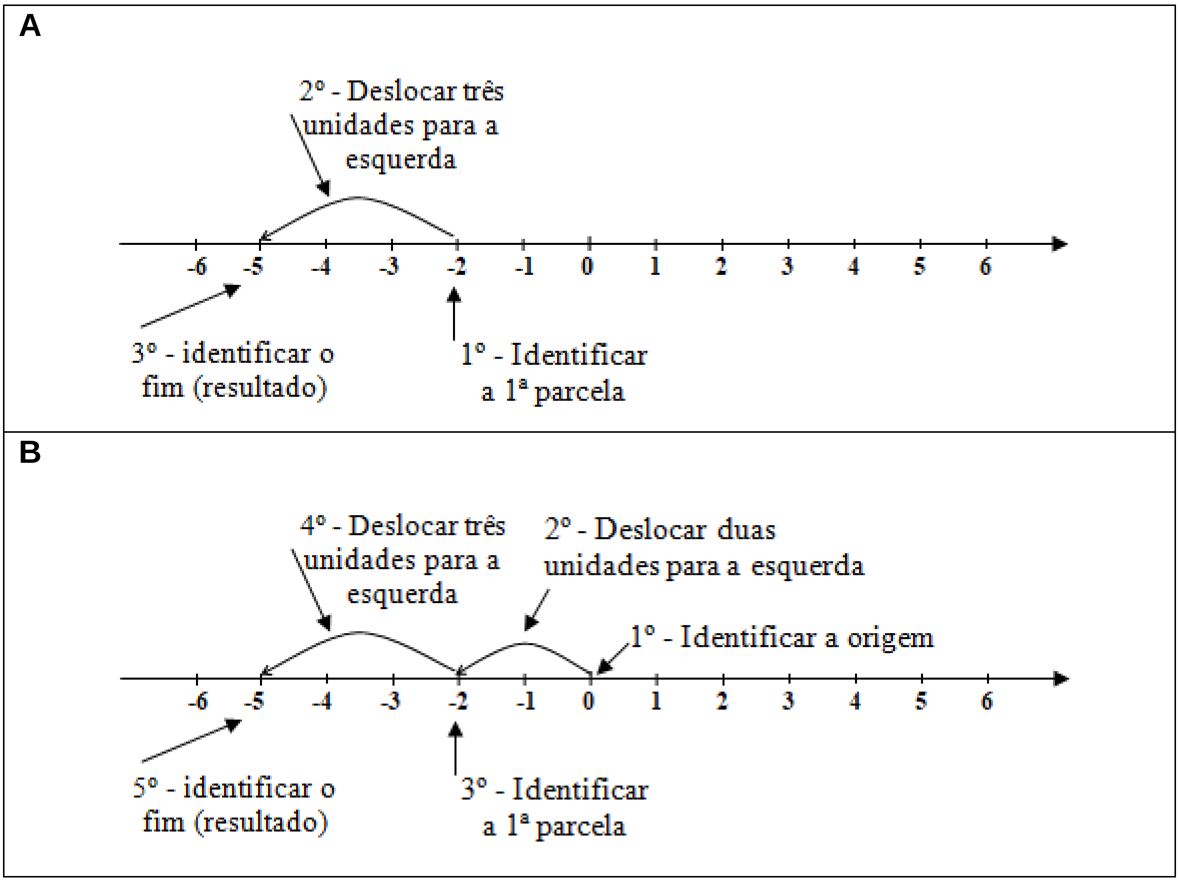
[P_1] [..] localizemos a primeira parcela na reta graduada, de seguida partindo deste marco desloquemos para esquerda 3 unidades porque a segunda parcela tem sinal negativo, neste caso partindo de -2 vamos deslocar ate -5;

[P_2] Neste ponto, eu diria que o sinal que está dentro de parênteses com o dois trata-se de sinal posicional que nos indica que partindo da origem (zero) iremos andar duas unidades para a esquerda e pararemos no (-2). Iremos partir do (-2) e seguimos no mesmo sentido a esquerda em 3 unidades e desta vez o destino será o número (-5). Daí explicaria aos alunos que o resultado desta operação é (-5). Logo fomos aumentar dois números negativos inteiros;

[P_4] Orientaria a localizarem o (-2) na reta e posteriormente a partir da origem traçaríamos 2 unidades para esquerda como indica o sinal $(-)$ e a partir deste ponto (-2) traçaríamos mais 3 unidade de novo para a esquerda para representar (-3), com certeza parariamos no ponto (-5). Seria a tal solução.

O procedimento do P_1 possui três etapas (Ver fig. 1 A) e uma operação (deslocamento). No entanto não há clareza em relação às funções dos sinais posicional e operacional. Nas afirmações dos professores P_2 e P_4 pode-se registar 4 etapas (fig. 1 B) e duas operações. A primeira operação se regista de zero (parcela implícita) à primeira parcela (explicita) e isso decorre do sinal posicional e, em seguida, da primeira parcela explicita deslocam-se as unidades da segunda parcela. O P_2 fala em aumentar unidades negativas e P_4 se baseia no sinal posicional da $2^{\underline{a}}$ parcela para indicar que o deslocamento é à esquerda, intuindo que o sinal $(-)$ direciona o deslocamento à esquerda.

Figura 1: Experiências relacionadas ao ensino da adição em Z na reta numérica



Fonte: elaborado pelos pesquisadores.

Na expressão seguinte, $(-2)-(+3)=$, que é equivalente à anterior, o padrão de localização da primeira parcela não alterou. No entanto, os professores transformam a subtração em adição de parcelas trancando os sinais operacional do posicional da 2ª parcela, como asseveram:

> *[P_1] Temos aqui a consciência que o aluno domina simétrico de um número, $-(+3)$ é igual a -3 dai que teremos $-2-3$ que é igual a -5*
>
> *[P_2] Recorreria para o primeiro exercício.*
>
> *[P_4] Jogaria o sinal operacional com posicional e daria $(-2)+(-3)$, posteriormente representa-se o (-2) na reta orientada a partir da origem para a esquerda e a partir deste ponto (-2) representa-se outra semi-reta com 3 unidades para esquerda para representar (-3), que daria (-5).*

Neste caso, o P_1 diz que recorreu ao simétrico de um número, P_2 tratou a expressão como a primeira e P_4 afirma que jogou os sinais posicional e operacional e mostra que trocou as posições dos sinais transformando a expressão na 1ª e assim operá-la como essa.

Esses procedimentos mostram alguma limitação em trabalhar com a subtração como operação na reta numérica mediante metáforas de redução ou aumento e prevalece a falta de clareza sobre o sentido de deslocamento para a adição e a subtração.

Na expressão numérica $(-2)+(+3)=$, os professores são unânimes em argumentar que o deslocamento, depois de localizada a 1ª parcela (-2) é realizado para a direita em três unidades. No entanto, não há clareza sobre o sinal promotor do deslocamento, se o sinal operacional ou posicional. P_4 foi único professor que relacionou o lado direito ao sinal posicional, mas não fica clara a função do sinal operacional.

> *[P_1] Temos aí a adição de números inteiros, localizemos a 1ª parcela e partindo deste ponto desloquemos 3 unidades para direita, neste caso partindo do -2 vamos até 1*
>
> *[P_2] Neste ponto, o princípio do exercício anterior será o mesmo, contudo, diferenciaria na segunda parcela, onde partiríamos do ponto (-2) na reta*

> *numérica para o sentido direito pelo facto de existir no três o sinal positivo. Logo, a nova paragem será no ponto* $(+1)$*. Daí o resultado será o* $(+1)$.
>
> *[P_4] Traçar a partir da origem uma simi-reta de duas unidades para a esquerda para representar o* (-2) *e a partir de ponto* (-2) *traçar outra semi-reta de* 3 *unidades para a direita para representar (+3), com certeza pararia no ponto* $(+1)$*, seria a solução.*

Na expressão $(-2) - (-3) =$, os professores procedem com a transformação dos sinais operacional e posicional que são negativos em sinais positivo usando a noção de simétrico. No entanto, também não dizem como e com que argumentos e relações procedem.

> *[P_1] Aqui primeiramente temos consciência que o aluno esta familiarizado com simétrico de um número, e então* $-(-3)$ *é igual a mais 3, então rescrevendo a operação teremos* $(-2) + 3$ *que será igual a* 1
>
> *[P_2] Neste ponto, o processo vai ser o mesmo do exercício inicial, porém, vira o sentido para o direito para terminar no ponto* $(+1)$*. Pelo facto de existirem os dois sinais seguidos sendo negativos. Deve-se jogar para termos um sinal positivo. Para que a operação seja positiva e nos conduza ao lado direito da reta numérica*
>
> *[P_4] Jogar os sinais operacional e posicional que culminaria* $com\ (-2) + (+3)$*, Traçar uma semi-reta de comprimento duas unidades a partir a origem para a esquerda, para representar* (-2) *e a partir do ponto* (-2) *traçar outra semi-reta de 3 unidades para a direita que representa* $(+3)$*, o resultado seria* $(+1)$*.*

Em todas as expressões não há clareza da função dos sinais posicionais e operacionais. Apenas o sinal posicional da 1ª parcela indica a localização do número em relação ao zero (se a esquerda ou a direita do zero). Vale também destacar que, considerando a concepção de sinais posicional e operacional, o P_1 encerra a ideia de posição ao começar por localizar a primeira parcela sem se referir a um referencial ou ponto de partida. Os professores P_2 e P_4, cuja explicação começa por identificar a origem ou centro zero, para a partir dai localizar a parcela -2 mediante o deslocamento de duas unidades para a esquerda, destoam o significado do sinal posicional que antecede o número 2 apresentando-o como operacional à medida que causa o deslocamento.

FUNDAMENTOS DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA RETA NUMÉRICA

Os quatro professores expuseram suas experiências de ensino de adição e subtração de números inteiros na reta numérica. Essas experiências foram obtidas por meio de seis (6) perguntas abertas de um questionário, em que cada uma explorava as possibilidades de adição e subtração entre dois números. A análise das respostas desses inquiridos nos permitiu compreender que as explicações derivam da agregação de duas dimensões: estática e dinâmica, segundo constam no quadro 2.

Quadro 2. Fundamentos dos professores quando ensinam adição e subtração de números inteiros na reta numérica

Estados operativos	Elementos
Estáticos (vertente estrutural)	Reta numérica; zero origem; zero absoluto; parcela; sinal posicional
Dinâmicos (vertente funcional)	Movimentos (esquerda-direita; direita-esquerda); unidades de movimento; sentido de movimento; solução; jogo de sinais posicionais e operacionais.

Fonte: dados da pesquisa, 2020.

A partir do quadro 2, verifica-se que o uso da reta numérica para o ensino de adição e subtração de números inteiros explora algumas noções trabalhadas nos primeiros anos de escolaridade, como o caso de sentido (esquerda-direita, direita-esquerda), parcela e soma (solução). Além disso, ela incorpora novos conceitos, por exemplo a diferença entre zero origem e o zero absoluto, sinal operacional e jogo de sinais.

Pesquisadores como Martins (2013) e Glaeser (2010) já mencionam o entrave dos dois zeros (zero absoluto e zero origem) que conduza dificuldades de unificação da reta. Este entrave é caracterizado como obstáculo epistemológico. Portanto, a presença dos dois zeros na estrutura da argumentação pode ocasionar incompreensões posteriores.

Outra desvantagem epistemológica está relacionada com o “jogo de sinais” que, além de ser feito fora da reta numérica, revelando dificuldades de trabalhar com a subtração (sinal operacional), não há clareza do papel dos sinais posicional e operacional, apesar de os professores terem relacionado o posicional com a localização e o operacional com o deslocamento. Por exemplo, as expressões $-2 + (-3) = \ e \ -2 - (+3) =$, a 2ª é transformada, de fora da reta, na expressão e posteriormente adotado o procedimento da 1ª expressão na reta numérica. O mesmo acontece com as expressões $-2 + (+3) = \ e \ -2 - (-3) =$.

No entanto, por se tratar de estruturas incorporadas a elementos estáticos assume-se que um trabalho prévio do professor no sentido de explicar a configuração da reta numérica pode ser uma alternativa para superação.

Na constituição das suas argumentações, os P_1, P_2, P_3 e P_4 partem dos elementos estáticos para elementos dinâmicos. O excerto abaixo

> *Para usar a reta numérica nas operações de adição e subtração de números inteiros, primeiro partimos da origem e direcionamos um dos sentidos da reta consoante o sinal que nos é dado e deslocamos as unidades que nos derem na primeira parcela. Depois onde paramos, serve de origem no mesmo ponto de paragem e seguimos num dos sentidos de acordo com a operação e iremos deslocar segundo as unidades que nos derem na segunda parcela. Daí, a segunda paragem verificamos o seu valor e dissemos que o resultado da operação será o mesmo valor da paragem. [P_2].*

Esta forma de abordagem, pressupõe que alunos saibam *à priori* a configuração e constituição da reta numérica. Em princípio, parece não haver interferência dos sinais operacionais, contudo eles interferem. O quadro abaixo destaca os mecanismos da adição e subtração na reta numérica.

Quadro 3. Estrutura considerada na adição e subtração de número inteiros

Parcelas	Adição e subtração
1ª parcela	Institui localização posicional do número na reta numérica
2ª parcela	Os sinais operacionais e posicionais da segunda parcela determinam o sentido do movimento na reta numérica e o número (absoluto) indica unidades de deslocamento

Fonte: dados da pesquisa, 2020

O quadro 3 evidencia que são poucos aspetos a serem observados nas operações de adição e subtração de números inteiros na reta numérica. Além disso, os inquiridos ressaltam que os sentidos de adição e subtração não mudam neste conjunto numérico, este posicionamento é expresso quando foi solicitado a explicação habitual do professor aos seus alunos diante de uma situação idêntica a $(-2) + (-3)$

> […] *Neste ponto, eu diria que o sinal que está dentro de parênteses com o dois trata-se de sinal posicional que nos indica que partindo da origem (zero) iremos deslocar duas unidades para a esquerda e pararemos no* (-2). *Iremos partir do* (-2) *e seguimos no mesmo sentida à esquerda em* 3 *unidades e desta vez o destino será o número* (-5). *Daí explico aos alunos que o resultado desta operação é* (-5). *Logo fomos aumentar dois números negativos inteiros […].*

Assim, embora se trate de um novo conjunto numérico, adicionar e subtrair conservam seus significados largamente difundidos nas classes iniciais do ensino primário.

Os resultados do quadro 3 mostram que o sentido do movimento não depende apenas do sinal operacional (Rosa, 2012; Martins, 2013). Os dois sinais posicionais da segunda parcela junto com o sinal operacional se relacionam para determinar o sentido do movimento. Este facto esclarece por que razão há mudança de sentido de movimento quando os sinais operacionais e posicionais da segunda parcela são ambos negativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois das análises constatou-se que há duas experiências com o ensino da adição e subtração de números inteiros na reta numérica. Nas duas experiências não há clareza sobre a função dos sinais dos sinais posicionais e operacionais, o jogo de sinais (posicional e operacional), ou seja, as leis ou regras expressas não são aplicáveis a todas as adições/subtrações com números inteiros. A operacionalização do jogo de sinais é feita fora da reta recorrendo a ideia de simétricos ou outro argumento que não ficou explicito.

Esses resultados confirmam a presença de obstáculos epistemológicos. Amadeo (2013) revela que há ainda um desafio para aprimoramento das operações em Z de adição e subtração na reta numérica. O resultado desta pesquisa constitui também um indicador para reflexões sobre o ensino dessas operações e as dificuldades associadas. À semelhança do posicionamento de Chicote e Deixa (2020) em relação ao ensino da geometria, nesta investigação também se destaca a necessidade de pensar na formação de professores. Na mesma linha de força, argumenta-se a favor de uma formação contínua e permanente na escola, conforme defendem Barreto e Prado (2018).

REFERÊNCIAS

Amadeo, M.S. (2013). Desenvolvimento da noção de reta numérica e seus contextos de 1708 a 1829. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro.

Amorin, S.R. C. (2012). Números Inteiros: panorama de pesquisas produzidas de 2001 a 2010. Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência para obtenção do titulo de Mestre Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo.

Castro, E.C. (2015). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Memoria presentada para optar al Título de Doctor por la Universidad de Zaragoza, realizada bajo la dirección del profesor Dr. Guy Brousseau. Zaragoza.

Barreto, M. das G. B., & Prado, M. E. B. B. (2018). Um diálogo sobre práticas na formação dos professores que ensinam matemática. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, *1*(2), 39–58. https://doi.org/10.30612/tangram.v1i2.7316

Chicote, R. S., & Deixa, G. V. (2020). Pensamento Geométrico dos Futuros Professores de Matemática em Moçambique: um estudo de caso da Universidade Rovuma. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, *3*(1), 62–73. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i1.11195

Glaeser, G. (2010). Epistemologia dos Números Negativos. Reedição de Wanderley Moura Rezende e Bruno Alves Dassie. **In:** ***Boletim* GEPEM***,* n. 57, jul./dez, 2010. Trad. do original: *Épistémologie des nombres relatifs,* in: *Recherches en didactique des mathématiques*.

Hirage, R., Chicote, R. S., & Deixa, G. V. (2021). Avaliação da tabuada para aprendizagem de adição ou subtração de números Inteiros. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, *4*(4), 139–162. https://doi.org/10.30612/tangram.v4i4.15447

INDE. (2007). Matemática, Programa da 8ª Classe; Maputo, Moçambique.

INDE. (2015). Programas das Disciplinas do 1º Ciclo do Ensino Primário, Maputo, Moçambique.

Martins, A.P. C. (2013). Uma análise do ensino das operações com números relativos**.** Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC Pós-graduação *lato sensu* - especialização em educação matemática (Monografia). Criciúma.

Neto, F. T.R.(2010). Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no Ensino Fundamental**.** Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências e Matemática. Fortaleza.

Rosa, J. E. (2012). Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Universidade Federal do Paraná. Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, como exigência parcial à obtenção do título de Doutora em Educação. Cutiriba.

Contribuições dos Autores

1ª autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.
2º autor: curadoria de dados; análise formal; investigação; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.
3º autor: curadoria de dados; redação – revisão e edição.