

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

ANGÉLICA BUITRAGO, JULIANA MANTILLA, NATALIA MARTÍNEZ Y PAOLA
CASTRO

BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2022

Presentamos en este documento el diseño de la unidad didáctica para el tema de la proporcionalidad directa. Esta unidad didáctica es el resultado del trabajo realizado en el proceso formativo del grupo 2 de la novena cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

Abordamos la proporcionalidad directa para la unidad didáctica porque creemos importante que los estudiantes reconozcan que, en una situación de proporcionalidad, los cambios de una magnitud influyen en la otra, pero que dicho cambio se hace de forma constante. Así mismo, es importante que los estudiantes desarrollen un lenguaje apropiado para comunicar y explicar este tipo de situaciones. La proporcionalidad directa está relacionada con conceptos como fracción, razón, proporción, repartos proporcionales, distribuciones, porcentajes y función. Además, la proporcionalidad directa juega un papel significativo tanto en la vida profesional como cotidiana de los estudiantes.

Diseñamos la unidad didáctica para la implementación en instituciones educativas que tengan dentro de su plan de área la proporcionalidad directa en el grado séptimo, en una modalidad virtual o presencial. Nuestra unidad didáctica se encuentra alineada con la normatividad curricular colombiana. En relación con los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006), encontramos dos estándares en el conjunto de grados 6° y 7°. El primero de ellos, “justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa” (p. 84), se ubica en el pensamiento numérico y sistemas numéricos. El segundo estándar se ubica en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: “analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos” (p. 85).

En cuanto a los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016), encontramos que nuestra unidad didáctica se relaciona con tres derechos de grado séptimo. El primero es “utiliza diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas” (p. 54). El segundo derecho básico de aprendizaje es “utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades” (p. 55). El último derecho básico de aprendizaje es “representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes (áreas y perímetro) y con base en la variación explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria” (p. 56).

Adicionalmente, fundamentamos el contenido de la unidad didáctica en el marco conceptual de matemáticas del Programme for International Student Assessment (PISA por sus siglas en inglés). PISA proporciona información mediante una evaluación sobre la eficacia de preparación de estudiantes de 15 años al emplear las matemáticas en diferentes contextos (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2013). Relacionamos el tema de proporcionalidad directa con dos categorías de contenido. La primera categoría es cambio y relaciones puesto que la proporcionalidad directa se enfoca en analizar cambios continuos de cantidades que guardan una relación constante. Segundo, asociamos el tema con la categoría cantidad en vista de que se cuantifican las relaciones que permiten suponer la comprensión de las magnitudes para así examinar el cambio. En cuanto a los procesos matemáticos, buscamos contribuir en mayor medida al proceso de emplear. Pretendemos que los estudiantes hagan uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para dar solución a situaciones contextualizadas de la proporcionalidad directa. Las capacidades matemáticas fundamentales que esperamos que el estudiante active con la unidad

didáctica son el diseño de estrategias para resolver problemas, en la que el estudiante busca o diseña un plan para solucionar una tarea; la representación, con el fin de que el estudiante traduzca una tarea y utilice diferentes formas para representarla; y el razonamiento y argumentación, para que el estudiante realice inferencias y justifique lo que hace en el desarrollo de una tarea.

1. ARTICULACIÓN DE CONTENIDOS

En este apartado, presentamos el análisis de contenido que realizamos de la proporcionalidad directa. Describimos la estructura matemática y conceptual del tema, los sistemas de representación y los fenómenos que le dan sentido (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018).

1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA Y CONCEPTUAL DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

A continuación, presentamos en la figura 1 el mapa conceptual de la estructura matemática en la que se ubica el tema. Allí, identificamos las relaciones entre los conceptos y procedimientos vinculados con el origen de la proporcionalidad directa. Ubicamos el tema matemático bajo una relación binaria que puede darse en conjuntos iguales, diferentes o como una relación constante. Si los conjuntos son iguales se efectúa una relación homogénea que cumple con las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva. Al cumplir con la propiedad simétrica, se establece una relación de dependencia que se asocia con el concepto de razón que, a su vez, se concibe como un cociente, una comparación geométrica o aritmética, y con equimultiplicidad. A partir de estos conceptos, se desarrolla la noción de proporción.

Por otra parte, si la relación binaria se da entre conjuntos diferentes, hablamos de una relación heterogénea. Por ejemplo, en la función lineal, los elementos de un conjunto A se pueden corresponder con los elementos de un conjunto B. La relación descrita es una relación funcional inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. En particular, la función lineal se asocia con la proporcionalidad directa mediante su pendiente percibida como la constante de proporcionalidad. Si la relación binaria es constante, la proporcionalidad directa o inversa se asocia con los procedimientos de regla de tres y repartos proporcionales.

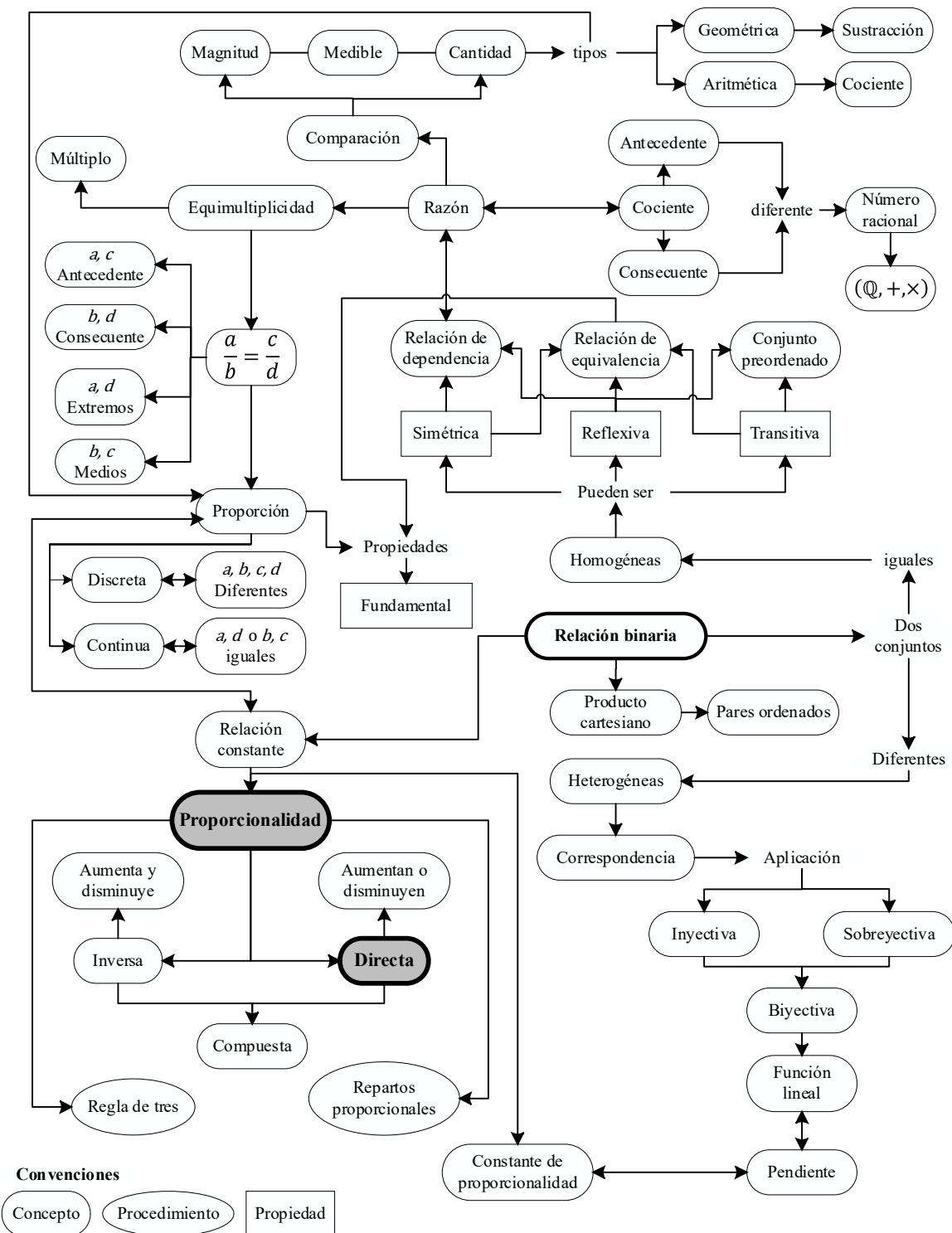


Figura 1. Estructura matemática de proporcionalidad directa

En el mapa conceptual que exponemos en la figura 2, presentamos los conceptos y procedimientos del tema de proporcionalidad directa. Establecemos que la proporcionalidad directa es una relación de equivalencia, pues cumple con las propiedades simétrica, transitividad y reflexiva. Así mismo, la proporcionalidad directa puede ser geométrica o aritmética.

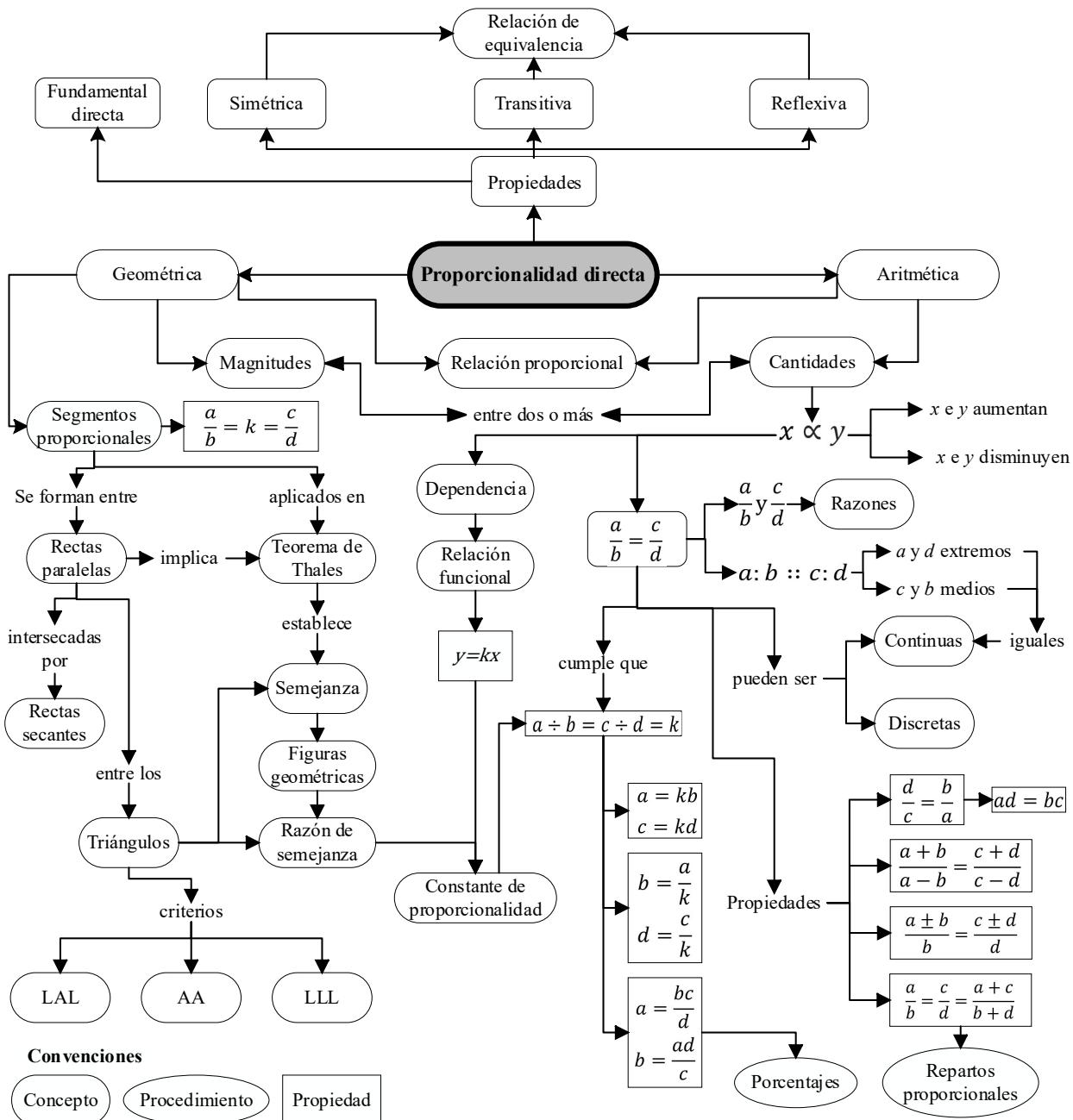


Figura 2. Estructura conceptual de la proporcionalidad directa

Por lo anterior, la proporcionalidad directa geométrica se asocia con todo aquello que puede aumentar o disminuir de manera mensurable. Estas magnitudes correlacionadas de forma constante se pueden establecer en la relación entre rectas paralelas que son intersecadas por rectas secantes. Estas magnitudes son aplicadas en el teorema de Thales. La proporcionalidad directa aritmética se relaciona con lo que ocurre en un momento determinado con una cantidad o valor numérico. Las cantidades correlacionadas, a partir de su comportamiento de aumento o disminución, pueden ser contempladas como (a) una razón, cuyo cociente es constante; (b) una proporción, en la que la igualdad entre razones es constante; y (c) un modelo de variación directa entre una cantidad y un múltiplo constante, conocido como pendiente. Esta relación constante permite plantear e identificar porcentajes, realizar repartos proporcionales y determinar cantidades desconocidas por medio de la regla de tres simple directa. Centramos la unidad didáctica en la identificación de las características de la proporcionalidad directa y en los procedimientos de repartos proporcionales, porcentajes y regla de tres, asociados a la proporcionalidad directa aritmética.

2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Un sistema de representación es un sistema de signos que cumple unas características para la creación y manipulación de signos, y su relación de equivalencia (Cañadas et. al, 2018). Identificamos los siguientes sistemas de representación para la proporcionalidad directa: simbólico, verbal, numérico, tabular, gráfico, geométrico, pictórico, manipulativo y ejecutable. Los sistemas de representación más relevantes en el diseño de la unidad didáctica son el sistema de representación simbólico, verbal, numérico y gráfico.

Exponemos en la figura 3 el mapa conceptual de todos los sistemas de representación que identificamos, junto con las relaciones (transformaciones) que pueden surgir en el mismo sistema de representación o las traducciones que se pueden establecer entre ellos.

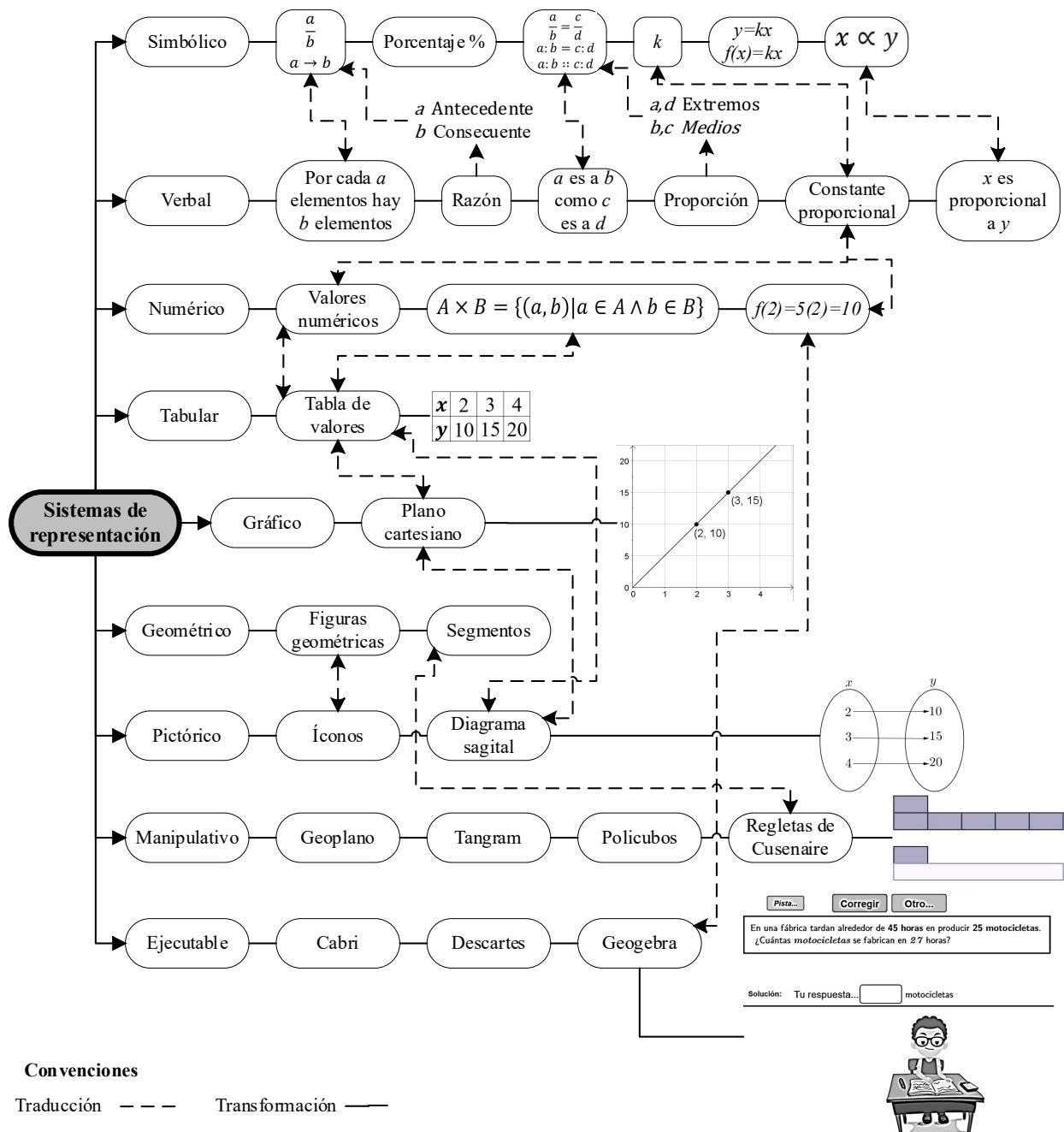


Figura 3. Sistemas de representación de la proporcionalidad directa

A continuación, describimos los sistemas de representación desde la particularidad del tema.

Sistema de representación simbólico. La proporcionalidad directa se puede representar por medio de razones $\frac{a}{b}$ o proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en la que las magnitudes a, b, c y d pueden aumentar o disminuir en función de una constante k .

Sistema de representación verbal. Mediante el sistema de representación verbal, podemos expresar el tema con un lenguaje técnico. Por ejemplo, identificamos expresiones como “por cada a elementos hay b elementos”, “ a es b como c es a d ” o “ y es proporcional a x ”.

Sistema de representación numérico. En este sistema de representación, tenemos en cuenta el conjunto de los números racionales como conjunto numérico para establecer las cantidades a relacionar. Para representar la proporcionalidad mediante la función lineal, podemos obtener parejas ordenadas (x, y) . Estas parejas se representan en el plano cartesiano y satisfacen tener la misma constante de proporcionalidad. Las cantidades de la variable independiente se representan en la componente x y las de la variable independiente en la componente y . Por lo anterior, se cumple con la definición del producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Sistema de representación tabular. En relación con el sistema de representación tabular, utilizamos las tablas de forma vertical u horizontal. En estas tablas se sitúan las magnitudes a y b cuya relación es la constante de proporcionalidad k .

Sistema de representación gráfico. El sistema de representación gráfico permite representar la proporcionalidad directa en el plano cartesiano mediante la función lineal. Los ejes representan las magnitudes a y b . La relación entre las magnitudes que aumentan o disminuyen de forma constante se representan por medio de la recta $y = kx$.

Sistema de representación geométrico. Podemos representar la proporcionalidad directa en el sistema de representación geométrico por medio de segmentos. Si la razón entre dos segmentos a y b es la misma que la de otros dos segmentos c y d , entonces existe una relación de proporcionalidad directa entre ellos (Teorema de Thales). Además, este sistema de representación nos permite reconocer figuras geométricas ampliadas o disminuidas (escalas).

Sistema de representación pictórico. En este sistema de representación, podemos hacer uso de íconos que dependen del contexto de la situación. Por ejemplo, si la situación trata sobre helados, el ícono será el de una paleta de helado. Los diagramas sagitales son otra representación pictórica de la proporcionalidad directa vista desde una relación funcional entre dos conjuntos (ver figura 5).

Sistema de representación manipulativo. Para este sistema de representación, consideramos apropiado el uso de geoplanos, tangram, regletas de Cuisenaire, fichas de Lego, policubos y bloques lógicos o geométricos. Los estudiantes encontrarán la proporcionalidad directa por medio de la relación de los tamaños de las diferentes fichas de los diferentes materiales (ver figura 5).

Sistema de representación ejecutable. El sistema de representación ejecutable incluye aplicativos como Cabri Geometry, Descartes y GeoGebra para identificar las características de la proporcionalidad directa en el plano cartesiano. Por ejemplo, en GeoGebra, podemos hacer una traducción entre los sistemas de representación tabular y gráfico (ver figura 4).

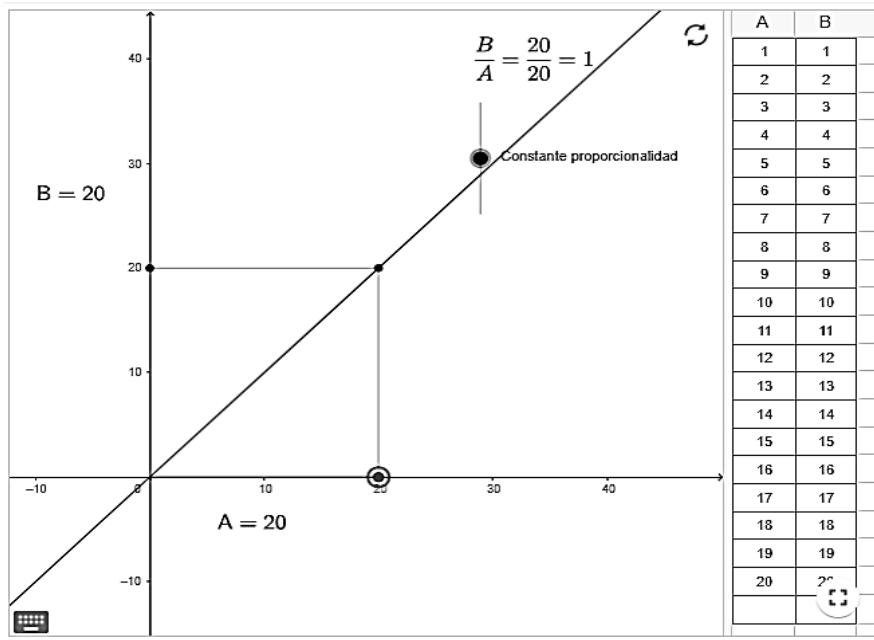


Figura 4. Aplicativo en GeoGebra de proporcionalidad directa

Para evidenciar lo descrito previamente, mostramos en la figura 5 un ejemplo de proporcionalidad directa entre la variación de las medidas de los lados de un rectángulo. Por ejemplo, se tiene un rectángulo cuyos lados miden 6 cm y 3 cm. La razón que relaciona estas cantidades en el sistema verbal es “seis es a tres”, que se traduce al sistema numérico como (6,3).

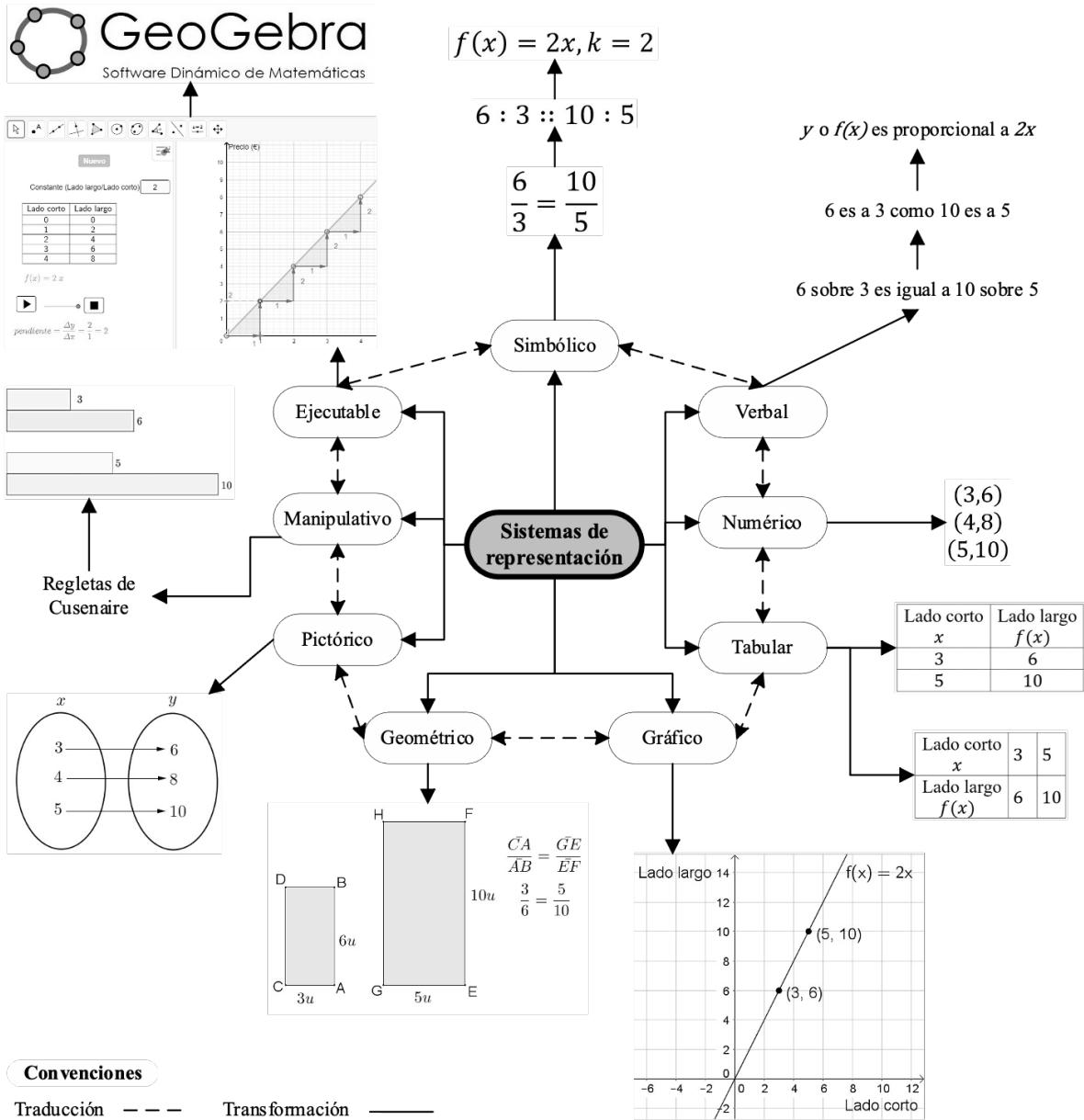


Figura 5. Ejemplo de traducciones entre sistemas de representación de la proporcionalidad directa

3. FENÓMENOS QUE DAN SENTIDO A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

El análisis fenomenológico consiste en describir la estructura matemática del concepto al identificar características matemáticas comunes entre las situaciones en las que tiene sentido el tema (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018). Las subestructuras se originan de la estructura conceptual del tema (ver figura 2), específicamente de los conceptos de magnitudes y segmentos proporcionales, y de los procedimientos de repartos proporcionales y porcentajes. En virtud de lo anterior, identificamos y agrupamos en contextos fenomenológicos otras situaciones o fenómenos que comparten características con las subestructuras planteadas (figura 6).

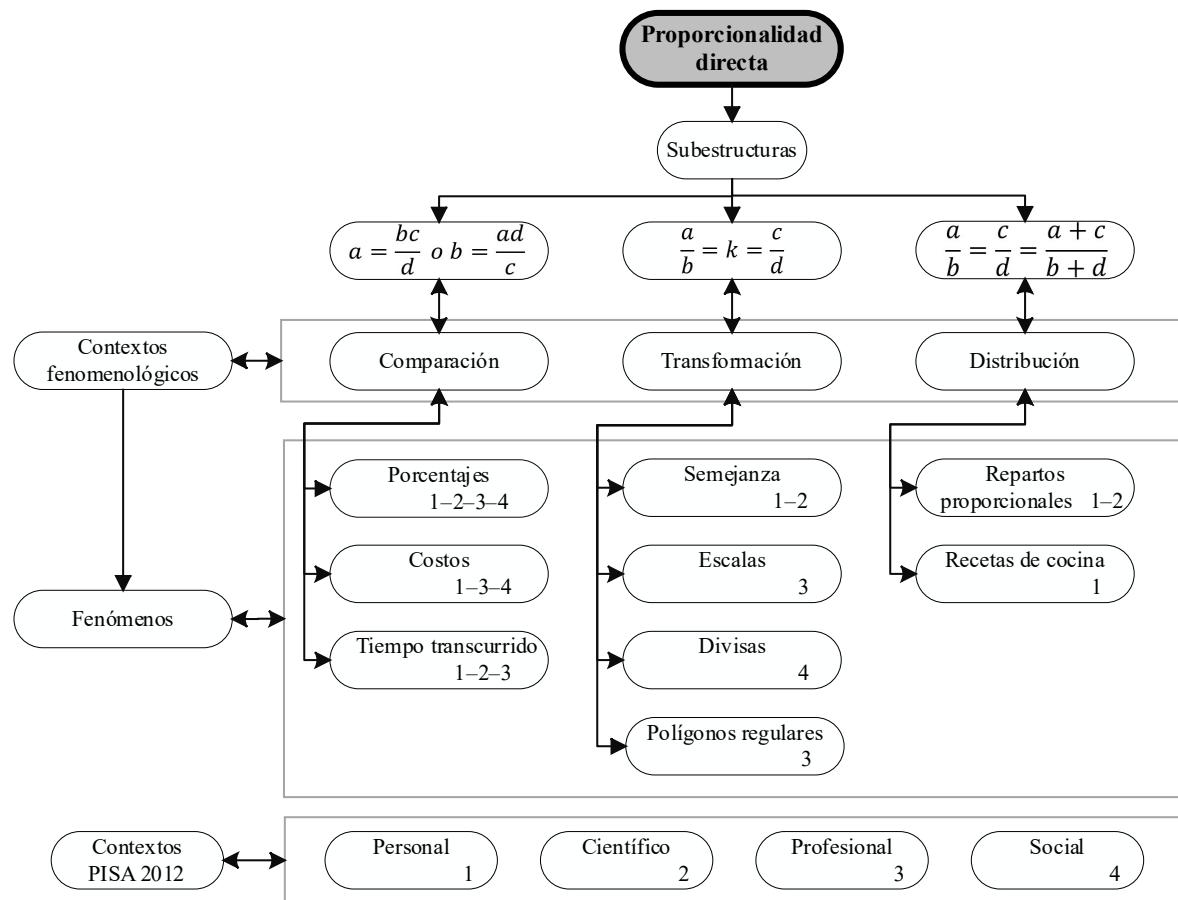


Figura 6. Análisis fenomenológico de la proporcionalidad directa

Asociamos la subestructura $a = \frac{bc}{d} \text{ o } b = \frac{ad}{c}$ con el contexto fenomenológico de comparación. Este contexto fenomenológico abarca situaciones comerciales mediante porcentajes, el valor que tiene un objeto y la relación existente entre el desarrollo de alguna actividad del hogar, laboral u ocio con el tiempo empleado para la misma. El contexto fenomenológico de transformación se

relaciona con la subestructura $\frac{a}{b} = k = \frac{c}{d}$. En este contexto, se agrupan situaciones geométricas como la semejanza de figuras o el aumento y la disminución de una magnitud a partir de conversiones que se dan entre múltiplos o submúltiplos. La última subestructura es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ y su contexto fenomenológico relacionado es la distribución. Este último contexto abarca situaciones en la que la proporcionalidad directa es concebida como una relación de cambio o dependencia entre las variables de manera sucesiva. Por ejemplo, la relación funcional entre la distancia y el tiempo.

Relacionamos los contextos PISA 2012 con los fenómenos que dan sentido a la proporcionalidad directa a partir de su uso. El contexto personal corresponde a las actividades propias del estudiante, su familia y grupo de iguales. Asociamos el contexto social con situaciones que le conciernen a la comunidad local, nacional o global. El contexto profesional se refiere a situaciones relacionadas con actividades del mundo laboral. El contexto científico con las actividades propias de la ciencia (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). Hacemos hincapié en que los fenómenos tienen variedad de aplicaciones en todos los contextos que abarca PISA 2012 de acuerdo con la situación problema. Por ejemplo, el fenómeno de costos, si responde a una situación del presupuesto de un hogar, se vincula con el contexto personal. Si lo abordamos desde la función de costos de un economista, se asocia con el contexto profesional.

2. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos que planteamos en la unidad didáctica para el tema de proporcionalidad directa. Exponemos las expectativas de tipo cognitivo, las expectativas de tipo afectivo y las limitaciones de aprendizaje. Luego, enunciamos los criterios de logro y los grafos de criterios de logro.

1. EXPECTATIVAS DE TIPO COGNITIVO

Para establecer los objetivos de nuestra unidad didáctica, tuvimos en cuenta el marco conceptual de PISA 2012, que está integrado por procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2013). Los procesos matemáticos describen las acciones que toma un individuo para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y así solucionarlo. Con la unidad didáctica, esperamos contribuir en mayor medida al proceso de emplear, en el que el estudiante hace uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para dar solución a situaciones contextualizadas de la proporcionalidad directa. Las capacidades matemáticas fundamentales son capacidades cognitivas que se pueden tener o aprender para relacionar los conocimientos específicos de las matemáticas para solucionar una situación problema. Las capacidades matemáticas fundamentales a las que aportamos en mayor medida son el diseño de estrategias para resolver problemas, en el que el estudiante busca o diseña un plan para solucionar una tarea; la representación, con el fin de que el estudiante traduzca una tarea y utilice diferentes formas para representarla; y el razonamiento y argumentación, para que el estudiante realice inferencias y justifique lo que hace en el desarrollo de una tarea.

1.1. Objetivos

Para establecer los objetivos de la unidad didáctica, contemplamos el reconocimiento de características, propiedades y la aplicación de modelos matemáticos de la proporcionalidad directa en los diferentes contextos fenomenológicos para resolver problemas. Los objetivos propuestos para la unidad didáctica son los siguientes.

Objetivo 1. Reconocer las propiedades y características de la proporcionalidad directa en situaciones de comparación, transformación y distribución.

Objetivo 2. Utilizar modelos matemáticos que emergen de las propiedades de la proporcionalidad directa para resolver problemas.

1.2. Expectativas de tipo afectivo

Para las expectativas de tipo afectivo, tuvimos en cuenta que, si un estudiante comprende y aplica los conceptos y procedimientos, asociados a la proporcionalidad directa, podrá sentir confianza al momento de plantear una posible solución a los problemas que se le presenten. Además, el estudiante participará y compartirá con sus compañeros al intercambiar ideas. Presentamos en la tabla 1 las expectativas de tipo afectivo de la unidad didáctica.

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas del tema proporcionalidad directa

EA	Descripción
1	Tiene disposición favorable para expresar la proporcionalidad directa
2	Comunica con confianza en sí mismo la solución de una situación problema que involucra proporcionalidad directa
3	Participa de manera voluntaria en el planteamiento y resolución de situaciones de la proporcionalidad directa

Nota. EA = expectativa afectiva

Relacionamos estas expectativas con factores asociados al disfrute personal, la curiosidad, ganas de mejorar y/o recibir una recompensa. Igualmente, las expectativas están diseñadas con el fin de que el estudiante regule su comportamiento para lograr los objetivos de aprendizaje. Por ejemplo, la expectativa afectiva EA1 —tiene disposición favorable para expresar la proporcionalidad directa— influye en la predisposición del estudiante.

1.3. Limitaciones de aprendizaje

Entendemos por limitaciones de aprendizaje aquellas dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir al momento de resolver una tarea (González & Gómez, 2018). Para la unidad didáctica, establecimos 54 errores que, a su vez, se encuentran clasificados en cuatro dificultades. Estas dificultades están asociadas con los conceptos propios de la proporcionalidad directa, las estrategias procedimentales de la proporcionalidad directa, los sistemas de representación y sus traducciones, y el reconocimiento y validación de la información para abordar una tarea.

Como ejemplo de las limitaciones de aprendizaje que identificamos, el error E3 —toma un dato diferente al 100% en la solución del problema— se encuentra asociado a la dificultad relacionada con los conceptos propios de la proporcionalidad directa. El error E45 —halla el valor de la constante, pero es diferente al de la tarea— pertenece a la dificultad relacionada con estrategias procedimentales de la proporcionalidad directa. El error E29 —relaciona de manera contraria la información que propone en la tabla— forma parte de la dificultad asociada con los sistemas de representación. El error E38 —obtiene una respuesta sin procedimiento alguno— conecta con la dificultad del reconocimiento y validación de la información. En la tabla 2, mostramos la primera dificultad junto con los errores asociados. En el anexo 1, presentamos el listado completo de estas limitaciones de aprendizaje.

Tabla 2

Listado de dificultades y errores para el tema proporcionalidad directa

E	Descripción
D1. Conceptos propios de la proporcionalidad directa	
1	Relaciona magnitudes que no corresponden de acuerdo con la situación
2	Toma como cantidad una magnitud
3	Toma un dato diferente al 100% en la solución del problema
4	Identifica relaciones entre los datos que no permite determinar proporcionalidad
5	Establece una relación diferente a la multiplicativa entre la constante de proporcionalidad y las magnitudes
6	Identifica proporcionalidad en situaciones no proporcionales
7	Destaca propiedades necesarias, pero no suficientes, para determinar la presencia de la proporcionalidad
8	Establece una relación diferente a la multiplicativa entre la unidad y las magnitudes
44	Halla el valor de la constante, pero la relaciona con datos diferentes a los proporcionados en la tarea
51	Relaciona la constante con las magnitudes por medio de la multiplicación, pero el valor de la constante es diferente al esperado en la tarea

1.4. Criterios de logro

En este apartado, presentamos las diferentes estrategias que un estudiante puede implementar al resolver una tarea asociada con la proporcionalidad directa. Denominamos estas estrategias como criterios de logro. Por ejemplo, un estudiante inicia la solución de una tarea al identificar los datos de esta, elige alguna representación y procedimiento y, finalmente, da una respuesta coherente. A continuación, presentamos estos criterios de logro junto con los errores, mediante los grafos de criterios de logro. Un grafo de criterios de logro es la representación gráfica del conjunto de las diferentes estrategias implementadas por el estudiante para resolver una tarea de aprendizaje que contribuyen a un objetivo de aprendizaje. Por ejemplo, el criterio de logro 1.7 “hallo el valor de la constante” está relacionado con el error 9 “emplea el algoritmo que no corresponde para determinar la constante de proporcionalidad” y el error 45 “halla el valor de la constante, pero es diferente al de la tarea”. En el anexo 2, presentamos los criterios de logro de ambos objetivos.

Grafos de criterios de logro

Presentamos en la figura 7 el grafo de criterios de logro del primer objetivo.

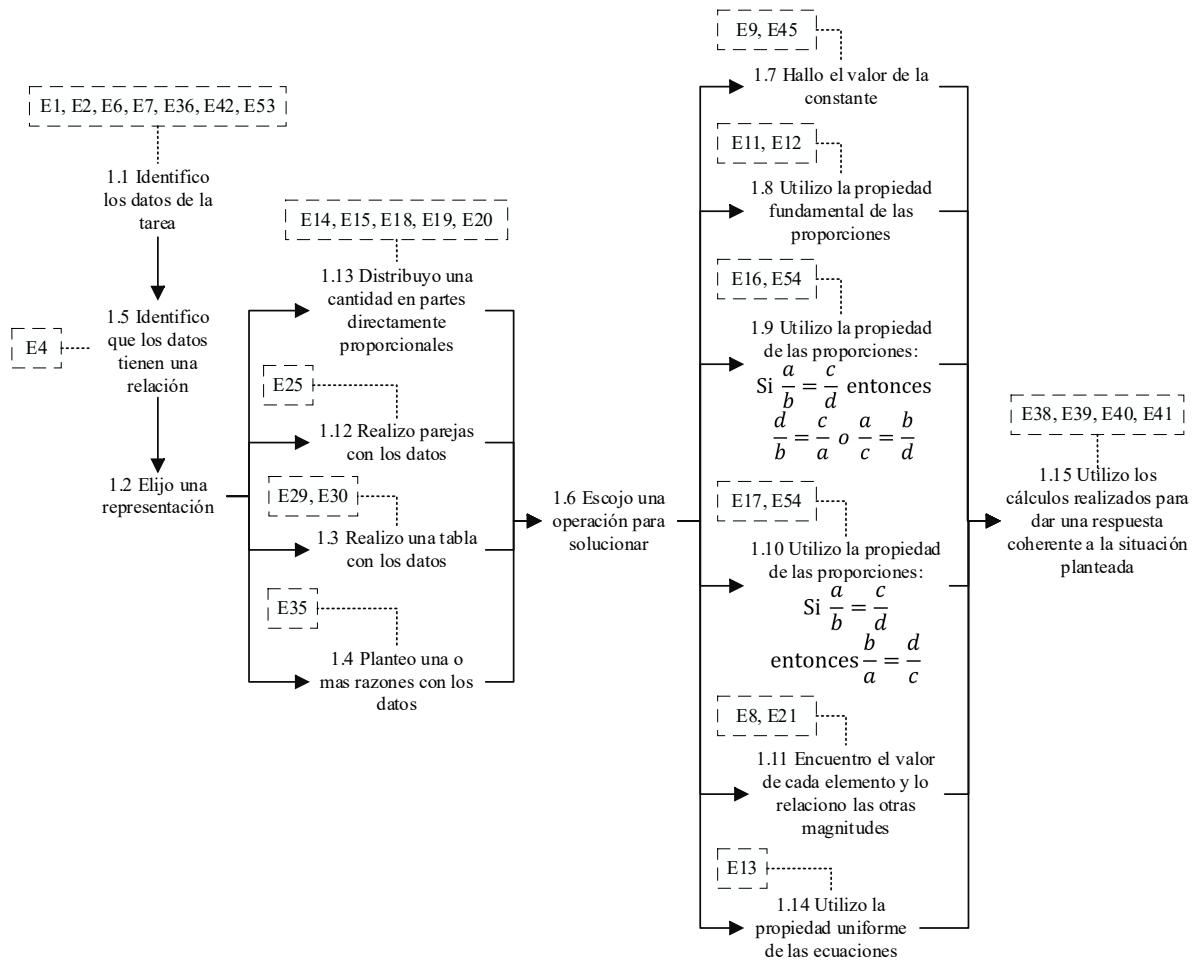


Figura 7. Grafo de criterios de logro del primer objetivo con sus errores asociados

En el desarrollo del primer objetivo, esperamos que los estudiantes inicialmente identifiquen los datos de la tarea y si estos presentan una relación. Luego, los estudiantes eligen una representación que puede ser tabular, por razones o por pares ordenados, para abordar el problema. Para continuar, escogen la operación que les permite resolver la tarea. Los estudiantes pueden elegir la aplicación de la propiedad fundamental, la determinación de la constante, la aplicación de alguna de las propiedades de la proporcionalidad directa, la determinación de la unidad o el uso de la propiedad uniforme de las ecuaciones. Finalmente, los estudiantes utilizan los cálculos realizados anteriormente para dar una respuesta coherente a la situación planteada. En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

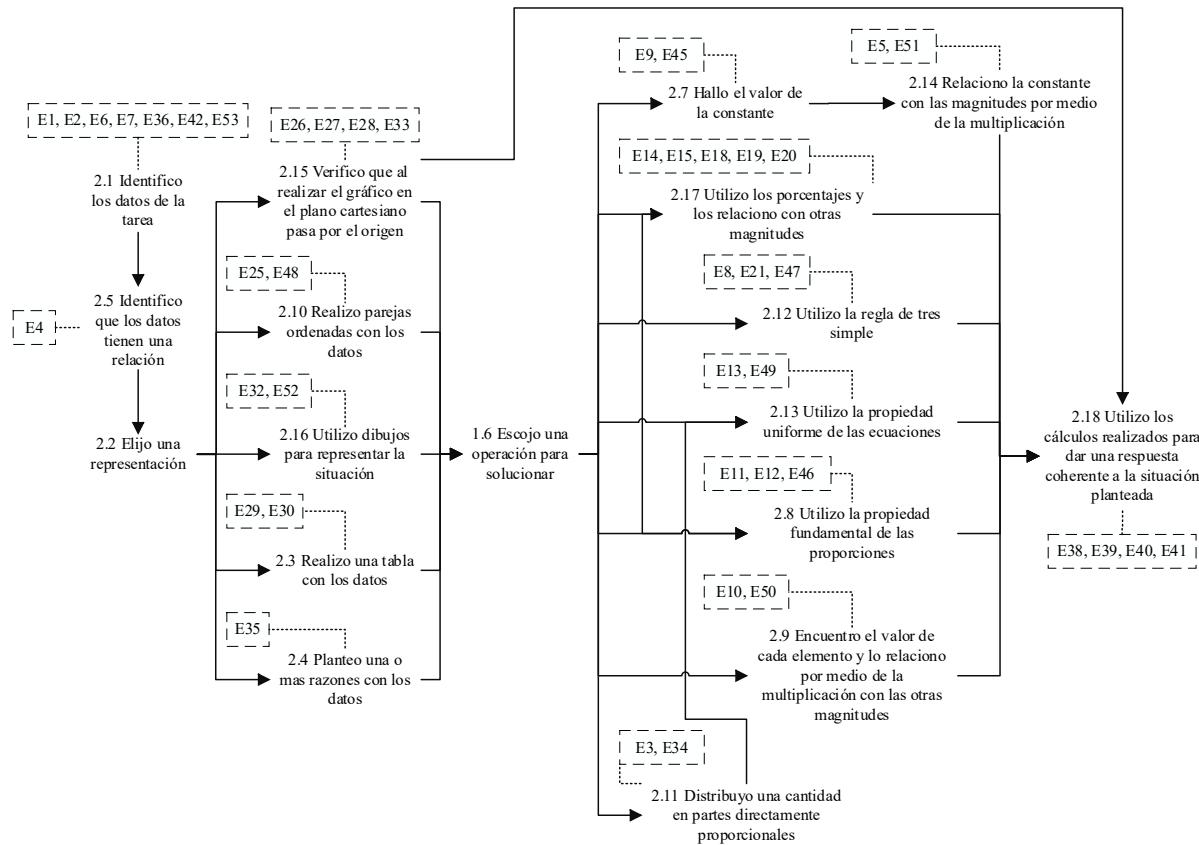


Figura 8. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo con sus errores asociados

Al igual que en el primer objetivo, en el desarrollo del segundo objetivo, los estudiantes parten de la identificación de los datos de la tarea y establecen si estos presentan alguna relación. Para continuar, los estudiantes deciden el sistema de representación a emplear. Pueden optar por el planteamiento de razones, la construcción de una tabla, el uso de dibujos, los pares ordenados o la gráfica. Luego, escogen la operación para solucionar la tarea. Los estudiantes pueden (a) determinar el valor de la constante y relacionarla con los valores de las magnitudes por medio de la multiplicación; (b) usar porcentajes y la relación con las magnitudes, para luego emplear la regla de tres, la propiedad uniforme de las ecuaciones o la propiedad fundamental de las proporciones; (c) usar la regla de tres; (d) usar la propiedad uniforme de las ecuaciones; (e) usar la propiedad fundamental de las proporciones; (f) determinar el valor de la unidad y relacionarlo por medio de la multiplicación con otras magnitudes; o (g) distribuir las cantidades en partes directamente proporcionales, para luego emplear la propiedad uniforme de las ecuaciones, la propiedad fundamental de las proporciones o el determinar el valor de la unidad. Finalmente, con los valores obtenidos del procedimiento que decidan, los estudiantes plantean una respuesta coherente a la situación presentada.

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, presentamos el esquema general de la unidad didáctica para el tema. Proponemos diez sesiones, cada una de 60 minutos. La primera sesión inicia con la implementación de la tarea diagnóstica. El propósito es identificar los conocimientos que poseen los estudiantes para comenzar la unidad didáctica con el propósito de determinar las debilidades y/o fortalezas de los estudiantes antes de su implementación (Gómez & Romero, 2018). Sugerimos que, en la segunda sesión, se retroalimente esta tarea para atender aquellos errores o dificultades relacionados con los conocimientos previos de los estudiantes. En las sesiones 1 y 2, el profesor implementa y retroalimenta la prueba diagnóstica. En las sesiones 3 a 5, el profesor ejecuta las tres tareas del objetivo 1. En las sesiones 6 y 7, se implementan las dos tareas del objetivo 2. Cada tarea tiene una meta y requisitos específicos, lo que lleva a que deban ser implementadas en el orden que establecimos, pues configuran una secuencia. Luego, proponemos dos sesiones para aplicar el examen final y hacer su retroalimentación. Finalmente, sugerimos una sesión de cierre con el fin de evaluar la implementación de la unidad didáctica en los aspectos cognitivos y afectivos con los estudiantes. En la tabla 3, presentamos la organización de las sesiones previstas para el desarrollo de la unidad didáctica.

Tabla 3
Esquema general de la unidad didáctica

Nº de sesión	Actividad	Tiempo aproximado
1	Implementación de prueba diagnóstica	60 min
2	Retroalimentación de la prueba diagnóstica	60 min
3	Presentación de la unidad didáctica y del primer objetivo de aprendizaje	10 min
3	Presentación de la meta de la tarea de aprendizaje 1.1 y su descripción	10 min
3	Desarrollo de la tarea de aprendizaje 1.1 por parte de los estudiantes de forma individual	20 min
4	Socialización y retroalimentación con todo el grupo de la tarea de aprendizaje 1.1	10 min
4	Presentación de la meta de la tarea de aprendizaje 1.2	5 min

Tabla 3
Esquema general de la unidad didáctica

Nº de sesión	Actividad	Tiempo aproximado
4	Descripción de la tarea de aprendizaje 1.2	10 min
4	Desarrollo de la tarea de aprendizaje 1.2 por parte de los estudiantes en parejas	20 min
4	Socialización y retroalimentación con las parejas y todo el grupo de la tarea de aprendizaje 1.2	10 min
5	Presentación de la meta de la tarea de aprendizaje 1.3	5 min
5	Descripción de la tarea de aprendizaje	10 min
5	Desarrollo de la tarea de aprendizaje 1.3 por parte de los estudiantes de forma individual y en ternas	30 min
5	Socialización y retroalimentación con las ternas y todo el grupo de la tarea de aprendizaje 1.3	10 min
6	Presentación del segundo objetivo de aprendizaje. Además, daremos a conocer la meta de la tarea de aprendizaje 2.1	10 min
6	Descripción de la tarea de aprendizaje 2.1	5 min
6	Desarrollo de la tarea de aprendizaje 2.1 por parte de los estudiantes de manera individual	30 min
6	Socialización y retroalimentación con todo el grupo de la tarea de aprendizaje 2.1	10 min
7	Presentación de la meta de la tarea de aprendizaje 2.2	2 min
7	Descripción de la tarea de aprendizaje	3 min
7	Desarrollo de la tarea de aprendizaje 2.2 por parte de los estudiantes de manera individual y por ternas	40 min
7	Socialización y retroalimentación con todo el grupo de la tarea de aprendizaje 2.2	10 min
8	Implementación del examen final	60 min
9	Socialización y retroalimentación del examen final con todo el grupo	60 min
10	Sesión de cierre	60 min

4. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos una de las tareas de evaluación de nuestra unidad didáctica. La tarea diagnóstica “tiene como función averiguar si los estudiantes manifiestan tener los conocimientos previos necesarios para comenzar la unidad didáctica” (Gómez & Romero, 2018, p. 14). Consideramos que, para la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes necesitan 12 conocimientos previos (anexo 3). Estos conocimientos previos están relacionados con los conceptos de magnitud, razón, proporción y correlación; con el planteamiento e interpretación de tablas y gráficos; y con las operaciones básicas entre números racionales. La tarea diagnóstica contiene nueve actividades en las que abordamos cada uno de los conocimientos previos. En la tabla 4, relacionamos los doce conocimientos previos y la actividad que lo evalúa. Por ejemplo, el conocimiento previo 5 “reconoce el concepto de proporción” será evaluado en la actividad 5.

Tabla 4

Relación de conocimientos previos del tema proporcionalidad directa con la tarea diagnóstica

CP	Descripción	Actividad que evalúa el CP
1	Reconoce el concepto de magnitud	1
2	Reconoce el concepto de razón	2 – 4
3	Identifica el antecedente de una razón	4
4	Identifica el consecuente de una razón	4
5	Reconoce el concepto de proporción	5
6	Determina el valor de una incógnita	1
7	Plantea la información de un problema por medio de una tabla	6
8	Interpreta la información de un problema que se presenta de una tabla	1 – 2 – 4
9	Plantea la información de un problema por medio de un gráfico	2
10	Interpreta la información de un problema que se presenta en un gráfico	8 – 9

Tabla 4

Relación de conocimientos previos del tema proporcionalidad directa con la tarea diagnóstica

CP	Descripción	Actividad que evalúa el CP
11	Conoce la noción de correlación	2 – 3
12	Operaciones básicas con números racionales	6 – 7
13	Calcula e interpreta porcentajes	9

Nota. CP = conocimientos previos.

A continuación, presentamos la formulación de las actividades de la tarea diagnóstica.

Resuelve las preguntas 1 a 3 de acuerdo con la siguiente información

Daniel contrata la empresa Mudanzas Seguras para realizar el trasteo de sus muebles a su nuevo apartamento. La cotización de la empresa se muestra a continuación.

Condiciones	Tarifa
Peso menor o igual a 200 kg	\$ 320.000
Peso mayor a 200 kg	\$ 320.000 más \$2.000 por cada kilogramo adicional.

1. Completa la siguiente tabla con los posibles pesos de la mudanza de Daniel.

Peso en kilogramo	Tarifa en miles de pesos
200	
	340
220	
230	
	400

2. Construye la representación gráfica.

3. ¿Identificas alguna relación o tendencia entre el peso y el valor de la mudanza?

Resuelve las preguntas 4 y 5 de acuerdo con la siguiente información

En una encuesta sobre el género de película favorito, se obtuvieron los datos que se muestran en la tabla.

Género de película	Frecuencia
Suspense	15
Animada	32
Acción	21
Comedia	17
Otro	7

4. ¿Cuál es la razón entre los encuestados que prefieren comedia y los encuestados que prefieren las películas animadas?

5. ¿Existe una proporción entre la razón de los encuestados que prefieren suspenso y el total de encuestados y la razón de los encuestados que prefieren películas animadas y los encuestados que prefieren otro y suspenso?

Resuelve las preguntas 6 y 7 de acuerdo con la siguiente información

En una carrera de velocidad, el tiempo de reacción es el tiempo que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el taco de salida. El tiempo final incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera. En la siguiente tabla, aparece el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores en una carrera de velocidad de 100 metros.

Corredor	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	No acabó la carrera
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

Tomado de: Instituto nacional de evaluación educativa, (s.f). Tiempo de reacción. Disponible en: <https://bit.ly/TiempoRespuesta>.

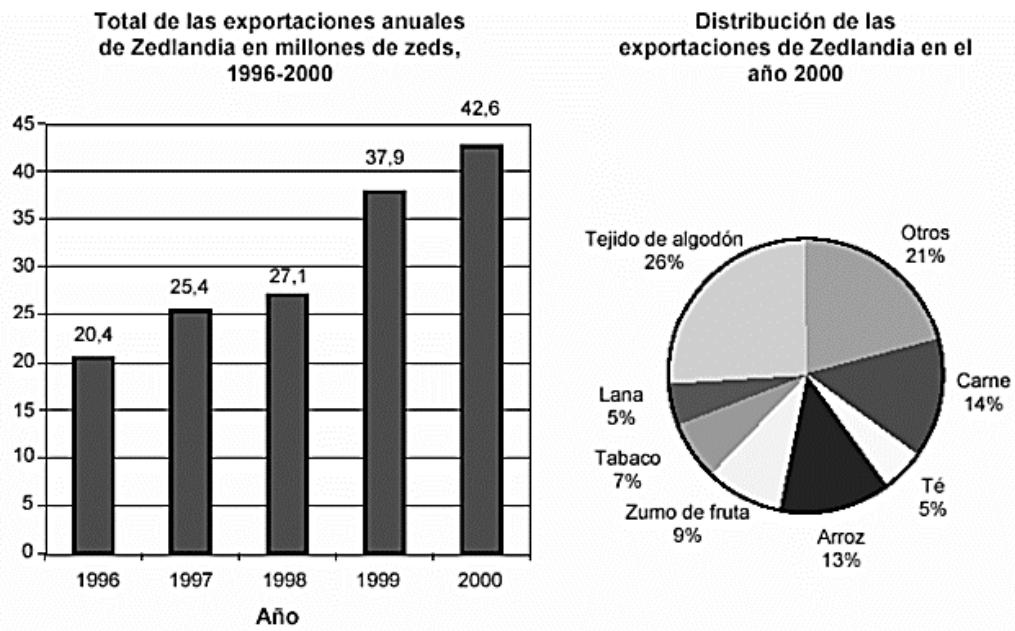
6. Identifica a los corredores que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la siguiente tabla con su número del corredor, su tiempo de reacción y su tiempo final.

Medalla	Corredor	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
Oro			
Plata			
Bronce			

7. Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos. Si el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, se considera que se ha producido una salida falsa porque el corredor tiene que haber salido antes de oír la señal. Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce hubiera sido menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

Resuelve las preguntas 8 y 9 de acuerdo con la siguiente información

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.



Tomado de: Instituto nacional de evaluación educativa, (s.f). Exportaciones. Disponible en: [43pisam_exportaciones_er \(educalab.es\)](http://43pisam_exportaciones_er (educalab.es))

8. ¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?
9. ¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?
 - A. 1,8 millones de zeds.
 - B. 2,3 millones de zeds.
 - C. 2,4 millones de zeds.
 - D. 3,4 millones de zeds.
 - E. 3,8 millones de zeds.

Sugerimos al profesor implementar de manera individual la tarea diagnóstica en una sesión de 60 minutos para luego ser retroalimentada en una sesión de igual duración. También, aconsejamos al profesor que, teniendo en cuenta las particularidades de los estudiantes, presente la actividad 9 con o sin opciones de respuesta y poner la unidad monetaria de su preferencia.

5. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL OBJETIVO 1

Las tareas de aprendizaje son aquellas actividades que propone el profesor “con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán” (Gómez et al., 2018, p. 2). En este apartado, presentamos las tres tareas propuestas para el objetivo 1. La primera tarea del objetivo —El buzo— está relacionada con el fenómeno denominado tiempo transcurrido y forma parte del contexto fenomenológico comparación. La segunda tarea —Dólar americano— corresponde al fenómeno de divisas y al contexto fenomenológico de transformación. La última tarea —Concurso— pertenece al fenómeno de repartos proporcionales y al contexto fenomenológico de distribuciones.

A continuación, realizamos la caracterización de cada tarea de aprendizaje al tener en cuenta los requisitos, aportes al objetivo, formulación, conceptos y procedimientos implicados, sistemas de representación involucrados, contextos PISA, materiales y/o recursos, agrupamiento, interacción y comunicación, y temporalidad. Así mismo, presentamos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver la tarea y las ayudas que pueden ayudar a superarlos, los grafos de criterios de logro, las sugerencias metodológicas y la evaluación de la tarea.

1. TAREA 1.1 EL BUZO

Con la primera tarea del objetivo, buscamos que los estudiantes reconozcan que existen situaciones en las que las magnitudes involucradas tienen una correlación directa. Esperamos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representación y al proceso matemático de emplear, dado que los estudiantes deben reconocer que, a mayor profundidad, la presión aumenta o disminuye. Además, pueden emplear la representación tabular o simbólica y usar los procedimientos de hallar la unidad o la constante de proporcionalidad. Así mismo, esperamos que los estudiantes tengan una disposición favorable para expresar la proporcionalidad directa (expectativa afectiva EA2).

1.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren de conocimientos acerca de las operaciones básicas con números racionales. Especialmente, los estudiantes deben saber dividir un número entero entre uno racional (decimal o fracción) o viceversa. Por lo anterior,

sugerimos como alternativa que los estudiantes conozcan cómo cambiar de la representación decimal a la fraccionaria.

1.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, esperamos que los estudiantes reconozcan las características principales de la proporcionalidad directa: las magnitudes correlacionadas tienen el mismo comportamiento (ambas aumentan o ambas disminuyen) y la razón entre las magnitudes es constante.

1.3. Formulación de la tarea

La formulación de la tarea está enmarcada en el contexto fenomenológico de comparación.

En un curso de buceo, Pedro aprendió que cada vez que aumenta su profundidad en el mar se añade cierta cantidad de atmosferas (atm) a la presión que ejerce el agua sobre los cuerpos sumergidos. Esta presión se llama presión hidrostática. Por ejemplo, si Pedro está a una profundidad de 25 m, la presión es de 2,5 atm. Y, si se encuentra a 73,5 m de profundidad, la presión es de 7,35 atm. ¿Cómo puedo establecer y verificar la relación entre la profundidad y la presión hidrostática?

1.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que involucra esta tarea son los de magnitudes directamente correlacionadas y constante de proporcionalidad. Los procedimientos que pueden realizar los estudiantes son dividir la profundidad entre la cantidad de atmosferas necesarias para sumergirse y/o establecer nuevas razones para evidenciar de una mejor manera que las magnitudes aumentan o disminuyen.

1.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes pueden optar por el sistema de representación tabular y ubicar los datos mencionados en la formulación de la tarea o unos nuevos datos. También, pueden usar el sistema de representación simbólico mediante el empleo de razones, proporciones y la constante de proporcionalidad.

1.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en el contexto personal del marco conceptual de PISA 2012, pues corresponde a un deporte o actividad recreativa que puede practicar el propio individuo, su familia y grupo de iguales.

1.7. Materiales y/o recursos

Sugerimos entregar a cada estudiante una hoja impresa con la tarea a desarrollar. También, puede ser posible proyectar la tarea si se cuenta con un recurso tecnológico. De igual manera, los estudiantes emplearán los recursos de uso diario como el lápiz, regla, tajalápiz y borrador. El profesor hará uso del tablero, marcador y borrador.

1.8. Agrupamiento, interacción y comunicación

En el desarrollo de esta tarea, esperamos que la comunicación e interacción predominante sea entre el profesor y los estudiantes. Se brindará un espacio de cinco minutos para que los estudiantes

compartan con el compañero de al lado las estrategias de solución implementadas para verificar si cada uno realizó un procedimiento diferente o igual y si obtuvieron o no el mismo resultado.

1.9. Temporalidad

Para iniciar, el profesor presenta el objetivo 1 y la meta de la tarea. Para continuar, el profesor indicará que los estudiantes tienen 20 minutos para solucionarla de forma individual. Luego, se concederán cinco minutos para que los estudiantes compartan las estrategias de solución. Finalmente, el profesor hace una puesta en común y retroalimenta la tarea con el grupo. Esta puesta en común consiste en realizar una lectura detallada de la formulación de la tarea por parte del profesor para identificar los datos o magnitudes involucradas y así escoger una representación y procedimiento para resolverla. En la tabla 5, sugerimos el tiempo estimado para desarrollar la tarea.

Tabla 5

Descripción de la temporalidad de la tarea T1.1 El buzo

	Actividad	Tiempo estimado
1	Presentación del primer objetivo y la meta de la tarea	10 min
2	Descripción de la formulación de la tarea T1.1 El buzo	5 min
3	Desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes de forma individual	20 min
4	Puesta en común de las estrategias usadas por los estudiantes con el compañero del lado en relación con los procedimientos y sistemas de representación usados	5 min
5	Retroalimentación mediante un debate con todo el grupo de la tarea	20 min

1.10. Errores y ayudas

Al tratar de resolver la tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de hacer una operación diferente a la división para encontrar la constante de proporcionalidad (E21). En este momento, el profesor le plantea al estudiante una situación en la que se deba aplicar la operación de la división. Otro error en el que pueden incurrir los estudiantes es destacar propiedades necesarias, pero no suficientes para determinar la presencia de la proporcionalidad (E7). Para ayudar a que los estudiantes superen este error, el profesor recuerda la importancia de reconocer las características de la proporcionalidad como el aumento o disminución de las magnitudes y que esa variación debe ser constante. También, preguntará si eso sucede con la profundidad y la presión. En el anexo 1, se encuentran los demás errores en los que puede incurrir los estudiantes. Las ayudas que puede brindar el profesor se encuentran en el anexo 4.

1.11. Grafos de criterios de logro de la tarea

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Bordeamos los criterios de logro que los estudiantes puede activar al tratar de resolver la tarea T1.1 El buzo.

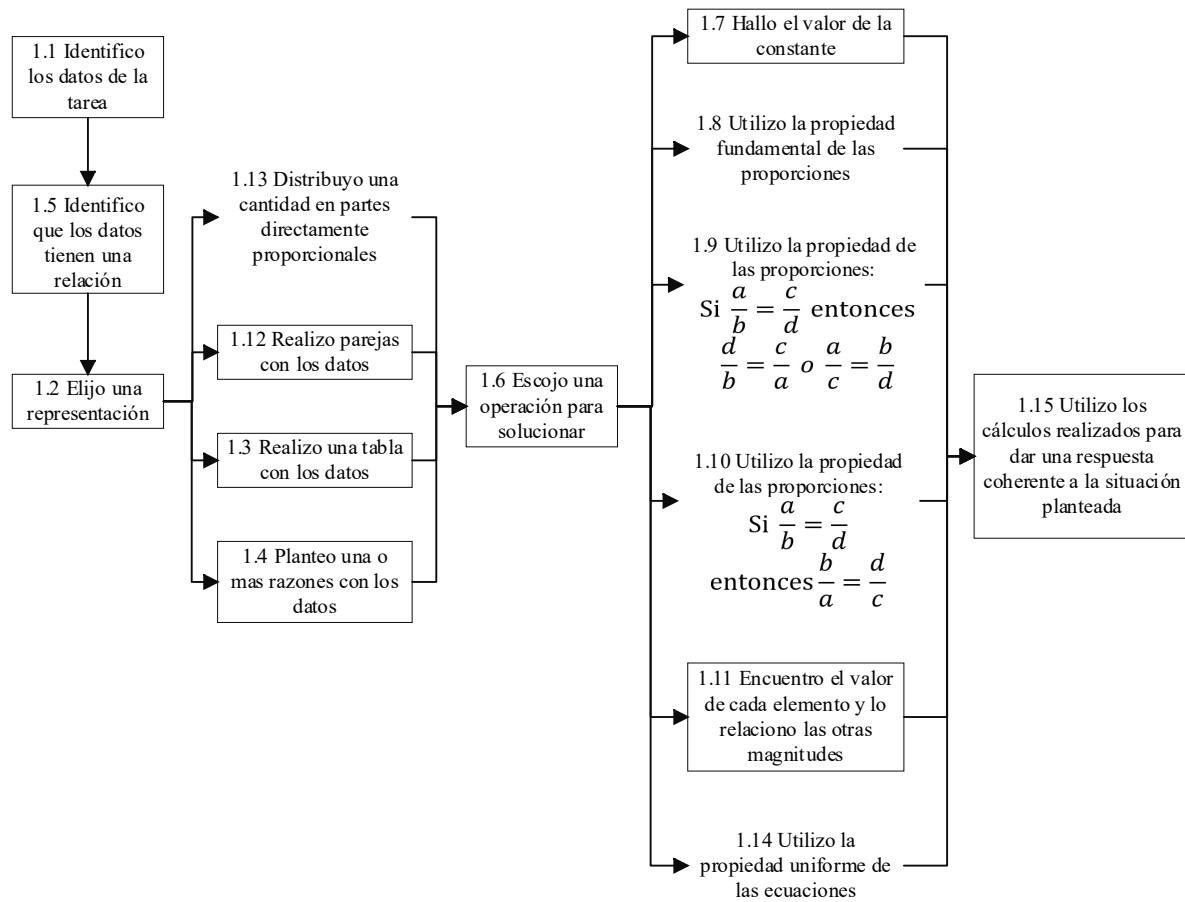


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje T1.1 El buzo

Para resolver la tarea, los estudiantes identifican los datos y su relación. Luego, pueden elegir una de tres representaciones (parejas, tablas o razones). Una vez elegida la representación, los estudiantes eligen la operación para solucionar la tarea. Los estudiantes pueden hallar la constante de proporcionalidad directa o encontrar el valor de cada elemento para relacionarlo con las magnitudes involucradas. Para finalizar, los estudiantes plantean una respuesta coherente con la situación planteada.

1.12. Actuación del profesor

El profesor debe procurar que cada estudiante resuelva la tarea propuesta para que pueda ser compartida con su compañero del lado. Además, hace un seguimiento al procedimiento realizado para determinar si están incurriendo en algún error para brindar la ayuda respectiva. Luego de que los estudiantes comparten su solución, el profesor interviene haciendo preguntas para que algunos de ellos expongan la forma en que resolvieron la tarea. También, puede hacer preguntas a los estudiantes para indagar u orientar por los métodos de solución y la representación a usar. En la puesta en común, el profesor da la palabra a los estudiantes para que den a conocer las diferentes estrategias de solución.

1.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos que el profesor muestre videos asociados al buceo para contextualizar la tarea y promover las expectativas afectivas propuestas y descritas en el apartado anterior. Además, el profesor puede usar las ayudas expuestas en el anexo 4, para que los estudiantes puedan superar los errores en los que puedan incurrir. El profesor debe jugar el papel de moderador en el momento en el que se hace la puesta en común con el grupo. Además, proporciona ejemplos de preguntas que pueden hacer los estudiantes para promover la comunicación entre ellos. Por ejemplo, los estudiantes pueden preguntarse ¿qué datos y/o magnitudes identificó?, ¿las magnitudes aumentan o disminuyen?, ¿encontró si las magnitudes aumentaban o disminuían de forma constante? o ¿qué operación o procedimiento utilizó?

1.14. Evaluación de la tarea

El producto de esta tarea es una hoja con los procedimientos realizados por los estudiantes. A partir de lo expuesto en estas hojas, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en los que incurrieron los estudiantes, los procedimientos correctos y los sistemas de representación usados. Igualmente, el profesor puede establecer una rúbrica a partir del listado de errores (anexo 1), al clasificarlos en aquellos errores que le impiden al estudiante continuar con la tarea o aquellos errores que, aunque le permiten continuar con la tarea, no obtiene una respuesta correcta. Y así, el profesor puede evaluar cuantitativamente el alcance del objetivo de la tarea.

2. TAREA 1.2 DÓLAR AMERICANO

Con la segunda tarea del objetivo 1, esperamos aportar en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de representación, al diseño de estrategias para resolver problemas y al proceso matemático de emplear. Así mismo, esperamos que los estudiantes tengan una disposición favorable para expresar y comunicar la solución a una situación de proporcionalidad directa (expectativas afectivas EA2 y EA3). Los estudiantes deben reconocer que, para que exista una situación de proporcionalidad directa, se debe cumplir que las magnitudes tienen correlación directa y existe una constante de proporcionalidad. Prevemos que los estudiantes establezcan una igualdad entre razones o hagan parejas con los datos y verifiquen si esta igualdad es o no una proporción.

2.1. Requisitos

Esta tarea requiere que los estudiantes tengan conocimiento sobre el concepto de razón y proporción junto con sus elementos. Además, los estudiantes deben contar con las habilidades para desarrollar operaciones básicas como la división o multiplicación.

2.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes reconozcan las características necesarias para determinar si existe una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Los estudiantes emplearán las propiedades que emergen de esta.

2.3. Formulación de la tarea

La formulación de la tarea está enmarcada en el contexto fenomenológico de transformación.

Marcos fue el lunes al Banco de la República a cambiar unos dólares que tenía guardados en casa y le dieron 1 023 USD por \$ 3 255 186. Angélica fue con Marcos el miércoles a cambiar unos dólares que trajo de su viaje. Por 1 000 USD, le dieron \$3 773 000. Justifica por qué la situación no corresponde a una de proporcionalidad directa.

2.4. Conceptos y procedimientos implicados en el tema

Los conceptos implicados en el desarrollo de la tarea son el de razón y proporción, junto con sus elementos, además del concepto de constante de proporcionalidad directa. Los procedimientos que se tienen en cuenta son el de la propiedad fundamental de las proporciones y la determinación de la unidad por medio de la división.

2.5. Sistemas de representación que se activan

En la tarea, tenemos en cuenta los sistemas de representación simbólico, verbal y numérico. Los estudiantes plantearán la razón y la proporción con las cantidades para los dólares y pesos de Marcos y Angélica.

2.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se enmarca en un contexto fenomenológico de transformación, específicamente en el fenómeno de divisas. Por esta razón, decidimos asociarla con el contexto social propuesto en el marco conceptual de PISA 2012.

2.7. Materiales y/o recursos

Para el desarrollo de esta tarea, se le entregará a cada pareja de estudiantes una hoja con la formulación. Además, cada estudiante hará uso de su cuaderno y lápiz. El profesor necesitará el tablero, marcadores y proyectará las propiedades de la proporcionalidad directa con ayuda del video beam o televisor. De no contar con estos recursos tecnológicos, el profesor podrá escribir en el tablero estas propiedades. Esto último, tiene como fin que los estudiantes recuerden el planteamiento de estas propiedades.

2.8. Agrupamiento, interacción y comunicación

El profesor propone que el trabajo se realice en parejas. De igual manera, el profesor pasará en algunos momentos por cada pareja para responder preguntas de los estudiantes. Cada pareja deberá determinar el sistema de representación a utilizar y el procedimiento algebraico que les permitirá solucionar la tarea. El profesor, al revisar el trabajo de las parejas, también puede indagar sobre las estrategias empleadas por las diferentes parejas. Una vez que todas las parejas hayan solucionado la situación, comenzará otro tipo de interacción. Algunas parejas darán a conocer a sus compañeros la forma en que solucionaron la situación. Para esto se realizará una rifa. Para facilitar la puesta en común, un estudiante registrará en el tablero las diferentes alternativas de solución en un cuadro comparativo.

2.9. Temporalidad

Para el desarrollo de la tarea se tiene previsto una sesión de 60 minutos. En los 15 minutos iniciales, el profesor presenta al gran grupo la meta de la tarea, su descripción, al leer su formulación, y la forma de trabajo. Luego, se da paso al desarrollo de esta tarea en parejas. Para continuar, se hace

una puesta en común y se retroalimenta la tarea inicialmente en las parejas y luego en el gran grupo. En la tabla 6, presentamos la descripción de la temporalidad de la tarea.

Tabla 6

Descripción de la temporalidad de la tarea T1.2 dólar americano

	Actividad	Tiempo estimado
1	Recordar a los estudiantes el objetivo de las tareas que se están desarrollando, presentación de la meta de la tarea T1.2 Dólar americano	15 min
2	Lectura de la formulación de la tarea por parte de un estudiante	10 min
3	Desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes en parejas	20 min
4	Socialización y retroalimentación con las parejas	5 min
5	Socialización y retroalimentación con todo el grupo de la tarea de aprendizaje por medio de una puesta en común	10 min

2.10. Errores y ayudas

Al momento de desarrollar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en varios errores. Por ejemplo, los estudiantes pueden destacar propiedades necesarias, pero no suficientes para determinar la presencia de la proporcionalidad directa (E7). En este momento, el profesor puede preguntarle al estudiante qué ocurre con la cantidad de dólares, si Marcos o Angélica poseen más cantidad de dinero en pesos, o qué ocurre con la cantidad de pesos, si Marcos o Angélica poseen menos cantidad de dinero en pesos. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 1 y el de ayudas en el anexo 4.

2.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje. Bordeamos los criterios de logro que los estudiantes pueden activar al resolver la tarea.

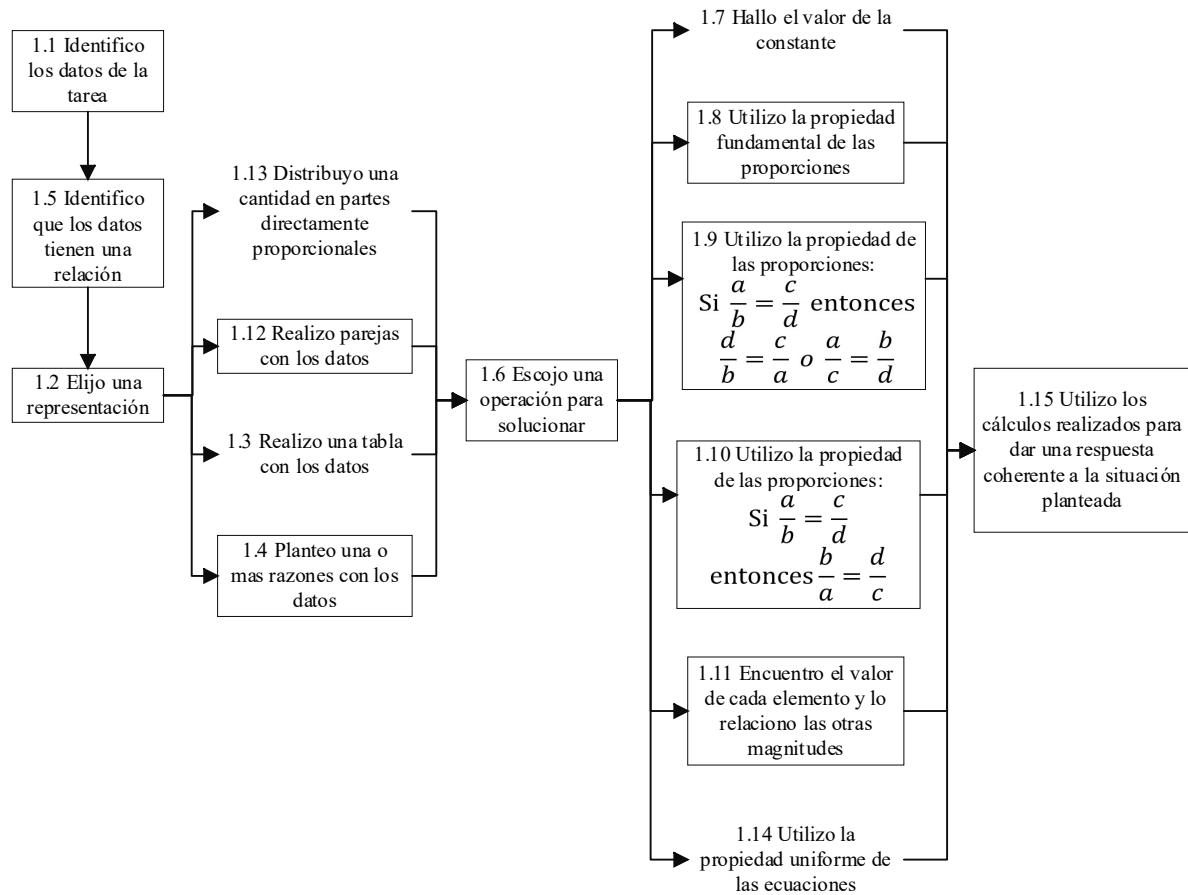


Figura 10. Grafo criterios de logro tarea de aprendizaje T1.2 Dólar americano

Para resolver la tarea, los estudiantes identifican los datos y la relación entre ellos. Luego, escogen plantear una o más razones, o las parejas ordenadas. Continúan con la elección de la operación a realizar. Los estudiantes usan la propiedad fundamental de las proporciones, la propiedad si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ o $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, la propiedad si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ o la determinación del valor de la unidad para relacionarla con las magnitudes. Finalmente, los estudiantes utilizan los cálculos realizados para dar una respuesta coherente con la formulación de la tarea.

2.12. Actuación del profesor

Al iniciar, el profesor debe dar a conocer la meta de la tarea y las indicaciones relacionadas con la forma a trabajar durante la clase. Cuando los estudiantes se encuentren en parejas, el profesor debe estar atento a las inquietudes que puedan presentar en el desarrollo de la tarea. Al momento de realizar la puesta en común, el profesor generará un espacio en el que algunas parejas podrán dar a conocer cómo desarrollaron la tarea. Finalmente, el profesor realiza la retroalimentación en la que resalta los procedimientos correctos de cada pareja de estudiantes al momento de desarrollar la tarea.

2.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos al profesor proporcionar un espacio de iniciación suficiente para que los estudiantes logren comprender la formulación de la tarea. De igual manera, se le recomienda estar atento a los errores que los estudiantes pueden incurrir al momento de solucionar la tarea con el fin de plantear la ayuda adecuada. También, proponemos que el profesor plantee preguntas relacionadas con el sistema de representación, el procedimiento que emplea cada pareja y el aprovechamiento del contexto en el que se enmarca la tarea. Por ejemplo, el profesor podría preguntar a los estudiantes ¿por qué creen que es mejor un procedimiento y no otro?, ¿por qué creen que es mejor usar esta representación?, ¿qué piensan de los procedimientos o representaciones de determinada pareja?, ¿quién está de acuerdo con los procedimientos o representaciones de determinada pareja?, ¿qué otra pareja usó este procedimiento o representación?, ¿cómo se puede relacionar la tarea con el precio del dólar actual? o ¿cómo se determina quien obtuvo la mejor tasa de cambio?

2.14. Evaluación de la tarea

Para evaluar la tarea, proponemos que el profesor, además de tener en cuenta el proceso empleado por cada pareja para solucionarla, plante una valoración superior a aquellas parejas que empleen los criterios de logro en los que se emplean las propiedades de la proporcionalidad (CdL1.8, CdL1.9, CdL1.10 y CdL1.11).

3. TAREA 1.3 CONCURSO

Con la última tarea del objetivo 1, esperamos que los estudiantes establezcan la constante de proporcionalidad. La tarea está enmarcada en una situación de competición o certamen. Prevemos que los estudiantes puedan identificar que existe un reparto directamente proporcional entre la cantidad de preguntas correctas y el dinero recibido por ellas. Pretendemos aportar, en mayor medida, a la capacidad matemática fundamental de representar y al proceso matemático de emplear. Los estudiantes deben interpretar que cada pregunta correcta tiene un valor determinado y relacionarlo con la cantidad de preguntas correctas de cada concursante. Así mismo, esperamos que los estudiantes tengan una disposición favorable para expresar y comunicar la solución a una situación de proporcionalidad directa (expectativas afectivas EA2 y EA3).

3.1. Requisitos

La tarea sugiere utilizar el conocimiento formal que los estudiantes han adquirido con el desarrollo de las tareas anteriores sobre las propiedades de la proporcionalidad, las magnitudes directamente correlacionadas, el empleo de la propiedad uniforme de las ecuaciones y los pares ordenados.

3.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con la tarea, pretendemos que los estudiantes establezcan diferentes estrategias para reconocer las características y propiedades de la proporcionalidad directa, hallar la constante de proporcionalidad directa y hacer repartos directamente proporcionales.

3.3. Formulación de la tarea

La formulación de esta tarea está enmarcada en el contexto fenomenológico de distribución.

En un concurso de 62 preguntas, se repartirán proporcionalmente \$ 10 850 000 entre sus dos concursantes. Juan acertó 37 veces y Ana 25. ¿Cómo se puede establecer alguna relación entre la cantidad de dinero y la cantidad de aciertos de Juan y Ana para que su reparto se proporcional? Justifica tu respuesta.

3.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

En esta tarea, los estudiantes relacionan las magnitudes para hallar la constante de proporcionalidad. Además, los estudiantes aplican la noción de reparto proporcional y usan operaciones básicas (adición y división).

3.5. Sistemas de representación que se activan

En la tarea, los estudiantes pueden elegir representar la cantidad de preguntas contestadas correctamente y su relación con las ganancias por medio de razones, parejas ordenadas y/o tablas.

3.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea corresponde al contexto personal de acuerdo con el marco de evaluación PISA 2012 porque se relaciona a las actividades propias de los estudiantes, su familia y grupo de iguales.

3.7. Materiales y/o recursos

Para la tarea, los estudiantes requieren una hoja con la formulación, cuaderno y lápiz. El profesor requiere del tablero, marcadores y, en lo posible, un medio para mostrar las propiedades de la proporcionalidad directa.

3.8. Agrupamiento, interacción y comunicación

Para la solución de la tarea, el profesor interactúa con el gran grupo para identificar los datos. En seguida, los estudiantes conformarán grupos de tres personas con el objetivo de seleccionar el sistema de representación y procedimiento a usar. Además, la terna de estudiantes escogerá un representante para exponer al gran grupo la estrategia usada. Esta agrupación permite que los estudiantes establezcan diferentes estrategias para resolver la tarea.

3.9. Temporalidad

Para el desarrollo de la tarea, estimamos 60 minutos. El profesor inicia con un corto diálogo para recordar las propiedades de la proporcionalidad que pueden ser proyectadas o escritas en el tablero. Después, el profesor presenta la formulación de la tarea a desarrollar. El profesor entrega la hoja con la formulación a los estudiantes o copia la tarea en el tablero para identificar con los estudiantes sus datos. Así, da paso a que los estudiantes formen grupos de tres para que expresen sus ideas en una estrategia de solución. Para continuar, el profesor da paso a la puesta en común y retroalimentación de la tarea a modo de debate, en el que el moderador será un estudiante que escoja el profesor. Presentamos en la tabla 7 el tiempo estimado de cada actividad de la tarea.

Tabla 7
Descripción de la temporalidad de la tarea T1.3 concurso

	Actividad	Tiempo estimado
1	Recordar el objetivo 1 y presentar la meta de la tarea T1.3 Concurso	10 min
2	Descripción de la tarea	10 min
3	Identificar los datos de la tarea con la participación del profesor	10 min
4	Desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes en ternas, deben debatir lo que realizaron de manera individual y escoger la estrategia que consideren más apropiada	20 min
5	Puesta en común y retroalimentación de la tarea por medio de un debate	10 min

3.10. Errores y ayudas

En esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de usar algoritmos diferentes a los establecidos en la propiedad uniforme de las ecuaciones (E13). Con motivo de esto, el profesor puede escribir o mencionar en voz alta que lo que se hace en el miembro izquierdo de una ecuación también debe hacerse en el miembro derecho. El listado completo de errores y ayudas se encuentra en los anexos 1 y 4, respectivamente.

3.11. Grafos de criterios de logro de la tarea

Para resolver la tarea, en primer lugar, los estudiantes identifican datos como la cantidad de preguntas, el dinero y los jugadores. Luego, los estudiantes analizan si los datos tienen alguna relación. En otras palabras, los estudiantes identifican que, a más preguntas contestadas correctamente por el concursante, este ganará más dinero. Posteriormente, los estudiantes deciden cómo representar la solución de la tarea por medio de una tabla, pares ordenados, razones o proporciones. En cualquiera de los casos, los estudiantes utilizan la propiedad uniforme de las ecuaciones, la propiedad fundamental de las proporciones o la razón entre las magnitudes. Finalmente, los estudiantes dan una respuesta que se relaciona con la situación planteada. En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. En este grafo, bordeamos los criterios de logro que los estudiantes puede activar al resolver la tarea.

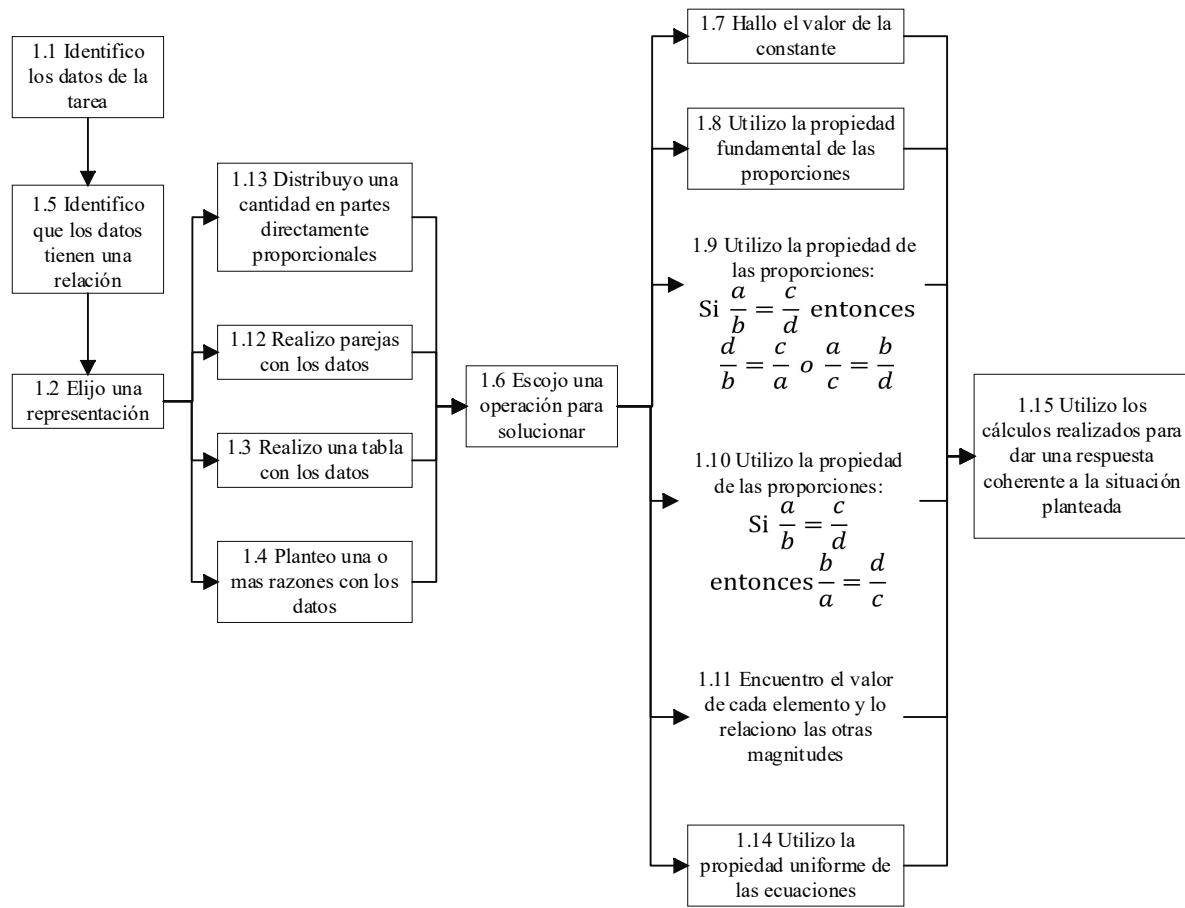


Figura 11. Grafo criterios de logro de la tarea de aprendizaje T1.3 Concurso

3.12. Actuación del profesor

El profesor entrega una hoja impresa o escribe en el tablero la formulación de la tarea. Después, presenta la tarea y organiza a los estudiantes de manera individual para identificar los datos. A continuación, el profesor puede establecer los grupos al azar o tener preestablecidos los grupos de tres personas y observar el trabajo de cada grupo para proporcionar las ayudas necesarias a los estudiantes (anexo 4). Mientras los estudiantes desarrollan la tarea, el profesor también puede plantear preguntas al gran grupo o a las ternas como las siguientes: ¿por qué creen que el dinero entregado es proporcional a las preguntas contestadas correctamente?, ¿es posible predecir el dinero que recibirá el participante que conteste la mayor cantidad de preguntas de forma correcta?, ¿de qué manera pueden describir la estrategia de solución para que sus compañeros la comprendan? o ¿en qué se fijan para poder asegurar que la solución a la tarea sea correcta? Para finalizar, el profesor debe verificar que los estudiantes registren el procedimiento que utilizaron para resolver la tarea.

3.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos que el profesor pase constantemente por los diferentes grupos para verificar el trabajo y apoyar a los estudiantes en caso de ser necesario con las ayudas. También, sugerimos que el profesor, en caso de contar con el tiempo, use la aplicación TypeForm (<https://www.typeform.com/templates/es/t/juego-de-preguntas-y-respuestas-online/>) para motivar a los estudiantes por medio de un concurso de preguntas y respuestas enmarcadas en los conocimientos que han adquirido hasta el momento.

3.14. Evaluación de la tarea

Para evaluar la tarea, proponemos que el profesor tenga en cuenta los procedimientos empleados por cada estudiante. También, puede valorar con una puntuación mayor a las ternas que hallen la constante (CdL1.7), utilicen la propiedad fundamental (CdL1.8) o la utilicen la propiedad uniforme de las ecuaciones (CdL1.14).

6. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL OBJETIVO 2

En este apartado, presentamos las dos tareas de aprendizaje del objetivo 2. La primera tarea de este objetivo —T2.1 Las bicicletas— está asociada al fenómeno de porcentajes y la segunda tarea —T2.2 El oso negro— corresponde al fenómeno de tiempo transcurrido. Ambas tareas pertenecen al contexto fenomenológico de comparación.

A continuación, realizamos la caracterización de cada tarea de aprendizaje, exponemos sus requisitos, aportes al objetivo, formulación, conceptos y procedimientos implicados, sistemas de representación involucrados, contextos PISA, materiales y/o recursos, agrupamiento, interacción y comunicación, y temporalidad. Así mismo, presentamos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver las tareas y sus respectivas ayudas para poder superarlos, los grafos de criterios de logro, las sugerencias metodológicas y la evaluación de la tarea.

1. TAREA 2.1 LAS BICICLETAS

Con la primera tarea del objetivo 2, buscamos que los estudiantes reconozcan que existen diferentes procedimientos para solucionar situaciones de proporcionalidad directa. Esperamos que los estudiantes empleen el concepto de porcentaje en una situación que se enmarca en una tienda con diferentes tipos de bicicletas y utilicen la regla de tres simple directa para solucionar la tarea. Pretendemos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representar y al proceso matemático de emplear. Los estudiantes deben relacionar cada porcentaje con un total de bicicletas y utilizar distintas representaciones para solucionar la tarea. Así mismo, esperamos que los estudiantes tengan una disposición favorable para expresar situaciones de proporcionalidad directa (expectativa afectiva EA2).

1.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren de conocimientos sobre la propiedad fundamental de las proporciones, la propiedad uniforme de las ecuaciones y la noción del cálculo de porcentajes.

1.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, esperamos que los estudiantes aprendan a calcular porcentajes por medio del uso de la regla de tres simple directa para determinar un valor desconocido.

1.3. Formulación de la tarea

La formulación de la tarea está enmarcada en el contexto fenomenológico de comparación.

En la tienda ¡Go Pao Go!, especializada en bicicletas y artículos para mujeres, hay una sección de bicicletas de diferentes tipos, una de repuestos y una de indumentaria. La sección de bicicletas está distribuida proporcionalmente en porcentajes de acuerdo con su tipo: 25% para bicicletas de montaña, 40% para bicicletas de paseo y el restante para bicicletas de carrera. En cada lote que adquieren los dueños del local, se reciben bicicletas de todo tipo de acuerdo con los porcentajes anteriores. ¿Cuántas bicicletas de cada tipo se exhibirán si se recibe un lote de 80 bicicletas?

1.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que involucra esta tarea son los de magnitudes directamente proporcionales, proporción y propiedad fundamental de las proporciones. Los procedimientos que realizan los estudiantes son establecer la proporción del porcentaje total, el porcentaje de bicicletas de cada tipo, la cantidad de bicicletas que llega en el lote y la cantidad desconocida.

1.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes pueden optar por el sistema de representación tabular, ubicar en una columna o fila los porcentajes y en otra columna o fila la cantidad de bicicletas, y estipular una letra a los valores que desconoce. También, los estudiantes pueden usar el sistema de representación simbólico mediante el empleo de proporciones y el símbolo de porcentaje.

1.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en un contexto profesional del marco conceptual de PISA 2012, pues aborda la labor de un local que debe organizarse de acuerdo con los diferentes tipos de bicicletas que vende.

1.7. Materiales y/o recursos

Sugerimos entregar a cada estudiante una hoja impresa con la formulación de la tarea a desarrollar. También, el profesor puede proyectar la tarea si cuenta con un recurso tecnológico. De igual manera, los estudiantes emplearán los recursos de uso diario como el lápiz, regla, tajalápiz y borrador. El profesor hará uso del tablero, marcador y borrador.

1.8. Agrupamiento, interacción y comunicación

La tarea se desarrolla de forma individual, por lo que la comunicación e interacción predominante es entre el profesor y los estudiantes. Sugerimos momentos en los que el profesor intervenga con el gran grupo para identificar entre los estudiantes los sistemas de representación que emplean o resolver dudas relacionadas con la identificación de los datos o procedimientos. Al finalizar, el profesor invita a algunos estudiantes a compartir la estrategia de solución con sus compañeros.

1.9. Temporalidad

Para iniciar, el profesor presenta el objetivo 2 y la meta de la tarea. Para continuar, el profesor relaciona las clases previas con la sesión actual y recuerda tanto la propiedad fundamental de las proporciones como el cálculo de porcentajes por medio de un ejemplo. Luego, el profesor indicará que los estudiantes tienen 20 minutos para solucionar la tarea individualmente. Por último, los estudiantes discuten la tarea con todo el grupo. Esta discusión consiste en que algunos estudiantes comparten su estrategia de solución y se establece si algún otro estudiante usó la misma estrategia u observa algún error en lo expuesto por su compañero. En la tabla 7, presentamos la descripción de la temporalidad de la tarea.

Tabla 7

Descripción de la temporalidad de la tarea T2.1 Las bicicletas

	Actividad	Tiempo estimado
1	Presentación del objetivo 2 y la meta de la tarea T2.1 Las bicicletas	5 min
2	Descripción de la formulación de la tarea	10 min
3	Desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes de forma individual	30 min
4	Discusión de las estrategias usadas por los estudiantes con el gran grupo en relación con los procedimientos usados	15 min

1.10. Errores y ayudas

Al resolver la tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de excluir o adicionar algún dato al interpretar inicialmente el problema (E36). En este momento, el profesor puede solicitarle a un estudiante que lea en voz alta la tarea y que sus compañeros vayan extrayendo los datos. Otro error en el que pueden incurrir los estudiantes es sumar los antecedentes y los consecuentes de las razones entre sí para verificar la propiedad fundamental de la proporcionalidad directa (E11). Para ayudar a que los estudiantes superen este error, el profesor rememora la relación multiplicativa entre extremos y medios al momento de aplicar la propiedad fundamental de las proporciones. Mostramos en el anexo 1 los demás errores en los que puede incurrir los estudiantes y, en el anexo 4, las ayudas que puede brindar el profesor.

1.11. Grafos de criterios de logro de la tarea

En la figura 13, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Bordeamos los criterios de logro que los estudiantes puede activar al resolver la tarea.

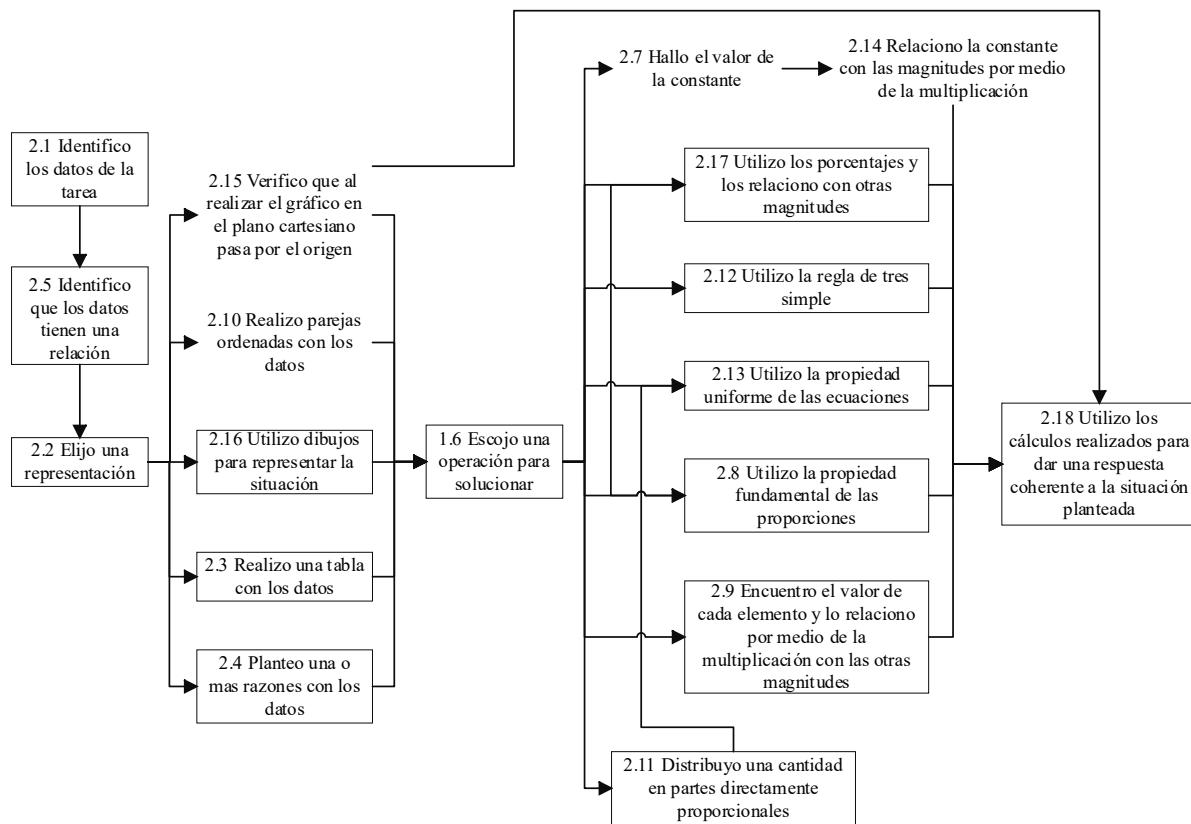


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje 2.1 Las bicicletas

Para resolver la tarea, los estudiantes reconocen los datos y su relación. Luego, eligen una de entre tres representaciones (dibujos, tablas o razones). Una vez elegida la representación, los estudiantes eligen la operación para solucionar la tarea. Creemos que los estudiantes pueden utilizar los porcentajes, distribuir en partes directamente proporcionales, utilizar la regla de tres simple directa, la propiedad uniforme de las ecuaciones, la propiedad fundamental o encontrar el valor de un elemento. Para finalizar, los estudiantes plantean una respuesta coherente con la situación planteada.

1.12. Actuación del profesor

El profesor debe procurar que cada estudiante resuelva la tarea propuesta para que pueda ser discutida con el gran grupo. El profesor puede escoger, con el gran grupo, el o los sistemas de representación para solucionar la tarea. Además, si el profesor identifica que varios estudiantes incurren en diferentes errores, puede usar de las ayudas de la tarea (anexo 4) con el gran grupo o cuestionarlos en si la estrategia que usan es la adecuada o es la única forma en que puede hacerse. Por último, el profesor da la palabra a aquellos estudiantes que de manera voluntaria quieran pasar al tablero para exponer su estrategia de solución, para identificar qué otros estudiantes recurrieron a la misma estrategia y discutir sobre los posibles errores en los que incurrieron.

1.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos al profesor usar las ayudas expuestas en el anexo 4 para que los estudiantes superen los errores en los que puedan incurrir. El profesor debe jugar el papel de moderador en el momento en el que se discuten las estrategias de solución. Para favorecer la comunicación entre los estudiantes, puede preguntar ¿quién utilizó el mismo procedimiento?, ¿quién obtuvo el mismo resultado?, ¿quién obtuvo un resultado diferente con el mismo procedimiento? o ¿qué creen que pasó para que su compañero obtuviera un resultado diferente? Por otro lado, el profesor puede recordar con ejemplos el uso de los diferentes procedimientos que los estudiantes pueden usar en la tarea.

1.14. Evaluación de la tarea

El producto de esta tarea es la discusión que se da al final de la sesión. Antes de iniciar la discusión, los estudiantes deben presentar al profesor una hoja con los procedimientos realizados. A partir de lo expuesto en estas hojas, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en que incurrieron los estudiantes, los procedimientos correctos y los sistemas de representación usados. Igualmente, el profesor puede establecer una rúbrica a partir del listado de errores (anexo 1), al clasificarlos en aquellos errores que le impiden al estudiante continuar con la tarea o aquellos errores que, aunque le permiten continuar con la tarea, no le permiten obtener una respuesta correcta. También, el profesor puede asignar un puntaje mayor a aquellos estudiantes que hicieron uso correcto de la regla de tres, pues este procedimiento es el aporte al objetivo que esperamos con esta tarea.

2. TAREA 2.2 OSO NEGRO

Con la segunda tarea del objetivo 2, buscamos que los estudiantes reconozcan que existen diferentes formas de representar la proporcionalidad directa que permiten modelar la situación. Pretendemos que los estudiantes interpreten las características de la proporcionalidad directa que fueron trabajadas en el primer objetivo y entiendan que la proporcionalidad no solo se da en situaciones en las que las magnitudes aumentan sino también en situaciones en las que las magnitudes disminuyen. Los estudiantes observarán que estas situaciones se pueden analizar por medio de un gráfico. Esperamos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representar y al proceso matemático de emplear. Los estudiantes deben interpretar la información suministrada en la gráfica para utilizar distintas representaciones. Así mismo, esperamos que los estudiantes tengan una disposición favorable para expresar situaciones de proporcionalidad directa (expectativa afectiva EA1).

2.1. Requisitos

Los estudiantes deben conocer el concepto de proporcionalidad directa, e interpretar y construir gráficos en el plano cartesiano.

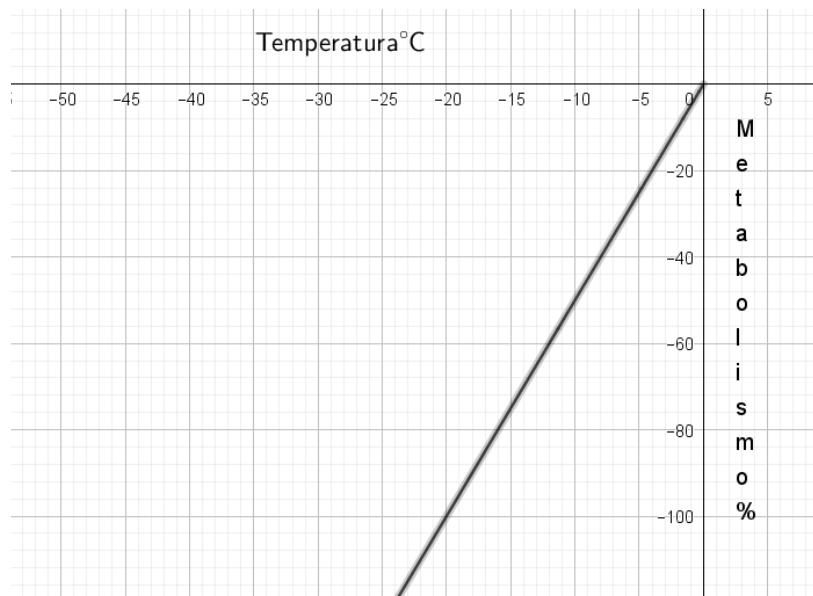
2.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, esperamos que los estudiantes determinen la proporcionalidad directa al modelar e interpretar los datos originados en el sistema de representación gráfico en el tercer cuadrante.

2.3. Formulación de la tarea

La formulación de la tarea está enmarcada en un contexto científico.

Observa la siguiente gráfica en la que se muestra la relación entre la temperatura y el metabolismo de un oso negro.



Juliana observa en la figura que el oso negro hace descender su temperatura corporal hasta los 10 grados centígrados, lo que supondría un descenso del 50% en su actividad química del metabolismo por el proceso de hibernación. Cuando la temperatura del oso desciende a 30 grados centígrados, ¿cuál es el porcentaje en su metabolismo?

2.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que involucra esta tarea son los de razón, proporción, porcentajes, magnitudes correlacionadas y constante de proporcionalidad. En relación con los procedimientos, los estudiantes pueden establecer la relación entre la temperatura y el metabolismo mediante una razón. Además, establecer una proporción con los 30 grados centígrados que desciende y el dato desconocido del metabolismo para hacer uso de la regla de tres o la propiedad fundamental.

2.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes pueden optar por utilizar el mismo sistema de representación gráfico de la tarea y ubicar las parejas ordenadas en él. Los estudiantes también pueden realizar una traducción entre el sistema de representación gráfico y el sistema de representación tabular y ubicar en una columna o fila las cantidades de la temperatura y en otra columna o fila los porcentajes del metabolismo. Cabe mencionar que los estudiantes pueden usar el sistema de representación simbólico mediante el empleo de proporciones y el símbolo de porcentaje.

2.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en el contexto científico del marco conceptual de PISA 2012, pues aborda la hibernación de los osos negros y su relación con el descenso de su temperatura corporal.

2.7. Materiales y/o recursos

Sugerimos entregar a cada estudiante la formulación de la tarea en una hoja o proyectarla si es posible. Los recursos que deben emplear los estudiantes son cuaderno y lápiz. El profesor puede usar el tablero, borrador y marcadores. Adicionalmente, el profesor puede usar deslizadores en GeoGebra, para mostrar a los estudiantes cómo varía la gráfica según la temperatura y el metabolismo de un oso negro (<https://bit.ly/DeslizadorProporción>).

2.8. Agrupamiento, interacción y comunicación

Inicialmente, los estudiantes leen y extraen la información de la tarea de forma individual. Luego, los estudiantes se agrupan por ternas que pueden estar preestablecidas por el profesor o pueden darse de manera autónoma entre los estudiantes. En este momento, los estudiantes verifican dudas entre ellos y resuelven la tarea. Finalmente, el profesor elige al azar un estudiante de cada terna para debatir el desarrollo de la tarea con el gran grupo.

2.9. Temporalidad

En la primera parte de la sesión, el profesor presenta la meta de la tarea, recuerda las características de la proporcionalidad directa y la lectura de gráficos en el plano cartesiano. Para continuar, el profesor relaciona las clases previas con la sesión actual. Luego, el profesor describe la formulación de la tarea al leerla en voz alta con el fin de que los estudiantes extraigan los datos de forma individual. Luego, los estudiantes se organizan en ternas para discutir el sistema de representación y los procedimientos que usarán para resolver la tarea. Pasados 20 minutos, se escoge un integrante de cada terna para poner en común la estrategia usada. A su vez, el gran grupo y el profesor pueden indagar sobre la estrategia y/o errores que observen. En la tabla 8, presentamos la temporalidad de la tarea.

Tabla 8

Descripción de la temporalidad de la tarea T2.2 El oso negro

	Actividad	Tiempo estimado
1	Presentación de la meta de la tarea T2.2 El oso negro	5 min
2	Lectura en voz alta de la formulación de la tarea	5 min
3	Desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes de manera individual, en la que deben identificar los datos	5 min
4	Desarrollo de la tarea por medio de ternas, en las que discutirán la elección del sistema de representación y escogerán la estrategia que consideran más acertada	20 min

Tabla 8

Descripción de la temporalidad de la tarea T2.2 El oso negro

	Actividad	Tiempo estimado
5	Elección por parte del profesor de un estudiante por terna para la puesta en común y posterior retroalimentación de las estrategias implementadas	15 min
6	Retroalimentación con todo el grupo, para evaluar las diferentes estrategias presentadas por los grupos	10 min

2.10. Errores y ayudas

Esperamos que los estudiantes puedan superar errores como el trastocar las componentes de los pares ordenados (E25). Para esto, el profesor puede recordar las características necesarias para que se presente la proporcionalidad, como la constante y el aumento o disminución de las magnitudes. Otro error en el que pueden incurrir los estudiantes es el de confundir la información que presenta la tarea, por ejemplo, al cambiar los ejes del gráfico (E42). Para esto, el profesor puede hacer una puesta en común con todo el salón y extraer los datos y preguntar a los estudiantes a qué hace referencia cada valor: ¿metabolismo o temperatura? En los anexos 1 y 4, se encuentran los demás errores y sus respectivas ayudas, con las que el profesor podrá contribuir a los estudiantes a superar sus limitaciones.

2.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 13, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Bordeamos los criterios de logro que los estudiantes puede activar al intentar de resolver la tarea.

Para resolver la tarea, los estudiantes identifican los datos del gráfico y su relación. Luego, los estudiantes pueden elegir un sistema de representación diferente al gráfico, como el sistema tabular o simbólico. Además, pueden verificar que el gráfico pase por el origen como propiedad principal de la proporcionalidad directa de manera gráfica. Una vez elegido el sistema de representación, los estudiantes se agrupan con otros dos compañeros y comparten su sistema de representación y, en conjunto, escogen un procedimiento que puede ser la propiedad fundamental de las proporciones, la regla de tres simple o hallar la constante y relacionarla por medio de la multiplicación con las otras magnitudes. Para finalizar, los estudiantes deben justificar su respuesta analizando su relación con el contexto de la tarea.

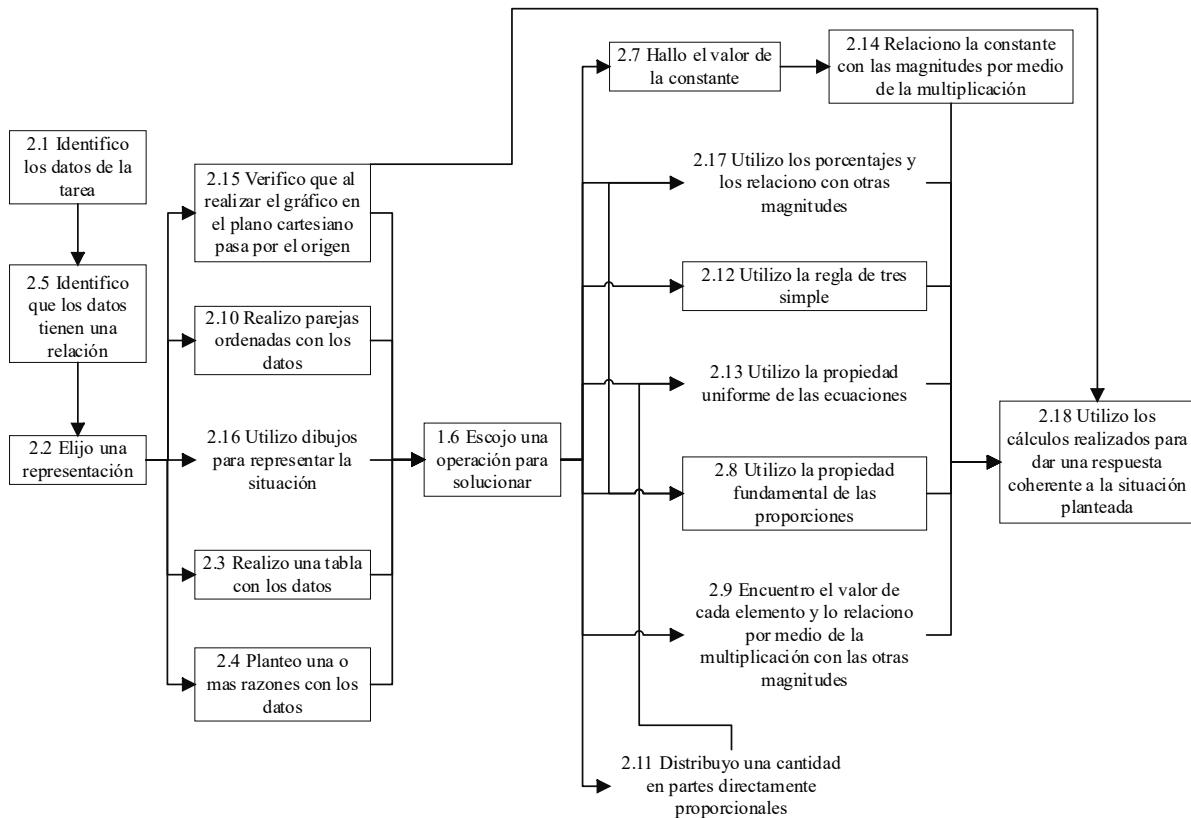


Figura 13. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje T2.2 El oso negro

2.12. Actuación del profesor

El profesor puede proyectar un video motivante sobre la hibernación de los osos. Además, el profesor debe verificar que los estudiantes comprenden el gráfico presentado en la tarea, primero de manera individual y luego de manera grupal. Al momento del desarrollo de la tarea, el profesor puede observar el trabajo de los estudiantes y, si encuentra que incurren en un error reiteradamente, podrá solucionarlo para el gran grupo por medio del listado de ayudas (ver anexo 4). También, el profesor puede hacer preguntas a los estudiantes para indagar u orientar las diferentes formas en que representaron la tarea.

2.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos al profesor usar las ayudas expuestas en el anexo 4. El profesor debe mantener el papel de moderador en el momento en que comparte la tarea con el gran grupo. Además, puede hacer preguntas que promuevan la discusión en las ternas para suscitar la comunicación entre ellos, como las siguientes: ¿cómo interpretar el gráfico?, ¿las magnitudes en el tercer cuadrante son positivas o negativas?, ¿la temperatura y el metabolismo del oso se relacionan? o ¿se puede transformar el gráfico en una tabla o pares ordenados? Adicionalmente, el profesor puede motivar a los estudiantes con lecturas o videos referentes a la hibernación en diferentes especies.

2.14. Evaluación de la tarea

El resultado de esta tarea debe ser una hoja con lo realizado por cada una de las ternas. Luego, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en que incurrieron los estudiantes, los procedimientos correctos o incorrectos y los sistemas de representación usados, con el fin de establecer el valor cuantitativo y generar una retroalimentación general. Para esto, el profesor puede apoyarse del listado de errores presentado en el anexo 1.

7. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos el examen final de la unidad didáctica del tema. De acuerdo con Gómez y Romero (2018), el examen final evalúa los aspectos claves de ambos objetivos, pero, puede ser modificado de acuerdo con el contexto de los estudiantes.

1. FORMULACIÓN DEL EXAMEN FINAL

Proponemos en el examen final seis actividades. Las actividades 1 a 4 determinan el alcance del objetivo 1. Las actividades 5 y 6 determinan el alcance del objetivo 2. Con estas actividades, esperamos que el profesor pueda recoger información relacionada con el aprendizaje de la proporcionalidad directa, sus propiedades y procedimientos. Los estudiantes deben desarrollar el examen final de forma individual en una sesión de 60 minutos. A continuación, presentamos la formulación de las actividades del examen final.

Responde las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente información

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar su proliferación. Se interesan especialmente por el día en que la población sea de 650, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la reproducción.

A partir del tercer día, el crecimiento de la población se comporta de manera particular. Algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla.

Tiempo (días)	3	5	6	8	10	12	15	16
Número de tareas	39	65	78	104	130	156	195	208

1. De acuerdo con las magnitudes relacionadas, ¿se puede decir que existe una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

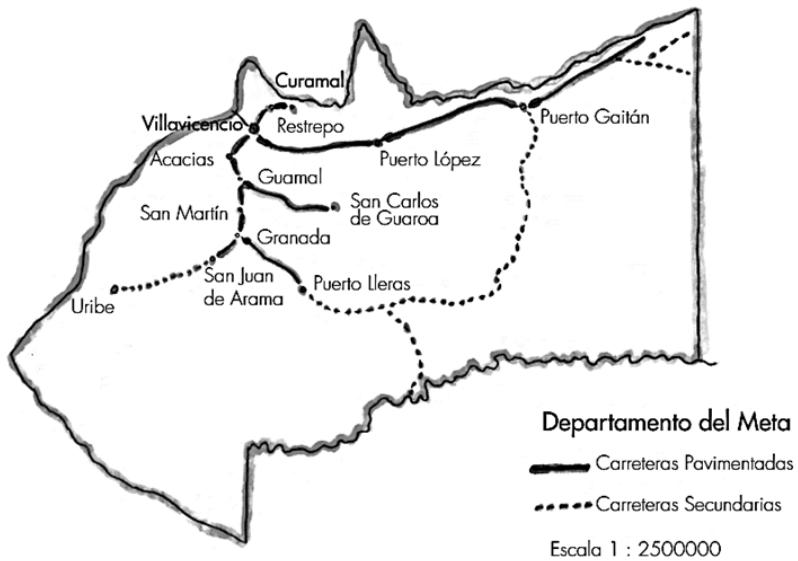
2. Determina el número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650. También calcula el número de bacterias después de 25 días. Explica tu razonamiento.

Nota. Adaptado de Valverde (2013).

3. En un pueblo de Granada, que tiene 100 habitantes, se han convocado elecciones municipales con el fin de repartir 14 concejales. El Partido A consigue 42 votos que representa 6 curules; el Partido B, 31 votos que representa 5 curules; el Partido C, 18 votos que representa 2 curules; y el Partido D, 9 votos que representa 1 curul. ¿El reparto realizado es directamente proporcional? Justifica tu respuesta.

Nota. Adaptado de Ramírez y Villegas (2019).

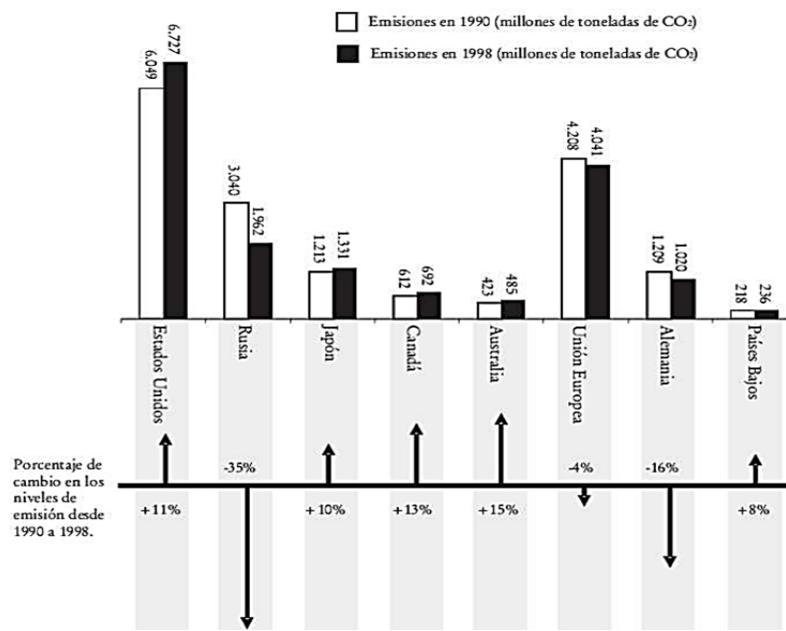
4. Ten en cuenta el mapa del departamento del Meta que está a una escala en la que 1 cm en el mapa representa 2 500 000 km para responder las preguntas. Si mides sobre el mapa en línea recta, la distancia entre Villavicencio y Puerto López es de más o menos 3 centímetros. ¿Cuál dirías que es la distancia real aproximada entre estas dos ciudades?



Responde las preguntas 5 y 6 de acuerdo con la siguiente información

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO₂ en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático. El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO₂ en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes).

Nota. Adaptado de Castaño y Oicatá (2010),.



5. En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO₂ en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.
6. Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO₂. Cada uno llega a una respuesta diferente. Luisa dice que Estados Unidos mientras que Antonio dice que Australia. Explica por qué cada uno da una respuesta diferente.

2. RÚBRICA DEL EXAMEN FINAL

Proponemos una rúbrica por cada objetivo para el examen final (anexo 5). Este instrumento tiene como propósito ayudar al profesor en la clasificación cualitativa de los estudiantes según su nivel de desempeño, por medio de los diferentes criterios de logro. Mediante estas rúbricas (ver tabla 9), el profesor puede asignar un valor numérico para determinar el nivel de desempeño de cada estudiante.

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores para la unidad didáctica de proporcionalidad directa

Nivel de desempeño	Indicadores
Objetivo 1	
Superior	Los estudiantes cumplen con los criterios de logro 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 y 1.15 sin incurrir en errores
Alto	Los estudiantes son capaces de reconocer en las situaciones planteadas las propiedades y características de la proporcionalidad directa, pero incurren en errores pertenecientes a la segunda dificultad referente a las estrategias procedimentales. Por ejemplo, los estudiantes hallan el valor de la constante, pero es diferente al de la tarea (E45) (Ver anexo 1)
Medio	Los estudiantes no reconocen en las situaciones planteadas las propiedades y características de la proporcionalidad directa (E7), para resolver las tareas y las resuelve aplicando regla de tres.
Bajo	<p>Los estudiantes cumplen con los criterios de logro 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 y 1.15. Pero, incurren en algunos errores.</p> <p>Los estudiantes incurren en errores correspondientes a identificar situaciones de proporcionalidad directa, solo con aumento o disminución de magnitudes (E39).</p> <p>Los estudiantes no llegan a establecer las propiedades de la proporcionalidad directa en las situaciones planteadas (E7).</p> <p>Los estudiantes incurren en errores que no le permiten activar alguno de los criterios de logro 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 y 1.15. Y, por ende, no pueden finalizar la tarea.</p>

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores para la unidad didáctica de proporcionalidad directa

Nivel de desempeño	Indicadores
	Objetivo 2
Superior	Los estudiantes cumplen con los criterios de logro 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18, sin incurrir en errores
Alto	Los estudiantes son capaces de utilizar modelos matemáticos que emergen de las propiedades de la proporcionalidad directa para resolver problemas, pero incurren en errores pertenecientes a la segunda dificultad referente a las estrategias procedimentales. Por ejemplo, los estudiantes utilizan el algoritmo de la regla de tres, pero realizan operaciones en las que obtienen un valor diferente al esperado (E50) (ver anexo 1).
Medio	Los estudiantes no utilizan modelos matemáticos que emergen de las propiedades de la proporcionalidad directa para resolver las tareas y aplican la proporcionalidad inversa (E6). Los estudiantes cumplen con los criterios de logro 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18, pero incurren en algunos errores.
Bajo	Los estudiantes incurren en errores correspondientes a identificar situaciones de proporcionalidad directa, solo con aumento o disminución de magnitudes (E39). Los estudiantes utilizan una relación diferente a la multiplicativa entre las magnitudes (E5 y E8). Los estudiantes incurren en errores que no le permiten activar alguno de los criterios de logro 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18. Y, por ende, no pueden finalizar la tarea.

8. CONCLUSIONES

Este documento es el resultado del análisis de los aspectos cognitivos y afectivos que pueden permear el proceso de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad directa en estudiantes de grado séptimo. Elegimos este tema por su transversalidad entre grados, áreas y/o asignaturas, al igual que su importancia en la comprensión y solución de múltiples situaciones de la vida cotidiana y en diferentes disciplinas como las artes. Además, el concepto de proporcionalidad directa está vinculado con conceptos como los números racionales, la escala, porcentajes, semejanza, razón de cambio, entre otros. Esta propuesta está fundamentada en los documentos curriculares nacionales —Estándares básicos en competencias de matemáticas (MEN, 2006), Derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016)— e internacionales —marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2013)—. La propuesta está alineada con el plan de área del colegio Santo Domingo Bilingüe de la ciudad de Bogotá.

Inicialmente, realizamos el análisis de contenido, en el que encontramos que la proporcionalidad directa se origina en las relaciones binarias. A partir de lo anterior, identificamos los conceptos, procedimientos y representaciones que caracterizan al tema y sus relaciones. Además, determinamos nueve fenómenos que le dan sentido al tema y que están organizados en tres subestructuras (comparación, transformación y distribución), que nos permiten identificar los contextos de las tareas. Posteriormente, nos enfocamos en el aprendizaje de los estudiantes a partir del análisis cognitivo. Redactamos dos objetivos de aprendizaje, tres expectativas de tipo afectivo y las limitaciones de aprendizaje en las que pueden incurrir los estudiantes —errores y dificultades—. Con la información anterior, en el análisis de instrucción, diseñamos cinco tareas de aprendizaje, tres para abordar el objetivo 1 y dos para el objetivo 2. Estas tareas fueron estructuradas de forma secuencial, es decir, cada tarea necesita de la anterior para ser solucionada. Así mismo, diseñamos dos tareas de evaluación —tarea diagnóstica y examen final— que nos permitieron recoger información sobre los conocimientos y habilidades de los estudiantes, tanto al iniciar como al finalizar la unidad didáctica.

Una vez realizamos las actividades y análisis descritos anteriormente, diseñamos la primera versión de la unidad didáctica de proporcionalidad directa. Con motivo de su implementación, establecimos en qué medida cada estudiante alcanzó las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, por medio de la contribución a las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos de PISA 2012. Con base en estos resultados, evaluamos el aprendizaje y la enseñanza, y rediseñamos la unidad didáctica. Realizamos estas modificaciones en su gran mayoría a la formulación de las preguntas de las tareas de aprendizaje, debido a que encontramos que generaban ambigüedades en las interpretaciones obtenidas por los estudiantes.

Con nuestra propuesta, contribuimos a que los estudiantes desarrollos el sentido de covariación, es decir, identifiquen el cambio simultáneo de dos magnitudes en una relación de

proporcionalidad directa: si una magnitud aumenta, la otra también y viceversa, en la misma proporción. Igualmente, pretendemos que los estudiantes sean capaces de involucrar un sentido de comparación, transformación y distribución —especialmente constante— entre dos cantidades o magnitudes y analicen su comportamiento. Además, aportamos en mayor medida al proceso matemático de emplear, puesto que los estudiantes utilizan conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para dar solución a situaciones contextualizadas de la proporcionalidad directa. En función de este proceso y del tema, las capacidades matemáticas fundamentales que se fomentan con la unidad didáctica son (a) el diseño de estrategias para resolver problemas, con las que los estudiantes buscan o diseñan un plan para solucionar una tarea; (b) la representación, con el fin de que los estudiantes traduzcan una tarea y utilicen diferentes formas para representarla; y (c) el razonamiento y argumentación, para que los estudiantes realicen inferencias y justifiquen lo que hace en el desarrollo de una tarea. Como mencionamos en apartados anteriores, algunos conceptos y procedimientos corresponden a razón, proporción, regla de tres simple directa, porcentajes y repartos directamente proporcionales.

En relación con las limitaciones del diseño que proponemos, no contemplamos la inclusión del sistema de representación manipulativo. Por lo tanto, sugerimos al profesor el uso de material manipulativo como las regletas de Cuisenaire en la tarea de aprendizaje T2.1 Las bicicletas para favorecer la conceptualización de las relaciones de proporcionalidad directa con los porcentajes y el desarrollo del pensamiento variacional. Igualmente, el profesor debe realizar una adaptación curricular, en caso de contar con estudiantes con necesidades educativas especiales. Por ejemplo, el profesor puede usar el Geoplano en la tarea T2.2 El oso negro, para estudiantes con discapacidad visual.

Respecto al trabajo futuro, consideramos que se pueden adicionar tareas de aprendizaje que se enfoquen en aplicaciones en la física, como la ley de Hooke, o en la química, para equilibrar mezclas. También, sugerimos que se puede realizar una unidad didáctica sobre la proporcionalidad inversa o magnitudes no proporcionales, ya que son conceptos que están presentes a lo largo del proceso educativo de los estudiantes, y así mismo, se relacionan con el concepto de proporcionalidad directa.

9. ANEXOS

En la tabla 10, presentamos el listado de los diferentes anexos relacionados en el documento.

Tabla10
Listado de anexos

A	Descripción
1	Listado de las limitaciones de aprendizaje en los que pueden incurrir los estudiantes durante el desarrollo de las tareas tanto de evaluación como de aprendizaje
2	Listado de criterios de logro de los dos objetivos de aprendizaje propuestos para la unidad didáctica
3	Listado de los conocimientos previos que se consideran necesarios para la implementación de la unidad didáctica
4	Ficha de las tareas de aprendizaje de los dos objetivos. En este anexo, se incluye la descripción de cada uno de los elementos que conforman cada tarea junto con sus tablas de ayudas
5	Rúbricas de evaluación por cada objetivo de aprendizaje para el examen final
6	Imprimibles de las tareas de evaluación y de aprendizaje. En este anexo, se incluye la formulación de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final

Nota. A: Anexo

10. REFERENCIAS

- Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Castaño, J. & Oicatá, A. (2010). *Matemáticas 5* [Cartilla]. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. <https://bit.ly/CastilloOicata>.
- González, M. & Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M. & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. & Romero, I. (2018). Análisis de actuación En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (269-301). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Autor.
- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje V2*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid, España: Autor.
- Ramírez, F. & Villegas, A. (2019). Proporcionalidad y reparto electoral. *Suma*, 2 (91). 105 – 113. https://revistasuma.fespm.es/wp-content/uploads/2021/08/Revista-91_Completo.pdf
- Valverde, G. (2013). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Catalogo público Universidad de Granada. <https://digidug.ugr.es/handle/10481/23890>