

Integración de tecnologías en clase de matemáticas. Experiencias con la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X

Alexánder Castrillón-Yepes
alexander.castrillony@udea.edu.co
Jhony Alexander Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co
Mónica Marcela Parra-Zapata
monica.parra@udea.edu.co
Universidad de Antioquia. MATHEMA-FIEM

Resumen

En este documento se presentan y analizan dos experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. Estas experiencias se preguntaron por las posibilidades que ofrecen las calculadoras como recurso en el desarrollo del pensamiento matemático. Para ello, se exponen consideraciones teóricas que orientan el diseño de ambientes para el trabajo matemático en el aula. En conjunto, las experiencias evidencian posibilidades para trascender un uso de las calculadoras como sustituto de los cálculos y para disminuir la carga operatoria. Finalmente, se realizan algunas reflexiones y sugerencias para su integración en clases de matemáticas.

El uso de la calculadora en clases de matemáticas

A lo largo de las últimas décadas se han desarrollado investigaciones y programas de formación que buscan la integración de las tecnologías digitales en la cotidianidad escolar. En Colombia, los programas *Computadores para Educar*, *Tablet para Educar* y el *Plan TESO* son ejemplos de iniciativas que buscan trascender el compromiso de proporcionar dotación de equipos y dispositivos, para buscar estrategias que contribuyan al desarrollo de prácticas de los profesores que permitan promover pensamiento matemático en los estudiantes.

En la actualidad, las investigaciones relacionadas con la integración de tecnologías en clase de matemáticas muestran un amplio espectro de sus contribuciones. Se destaca, por ejemplo, el uso de redes y plataformas para la formación, dispositivos para promover la producción de conocimiento a través de otras experiencias sensoriales (Realidad aumentada, realidad virtual) y la integración de dispositivos móviles. Así, la necesidad de integrar computadores y calculadoras sigue siendo vigente en el aula (Medina y Ortiz, 2013; Conti et al., 2017a, 2017b; Carmona-Mesa et al., 2018 y Villa-Ochoa et al., 2020).

Los temas de acceso, distribución y portabilidad para algunas comunidades continúan siendo argumentos para pensar en la calculadora como una herramienta en el desarrollo del pensamiento matemático. Existen estudios que muestran diversidad de oportunidades, de usos y comprensiones tanto en profesores, como en estudiantes y padres de familia (Selva y Borba, 2014; Carmona-Mesa et al., 2018). Por un lado, existen usuarios que afirman que el uso de las calculadoras puede obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes. Esta visión de obstáculo se sustenta en una comprensión de la tecnología como un sustituto del cálculo y del desarrollo de procedimientos. Por otro lado, existen otros actores que han argumentado la posibilidad de comprensión conceptual, de resolución de problemas, de creación de estrategias, entre otros (Selva y Borba, 2014; Conti et al., 2017a; 2017b).

En relación con los obstáculos, el estudio de Del Puerto y Minnaard (2002) informa que el rechazo al uso de la calculadora por parte de padres y educadores se fundamenta en creencias de un uso solo para seguir instrucciones y de las limitaciones en el desarrollo de habilidades de cálculo numérico. Por otro lado, superar la visión de obstáculo requiere trascender la visión de *sustituto del cálculo* y aprovechar el recurso para el diseño de ambientes para promover el pensamiento matemático. Como ejemplos de este propósito, los trabajos de Selva y Borba (2014) y Carmona-Mesa et al. (2018) ofrecen ejemplos de tareas en los que la calculadora básica numérica permite a los estudiantes el estudio de los algoritmos de las operaciones básicas, el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas, el uso de las propiedades de los números naturales, y a su vez ofrecen insumos para promover la comprensión de la variación en progresiones aritméticas y geométricas.



En relación con otras calculadoras numéricas, Yerbes y Pacheco (2017) presentan tareas con la ClassWiz fx-991EX que son cercanas al mundo cotidiano de las personas y sirven para interpretar, analizar y tomar decisiones. Los autores justifican el uso de la calculadora en estas tareas porque, en ciertas ocasiones, se requieren cálculos algorítmicos que pueden desviar la atención de los estudiantes frente a la pregunta o problema que se desea resolver, así que la calculadora "es una herramienta que permite direccionar la atención hacia la interpretación, análisis, generar estrategias y toma de decisión ante diversas situaciones" (Yerbes y Pacheco, 2017, p. 5). Esta justificación demarca el rol de reducir la carga operatoria intrínseca en las tareas que proponen los autores. No obstante, a partir de este trabajo, se crea la necesidad de construir experiencias que promuevan un uso de la calculadora que trascienda el cálculo y la obtención de resultados.

Con base en las anteriores consideraciones, en las investigaciones desarrolladas por el Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia se entiende que la integración de tecnologías en la cotidianidad escolar no se reduce a la presencia de un dispositivo para "hacer lo mismo" que se hace con otras tecnologías, entre ellas, el lápiz y el papel. Más allá de ello, se busca que sea un ambiente en el que se tenga en cuenta:

- ▶ Las ideas fundamentales de las matemáticas escolares y su relación con los medios, sus significados y procedimientos.
- ▶ El diseño de tareas que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
- ▶ La configuración de ambientes de clase que promuevan la participación, la discusión, el razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el ambiente.
- ▶ La promoción de la *experimentación*, la formulación y la validación de conjeturas. Además de un discurso en el aula que incluya argumentos y que se fundamenta en ideas y procedimientos matemáticos.
- ▶ La evaluación debe, a su vez, promover el aprendizaje de los contenidos matemáticos y una valoración de las habilidades y procesos desarrollados con la tecnología disponible.

En el siguiente apartado se presentan dos experiencias de los trabajos realizados tanto en las clases de matemáticas en el nivel de Educación Básica, como en un programa de formación de profesores.



Experiencias con el uso de la calculadora en Educación Básica

Se han llevado a cabo en instituciones educativas de la ciudad de Medellín experiencias de integración de tecnología, entre ellas, el uso de la calculadora Classwiz fx-991LA X. En ellas la calculadora en clase de matemáticas promueve la interpretación, el análisis, la creación de estrategias y la toma de decisiones ante diversas situaciones que se presentan.

Usar la calculadora en la Educación Básica ha implicado la configuración de ambientes que consideren:

- ▶ **Exploración de la herramienta:** los estudiantes se familiarizan con el manejo de la calculadora por medio de retos en los que se reconocen las teclas y sus funcionalidades.
- ▶ **Práctica y conceptualización:** se llevan a cabo situaciones en torno a un o unos conceptos matemáticos, en los que el uso de la calculadora posibilita la solución de problemas y la discusión sobre algún componente conceptual.
- ▶ **Comunicación y discusión:** se discuten las soluciones ofrecidas por la calculadora y se problematizan en relación con el problema inicial.

Un uso de la calculadora en Básica Secundaria

A continuación, se presenta una de las experiencias con estudiantes del grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con una exploración y familiarización con las funciones básicas de la calculadora Classwiz fx-991LA X: prender y apagar, formatear, cambiar el idioma, usar teclas básicas y especiales. Posteriormente, se les pidió a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- ▶ Indicar el resultado de la expresión matemática: $5 - 7 + 3 \cdot [(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)] + 3 =$
- ▶ Dada la expresión $3 + 4 - 6 + 9$, calcular todos los resultados posibles al ubicar un par de paréntesis para agrupar de diferentes maneras
- ▶ Aumentar 2500 en un 15%.

Para el desarrollo de la primera tarea, los estudiantes propusieron diferentes estrategias en las que se pudo explorar el teclado de la calculadora y realizaron cálculos con las cuatro operaciones básicas. Además, quitar y poner algunos signos de agrupación, observar el resultado y explicar el cambio que genera en la expresión y las operaciones su presencia o



ausencia. Al comprobar los resultados en sus calculadoras, los estudiantes pudieron reconocer por ejemplo que $(5 - 7)$ es equivalente a $5 - 7$, pero que en el caso de $3 \cdot [(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)]$ no es equivalente a $3 \cdot (-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)$, dado que los paréntesis indican el orden y la prioridad de las operaciones en el enunciado en particular, por ejemplo allí, en el primer caso se efectúa un producto donde el primer factor es 3 y el segundo factor es $[(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)]$, mientras que en el segundo caso se efectúa una resta donde el primer término es $3 \cdot (-7 - 3)$ y el segundo término es $2 \cdot (2 + 56)$.

En la segunda tarea, los estudiantes calcularon todos los posibles resultados de la expresión $3 + 4 - 6 + 9$, al ubicar un par de paréntesis que agruparan de diferentes maneras. Entre las respuestas, los estudiantes propusieron expresiones como:

$$\begin{aligned}(3 + 4 - 6 + 9) &= \\(3 + 4) - 6 + 9 &= \\3 + 4(-6 + 9) &= \\3 + 4(-6) + 9 &= \\3 + 4 - (6 + 9) &= \\3(+4 - 6 + 9) &= \end{aligned}$$

Dado que en todos los casos se obtenían respuestas diferentes, los estudiantes manifestaron la necesidad de crear una estrategia para agrupar términos de la expresión, según el orden y el tipo de agrupación que se quisiese realizar. Luego, comenzaron a tomar de a dos términos con el fin de introducir la multiplicación y la propiedad distributiva. Más tarde, hicieron lo mismo agrupando con el paréntesis tres términos de la expresión. En la parte final, y como una manera de evaluar el trabajo de los estudiantes, se les pidió que propusieran sus propios retos para identificar el uso de los signos de agrupación. A manera de ejemplo, uno de los grupos creó la tarea:

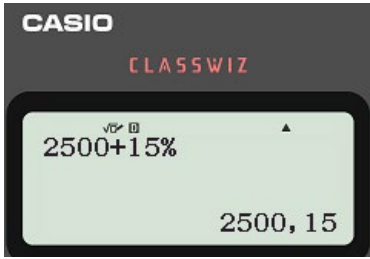
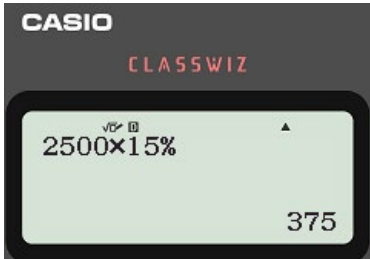
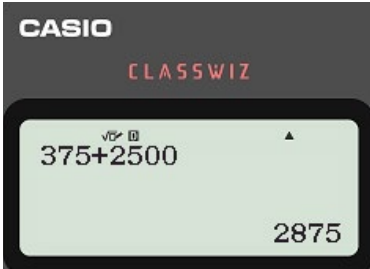


Tome la siguiente operación: $3 + 5 - 2$ ubique diferentes signos de agrupación para obtener como resultados los números 6, 9, -16. ¿Se pueden construir más números?

Esto y otras reflexiones les permitieron a los estudiantes reconocer la importancia del uso de signos de agrupación y el orden de aplicación de los signos para no alterar los resultados de las operaciones. De esta manera, la calculadora apoyó la construcción de estas características de los símbolos y las convenciones matemáticas.

En el caso de la tarea del aumento porcentual, en el momento de aumentar 2500 en un 15%, se encontraron dos estrategias de solución.

Tabla 1. Estrategias de solución de los estudiantes.

	<p>Caso 1</p> <p>Uno de los equipos de trabajo indicó que “sumamos 2500 y 15%, porque nos dicen que aumentemos y vemos qué nos da en la calculadora, el resultado es dos mil quinientos punto quince”.</p>
<p>2 5 0 0 + 1 5 SHIFT Ans = S+D</p>	
	<p>Caso 2</p> <p>Uno de los equipos de trabajo mencionó que era “necesario sacar primero el quince por ciento, esto se hace multiplicando el número por 15%. Luego sumamos el resultado con el número inicial”.</p>
<p>2 5 0 0 X 1 5 SHIFT Ans =</p>	
	
<p>3 7 5 + 2 5 0 0 =</p>	

Fuente: los autores con producciones de los estudiantes.

En la estrategia propuesta en el **caso 1**, los estudiantes interpretaron el incremento como una suma de cantidades, sin reconocer el significado del porcentaje de un número. En este caso, el hecho de que la calculadora ofreciera un resultado se convierte en un obstáculo



para la comprensión del cálculo del porcentaje, puesto que los estudiantes interpretan este resultado como una manera de validar su razonamiento. Por su parte, en el **caso 2** los estudiantes reconocen que el 15% se determina en relación con otra cantidad, en este caso 2500.

Un uso de la calculadora en Básica Primaria

Se presenta una de las experiencias con estudiantes del grado cuarto de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con una exploración y familiarización con las teclas para operaciones básicas con la calculadora Classwiz fx-991LA X: prender y apagar, teclas numéricas, teclas para operaciones $+$, $-$, \times y \div . Posteriormente, se les pidió a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- Realizar el cálculo $5 \times 2 + 3 \times 8 =$ a lápiz y papel y luego con calculadora científica.
- La profesora Gabriela tenía en clase 87 stickers para repartir en partes iguales entre sus 9 estudiantes. Antes de repartirlos quiso saber ¿cuántos sobrarían? e hizo cuentas con la calculadora. Indicar ¿qué operación hizo la profesora en la calculadora? ¿es posible saber cuántos stickers sobran?

Para el desarrollo de la primera tarea un estudiante propuso realizar a lápiz y papel:

Figura 1. Desarrollo de estudiante.

$$\begin{array}{l}
 5 \times 2 + 3 \times 8 = 5 \times 2 = 10 \\
 10 + 3 = 13 \\
 13 \times \\
 8 \\
 \hline
 104
 \end{array}$$

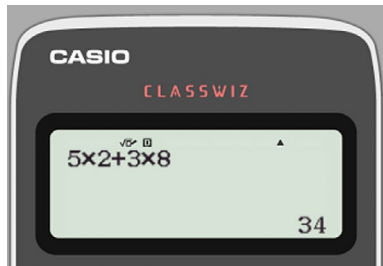
$$5 \times 2 + 3 \times 8 = 5 \times 2 = 10$$

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 13 \times \\
 8 \\
 \hline
 104
 \end{array}$$

Fuente: trabajo de estudiante.

Esta solución fue validada por el grupo.

Otro estudiante realizó las operaciones en la calculadora obteniendo:



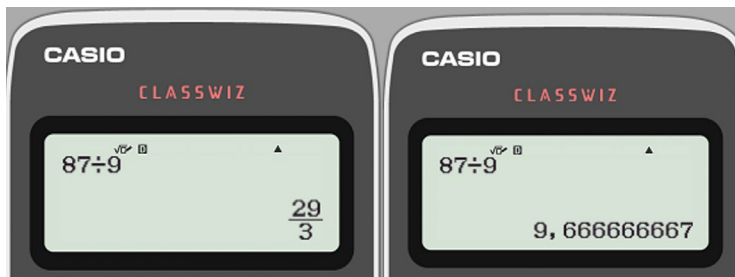
$$5 \times 2 + 3 \times 8 =$$

Ante lo anterior la profesora pregunta *¿Cómo explican que se obtengan diferentes resultados? ¿Cuál es correcto y por qué?* A lo anterior gran parte del grupo responde que *debe ser correcto el resultado de la calculadora*, pero no logran dar un argumento matemático más allá de indicar que *las calculadoras no se equivocan*.

Frente a la tarea recordemos que frente al cálculo $5 \times 2 + 3 \times 8$ realizado a lápiz y papel se realizaron los cálculos a medida que se incorporan, es decir $5 \times 2 = 10$, luego se consideró $10 + 3 = 13$ y finalmente $13 \times 8 = 104$, evidentemente resultado incorrecto. En cambio, la calculadora frente a ese mismo cálculo contempla la jerarquía de las operaciones, es decir que realizó $5 \times 2 = 10$ y $3 \times 8 = 24$ resultados que luego sumó, arrojando un resultado diferente, en este caso 34.

Lo anterior pone de manifiesto que el estudiante no conoce la jerarquía de las operaciones, es decir que opera por orden de escritura sin tener en cuenta la separación en términos. La calculadora en cambio sí tiene en cuenta la separación de los términos. Además en este caso el trabajo enfrentó a los estudiantes a conocimientos matemáticos que aún no tienen disponibles, y que evidentemente requerirán de otros problemas y tiempos para su adquisición. Sin embargo, los estudiantes pudieron interactuar con los mismos aun cuando no dominen sus significados (Rodríguez y Juárez, 2019).

En la solución de la segunda tarea los estudiantes indicaron que *sí era posible* de resolver el procedimiento con la calculadora y que la profesora Gabriela había realizado una división de *87 entre 9* para saber el total de stickers que le quedaban, así que procedieron a realizar dicha operación.

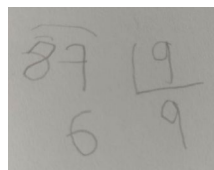


La calculadora arrojó como resultado de la división 9,666666667. Dadas las cifras decimales en ese número no es muy sencillo encontrar con cuántos stickers se quedó la profe Gabriela. Reconstruir el resto de la división implicará desprestigiar la parte decimal, "quedarse" con el 9, multiplicar luego 9×9 y calcular que si había 87 y usó 81 se quedó con 6 globos para ella haciendo $87 - 81$.

Este problema puede ser planteado a los estudiantes con la finalidad de ampliar los significados de la división y la relación entre cociente, divisor, resto y dividendo, pero aun cuando dicho conocimiento matemático esté ya disponible, este problema permite investigar un límite de la calculadora la cual no permite obtener el resto de una división con números naturales.

En este caso un estudiante indicó que era más sencillo realizar la división *como siempre la hacían* en el cuaderno, así:

Figura 2. Solución de un estudiante.



Fuente: trabajo de un estudiante.

Finalmente, se destaca el conocimiento que debe tener el profesor a la hora de promover este tipo de tareas en el aula y cómo utilizarlo para promover discusiones que requieran razonamientos y argumentos matemáticos; por ejemplo, si los estudiantes de Educación Secundaria del caso 1 hubiesen realizado el mismo procedimiento en una calculadora básica el resultado que esta arrojaría es 375. Esto podría promover discusiones alrededor de

la idea de "incremento" y sobre la manera en que la calculadora está configurada para responder a las indicaciones que el usuario realiza. Así mismo para el caso del trabajo con los estudiantes de primaria se hizo necesario conocer en profundidad el uso de la calculadora lo que involucra conocer su teclado, sus funciones, pero sobre todo sus límites.

Experiencias con el uso de la calculadora en la formación de profesores

Otras experiencias en relación con el uso de la calculadora simple y la calculadora Casio Classwiz fx-991LA X se han llevado a cabo en diferentes cursos de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. La estructura general de las implementaciones en estos cursos ha sido:

- ▶ La consolidación de un espacio de discusión alrededor del uso que los futuros profesores de matemáticas hacen de la calculadora y sobre su potencial integración en sus futuras prácticas como docentes.
- ▶ La exploración y familiarización con el manejo de la calculadora. Se proponen espacios para conocer las teclas y sus funcionalidades, en vista de que no todos los estudiantes tienen experiencias previas con el uso de este dispositivo. En ellos se busca que los estudiantes consideren elementos básicos para el manejo de esta tecnología.
- ▶ La exploración conceptual y de resolución de problemas con la calculadora.
- ▶ La reflexión final del uso de las calculadoras, sus posibilidades y limitaciones en el aula. En ocasiones, se busca reconocer algún cambio en sus visiones sobre el uso de la calculadora.

Estos cuatro momentos de las implementaciones se configuran con el propósito de comprender que la calculadora puede, más allá de reducir la carga operatoria, asumir otros roles en la formación de profesores de matemáticas como ser una condición de posibilidad para la creación de estrategias en la resolución de problemas y para el diseño de tareas que promuevan un uso diferenciado de las tecnologías. A continuación, se presentan percepciones de los futuros profesores frente al uso de la calculadora, la exploración conceptual y los aportes que reconocieron en esta experiencia.

Percepciones de los futuros profesores

En un curso introductorio al álgebra lineal en un programa de futuros profesores de matemáticas se presentó una discusión frente al uso que ellos hacen de la calculadora y de la



posible incorporación en su ejercicio profesional. Para algunos estudiantes el uso de esta herramienta debe estar presente porque permite simplificar procesos, en palabras de un estudiante:

la educación nunca se queda estancada y el propósito de cuando sale algo nuevo, más que todo en el ámbito tecnológico, es tratar de integrar lo nuevo con la educación. Yo personalmente considero que es pertinente y debería ser pertinente permitir el uso de la calculadora en el aula de clases. Eso no es un aparato que se hizo simplemente por capricho, eso simplifica muchos procesos [...]. (Carlos)

La idea de simplificar procesos estuvo presente en diferentes intervenciones de los futuros profesores; no obstante, existen diferencias frente al momento en el cual consideran prudente emplear dicha tecnología (en adelante se usan pseudónimos para aludir a los comentarios de los estudiantes):

- Profesor: [...] ¿la usarías [la calculadora] como estudiante para qué?
- Carlos: pues yo no sé decir específicamente para qué, eso lo determina la situación.
- Profesor: ¿Alguien no la usaría?
- Susana: [...] yo digo que todo es un proceso y si el niño sabe de dónde viene la multiplicación, para qué se utiliza la multiplicación y cómo llega a un resultado, después de que tenga eso claro yo le permitiría el uso de la calculadora.

Frente a estas evidencias vale la pena resaltar que para Carlos las calculadoras simplifican procesos, pero que su uso depende de la situación que se esté estudiando. La intervención del profesor permitió dar cuenta que dicho estudiante aludía a los usos como las operaciones necesarias para resolver las tareas, es decir, a emplear esta tecnología para reducir la carga operatoria y simplificar los algoritmos. Esta visión y la de Susana coinciden con las concepciones que tienen otros profesores frente al uso de la calculadora y que diferentes investigadores han estudiado (P. Ej. Conti et al., 2017a; Selva y Borba, 2014). Carlos y Susana manifiestan sus percepciones del uso de la calculadora, pero también sus preocupaciones de que al usarla se deja de promover el aprendizaje de las operaciones. En ese sentido, reconocer otras maneras de incluir esta herramienta en las clases puede ser potente para que los futuros profesores decidan incorporarlas.

Más tarde, el profesor preguntó directamente a otra estudiante (María) sobre su percepción, ella indicó que no la usaría en todo momento, sino que debe haber un balance, por ejemplo, “tengo el vicio cuando estoy estudiando yo sola no utilizar nada de eso [calculadoras] como para ir aumentando un poquito más el cálculo y no dejar los procesos, a mí me parece que



es de parte y parte" (María). Llama la atención que en este primer momento el uso de la calculadora para los futuros profesores se limita a la obtención de resultados numéricos y a la simplificación de procesos algorítmicos, es decir, al ámbito de las operaciones básicas en los números reales. Esto se convirtió en una oportunidad para que el profesor mostrara otros usos de la calculadora en este curso, por ejemplo, para la exploración conceptual.

Uso de la calculadora para la exploración conceptual

En la experiencia, primero se destinó un espacio para que los estudiantes se familiarizaran con el manejo de la calculadora, reconocieran sus teclas y la manera de operar con ellas. Luego, se propuso iniciar una exploración con las matrices, cómo definir las, generar hipótesis sobre el tipo de operaciones que se pueden realizar, ponerlas a prueba e identificar patrones en esos resultados. Se esperaba que los futuros profesores lograran percibir la manera en que se realizan algunas operaciones a través del uso de la calculadora; esta fue la primera aproximación que los estudiantes tuvieron en el curso con las operaciones entre matrices. Como uno de los propósitos del curso tiene que ver con el reconocimiento de las estructuras algebraicas y reflexionar sobre las operaciones, por ello se discutió con los estudiantes sobre los resultados obtenidos. El profesor realizó preguntas como: ¿Cuál es el resultado de operar dos matrices? ¿Qué relación existe entre el resultado obtenido y las matrices operadas? ¿Qué transformaciones se hicieron para llegar a ese resultado?

Frente a la familiarización con la calculadora, los estudiantes hicieron preguntas relacionadas con cómo se define o re-define una matriz, cómo se cambia el orden de la matriz y si los signos "+" y "-" que usan para operar números reales, también se pueden usar para operar las matrices. Así, los estudiantes definieron matrices en la calculadora y realizaron la adición entre dos de ellas. Se encontraron dos respuestas diferentes: por un lado, la calculadora mostró en la pantalla el mensaje "Dimensión error"; por otro lado, un grupo de estudiantes observó en la pantalla una nueva matriz. Esta situación produjo preguntas en relación con las razones por las cuales se había llegado a cada respuesta; en ese momento, un estudiante mencionó que la primera se debe a que las matrices no tienen el mismo orden. Luego, se plantearon preguntas con otras matrices diferentes, allí los estudiantes generalizaron esa hipótesis y plantearon que, en la adición de matrices, estas deben tener el mismo orden, pero también identificaron que cada entrada de la matriz resultante es la suma de las entradas correspondientes de las matrices operadas. Después de este proceso, estudiantes y profesor discutieron la definición de adición y sustracción entre matrices de orden $m \times n$, tal y como se evidencia en el siguiente diálogo:



—Profesor: Ahora, la suma de dos matrices, en términos generales, me daría como resultado qué

—Sofía: Una matriz

—Profesor: Llamémosla, ¿cómo?

—Carlos: C

—Profesor: De qué orden

—Carlos: $m \times n$

—Profesor: ¿y con entradas cómo?

—Sebastián: c_{ij}

—Profesor: ¿ c_{ij} es igual a?

—Sebastian: $(a_{ij} + b_{ij})$

—Profesor: ¿y para la resta?

—Pedro: Primero que tiene que ser $m \times n$ todas dos [se refiere a las matrices que se opera], deben tener lo mismo [alude al orden de la matriz], y término por término se debe hacer la diferencia.

Otras exploraciones que se realizaron en esta sesión estuvieron relacionadas con la multiplicación de un escalar por una matriz y del concepto de combinación lineal. De manera similar los estudiantes identificaron aspectos relacionados con la definición de dicha operación o concepto, sus condiciones de posibilidad y los momentos en que podrían trabajar con la calculadora. Por ejemplo, frente al producto de un real por una matriz se reconoció el tipo de operación con la cual se estaba trabajando:

—Profesor: Ahora vamos a hacer esta operación, tengo un número real y lo voy a multiplicar por una matriz y vamos a ver cuáles son los efectos. Háganlo con la calculadora y me cuentan qué pasa [...] ¿Qué resultado nos arroja?

—Carlos: Una matriz del mismo orden [...] una ley de composición externa.

De manera similar a como se hizo con la adición y sustracción, se definió la operación multiplicación de un número real por una matriz.

Frente al concepto de combinación lineal se propusieron dos tareas y se pidió a los estudiantes desarrollarlas con o sin el uso de la calculadora, pero, en cualquier caso, se debía describir cómo se hizo y justificar el porqué de esa manera. La primera tarea consistía en calcular una matriz D definida por el profesor como una combinación lineal dada de otras tres matrices, mientras que la segunda tarea trataba de determinar si una matriz E dada, se podía expresar o no como combinación lineal de las mismas matrices anteriores. En estas tareas llamó la atención que la mayoría usó la calculadora para la primera porque era mucho más rápido; solo un estudiante lo hizo a papel y lápiz para verificar si obtenía el mismo resultado que con la calculadora. En la segunda tarea no se usó la calculadora por-

que no sabían cómo hacerlo; no obstante, un estudiante mencionó que si podían resolver ecuaciones lineales en la calculadora, entonces la usarían.

En esta experiencia también se generaron discusiones entre los estudiantes que fueron mediadas por el profesor, quien problematizó algunos de los resultados. Se observaron en este trabajo posibilidades de explorar conceptos y operaciones con las calculadoras, de generar hipótesis sobre los resultados y de identificar estructuras subyacentes en los procedimientos realizados. En ese sentido, el uso de la calculadora, el tipo de tarea propuesta y la orientación del profesor son elementos que deben ser considerados en el ambiente de clase para promover el pensamiento matemático.

Aportes y discusiones sobre el uso de la calculadora

La clase continuó con algunas reflexiones frente a los usos de la calculadora que los futuros profesores identificaron en esta sesión. Al respecto, se destaca la reducción de la carga operatoria, la verificación de resultados, el planteamiento de hipótesis, la identificación de relaciones y patrones, la exploración y la apropiación conceptual. Asimismo, se reflexionó sobre el hecho de que no todo problema se resuelve con el uso de la calculadora, es necesario identificar cuándo es posible y recomendable su uso o cuándo es preferible hacer uso de otras tecnologías como el lápiz y el papel.

Una estudiante mencionó que el uso de la calculadora y la manera en que se orientó la sesión (con el uso del tablero para escribir las matrices y promover discusiones) le ayudó a reconocer las filas y columnas en una representación algebraica, en sus palabras: "a mí personalmente me ayudó como para analizar más lo de columna y fila a la hora de ponerlo, pues es que yo me confundo mucho con eso" (Carolina).

Finalmente, se propuso una tarea abierta que buscó usar las limitaciones de la calculadora como una posibilidad de promover el trabajo matemático y el diseño de estrategias por parte de los estudiantes. Esta tarea se propone como una alternativa para establecer relaciones entre la cantidad de matrices que se pueden definir en la calculadora (máximo cuatro matrices) y el orden de cada una de ellas (la calculadora permite trabajar con matrices de máximo 4×4). La tarea está relacionada con construir una estrategia que permita realizar operaciones entre matrices (adición, multiplicación de un escalar por una matriz y combinación lineal) que tengan un orden de $m \times n$ donde $m > 4$ y $n > 4$, haciendo uso de la calculadora. Esta serie de experiencias con la calculadora, junto con otras que reporta la literatura y las que desarrolla el grupo MATHEMA-FIEM han logrado generar reflexiones sobre las intenciones en que diferentes actores usan la calculadora, sus potencialidades y algunas sugerencias para los profesores.



Consideraciones finales

Este documento se propuso presentar y analizar dos experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM (cfr. Castrillón-Yepes et al., 2020; Villa-Ochoa et al., 2020 y García-Cuéllar et al., 2019). En particular, ha buscado ofrecer variedad de comprensiones y usos de la calculadora. En la Tabla 2 se sintetizan algunos de los aspectos que se han recogido en los diferentes estudios y experiencias de formación, junto con algunas sugerencias para el ambiente de clase.

Tabla 2. Uso de la calculadora en Educación Matemática.

Intenciones al usar la calculadora	Potencialidades	Sugerencias para el profesor
Reducir la carga operatoria	<ul style="list-style-type: none"> - Permite reducir los algoritmos y centrar la atención en la relación entre los datos y lo que estos representan en un contexto o situación determinada. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se debe tratar de no limitar la acción de los estudiantes a obtener un valor, se pueden promover preguntas sobre lo que representan los resultados obtenidos. - No basta con hacer cálculos, es necesario que los estudiantes y el profesor conozcan la herramienta y los factores que pueden conducirlos a cometer algún error.
Cambiar concepciones sobre su uso	<ul style="list-style-type: none"> - Permite que los profesores, futuros profesores, estudiantes y padres de familia reconozcan la importancia del uso de la calculadora. 	<ul style="list-style-type: none"> - Es necesario trascender los usos domésticos de la calculadora en educación (limitados a ser un sustituto del lápiz y papel). - Plantee situaciones problemáticas. Algunas se pueden encontrar en el trabajo Selva y Borba (2014). - Realice preguntas sobre lo que hacen los participantes y promueva la interacción entre ellos.
Resolver problemas	<ul style="list-style-type: none"> - Reduce la carga operatoria. - Posibilita dotar de significado los valores con los que se trabaja. - Desarrolla habilidades matemáticas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Es posible utilizar diferentes registros semióticos o representaciones sobre los datos que se obtienen con la calculadora. - Incorpore otras tecnologías como softwares y simulaciones.
Exploración conceptual	<ul style="list-style-type: none"> - Construir conjeturas, plantear hipótesis, verificar y refutar. - Favorece la construcción de argumentos. - Posibilita la interacción entre el estudiante y el profesor. 	<ul style="list-style-type: none"> - Requiere diseñar preguntas previas y considerar otras en relación con lo que pueda suceder en el aula.

Fuente: los autores.

Es importante mencionar que los elementos que se presentaron en la tabla no deben verse como propuestas aisladas y absolutas, sino, por el contrario, como un insumo para pensar la intención con la cual se usa la calculadora en diferentes espacios formativos. Además, que las acciones que se desarrollen en estos escenarios están condicionadas por elementos como: participantes (estudiantes de educación básica o media, futuros profesores, padres de familia, etc.), tipos de tareas y medios disponibles (calculadora simple, calculadora gráfica, etc.) y contextos específicos.

Bibliografía

- Carmona-Mesa, J., Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad*, 18(1), 13-24. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.18.1.02>
- Castrillón-Yepes, A., Carmona-Mesa, J. y Villa-Ochoa, J. (2020). Technology integration in a course for prospective mathematics teachers. En A. Rocha, C. Ferrás, C. Montenegro y V. Medina (eds.). *Advances in intelligent systems and computing* (pp. 501-510). Springer.
- Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017a). Uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental: concepções dos futuros professores. *Cadernos de Pesquisa*, 24(esp.), 53-67.
- Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017b). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria?. *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, 2(1), 4-14. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/257>
- Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2002). *La calculadora como recurso didáctico*. Universidad Caece.
- García-Cuéllar, D., Parra-Zapata, M., Martínez-Miraval, M. y Sostenes, H. (2019). Una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Classwiz. *Acta latinoamericana de matemática educativa-ALME*, 32(1), 658-667.
- Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Uni-pluriversidad*, 13(3), 14-28.
- Selva, A. y Borba, R. (2014). *El uso de la calculadora en los primeros grados de educación básica*. Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Villa-Ochoa, J., Carmona-Mesa, J. y Castrillón-Yepes, A. (2020). Conocimientos promovidos a través de tareas que involucran el uso de la calculadora simple. Un estudio con futuros profesores de matemáticas. En A. Acevedo, J. Villa-Ochoa y L. Solano (Eds.). *Formación de profesores de matemáticas: reflexiones, conocimientos y recursos* (pp. 63-79). Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Yerbes, J. y Pacheco, S. (2017). *Ejemplos de situaciones matemáticas con el uso de la calculadora CLAS-SWIZ fx-991 EX*. Reliable & Durable.

