



Una comprensión de la comprensión en matemáticas

Pedro Gómez

Introducción

El tema de la comprensión en matemáticas debe interesarnos como profesores, formadores de profesores e investigadores. La razón es sencilla. La comprensión de las matemáticas es el fin último de nuestras actividades. Nos interesa, al final, que nuestro trabajo aporte a que los estudiantes comprendan más y mejor las matemáticas. Tenemos que saber acerca del concepto de comprensión, para saber qué deben hacer los estudiantes para comprender, qué deben hacer los profesores para ayudarlos a comprender y qué deben hacer los diseñadores de currículo para lograr este objetivo.

No son muchas las publicaciones que atacan el tema de la comprensión en matemáticas de una manera coherente y con intenciones de lograr una visión global del tema. Tal vez, dos de los clásicos en este campo son el libro de Resnick y Ford (1990) y el capítulo de Hiebert y Carpenter en el *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (1992). En la mayoría de los casos, uno se encuentra con artículos especializados que consideran un aspecto específico del problema o que se restringen a considerar el tema de la comprensión para un contenido matemático particular. El libro de Sierpinska (1994) es un intento de abordar, de manera global y coherente, el tema de la comprensión en matemáticas. Al contrario de lo que intentaron Resnick y Ford, Sierpinska no busca presentar una descripción cronológica de las diferentes posiciones que han existido sobre el tema. Ella pretende proponer su posición y desarrollarla con el máximo detalle posible.

Este artículo no es una reseña del libro de Sierpinska¹. En este artículo pretendo presentar *mi* versión del libro. En este sentido, aunque en muchas ocasiones me refiero a lo que Sierpinska dice, en todas las ocasiones estoy presentando *mi* interpretación de lo que leí y comprendí. Porque leer el libro de Sierpinska es todo un ejercicio de comprensión en educación matemática. Utilizando algunos de los términos (y no necesariamente los conceptos) que se presentan en el libro, se puede afirmar que las maneras como nuestras formas de conocimiento (acerca de la comprensión en matemáticas) cambien con motivo de la lectura del libro depende de, entre otras cosas, de nuestras bases de comprensión con respecto al tema y de los obstáculos epistemológicos que tengamos en ese momento. En mi caso, la experiencia fue muy enriquecedora.

No se puede pretender que un artículo como éste reemplace de ninguna manera la lectura del libro. Por el contrario, lo que sí se puede pretender es que motive y guíe su lectura. Sierpinska utiliza 189 páginas para desarrollar el tema y la lectura de su libro es bastante difícil. En unas pocas páginas no se puede más rasguñar algunas de las discusiones e introducir de manera muy superficial los conceptos que se utilizan para atacar el problema. He intentado resaltar con cursiva estos conceptos. Por otra parte, me veo obligado a utilizar profusamente las comillas. Esto se debe a que, en muchas ocasiones,

1. Para ello ver el artículo de Mason (1996) en este número de la revista EMA.



utilizo términos pertenecientes al lenguaje común que, al ser utilizados por fuera de su contexto natural, no tienen un único significado posible.

Este artículo se inicia con una descripción breve del tema central del libro, para después profundizar en los conceptos de *obstáculo epistemológico*, *operaciones mentales* y *desarrollo cognitivo*. A continuación, se consideran los conceptos de *actos*, *bases*, *objetos* y *procesos de comprensión*. Finalmente, se tratan los temas relacionados con la calidad de la comprensión y los problemas de enseñanza.

Descripción general

El proceso de enseñar y aprender matemáticas tiene lugar en diversas dimensiones: la *mental* de quien aprende (el estudiante), la *física* en la que el estudiante actúa matemáticamente e interactúa con profesor y compañeros, la de las matemáticas escolares, la de las matemáticas como saber cultural de una comunidad y la de las experiencias “reales” (no necesariamente matemáticas) del estudiante. Por supuesto que hay más dimensiones, pero estas son las que resultan más interesantes para efectos de discutir acerca de la comprensión. Buena parte de las reflexiones de Sierpinska se refieren a la dimensión mental del estudiante: a lo que sucede en su mente; otras se refieren a sus actuaciones e interacciones en el salón de clase; y unas pocas a las dimensiones de las matemáticas escolares y de las de las matemáticas como saber cultural de una comunidad. Buena parte de este artículo estará entonces centrada en la dimensión mental del estudiante.

La comprensión es un *proceso mental*. La comprensión es el proceso que describe la evolución de diversos *estados de comprensión*. Un estado de comprensión con respecto, por ejemplo, a un concepto matemático, es una “forma de ver las cosas” con respecto a aquello que atañe a ese concepto. Esta forma de ver las cosas (algunos autores utilizan la frase “forma de conocimiento”) es producto de las experiencias que el sujeto ha vivido con respecto a este concepto. Esta forma de ver las cosas es el “modelo” mental que el sujeto ha construido y con el cual él se ha sentido “cómodo” cuando tiene que actuar en situaciones matemáticas que involucran al concepto. Después de la adolescencia, esta forma de conocimiento con respecto a un concepto se conforma como un *sistema coherente* de conocimientos (datos, resultados, procedimientos, entre otros) acerca del concepto y de creencias acerca de las matemáticas y de cuestiones particulares al concepto. Estas formas de conocimiento son siempre parciales. Esto quiere decir que, con respecto al concepto en cuestión, siempre hay experiencias matemáticas que el sujeto puede vivir y que no son coherentes con (no se adaptan a) su forma de conocimiento actual. Cuando estas experiencias “contradictorias” son “suficientemente” fuertes, el sujeto se ve obligado a reorganizar su forma de ver las cosas. El se ve obligado porque su modelo no es coherente con la “realidad” que él vive. Estos cambios en formas de conocimiento son bruscos: suceden en momentos específicos del tiempo. Estos cambios requieren que el sujeto cambie su sistema de conocimientos y creencias. Estos cambios no consisten en adiciones a lo que ya tenía. Consisten en reorganizaciones “estructurales” de esos conocimientos y esas creencias. Avanzar en el proceso de comprensión consiste en tener la oportunidad de vivir esas experiencias y lograr realizar estas reorganizaciones.

Estas formas de conocimiento son los *obstáculos epistemológicos*. La comprensión que un sujeto tiene de un concepto es siempre un obstáculo epistemológico. Lo es porque esa forma de conocimiento es parcial: el modelo “funciona” para algunas situaciones matemáticas y no “funciona” para otras. Cuando el sujeto vive las experiencias contradictorias y se ve obligado a reorganizar sus formas de conocimiento tiene lugar un *acto de comprensión significativo*. En algunos casos, la reorganización no es total. No hay necesidad de desechar conocimientos o creencias; hay necesidad de adaptar el modelo a la experiencia o hay necesidad de “aumentar” algo al modelo. La estructura aumenta, pero no cambia. Esto puede suceder, al menos parcialmente, cuando “vemos” el concepto

desde otra perspectiva (e.g., la gráfica); somos capaces de “ver” el concepto como un todo, en cambio de verlo solamente a través de un conjunto de acciones (conceptual–procedimental); o pasamos de “ver” e interesarnos en objetos particulares a relacionar objetos o hacer operaciones mentales sobre estos objetos (intra–inter–trans). En todo caso, estas acomodaciones de nuestras estructuras mentales nos permiten ver nuevas cosas que antes no veíamos e interpretar nuestra manera anterior de ver las cosas desde nuevas perspectivas. En ese sentido, también hay reorganización.

En resumen, comprender es reorganizar nuestras formas de conocimiento de tal forma que estos modelos (estructuras mentales) sean coherentes con las experiencias que vivimos. El *sujeto* comprende algo (*objeto de comprensión*) cuando logra relacionarlo con algo contenido en sus estructuras mentales (*base de comprensión*) a través de una serie de *operaciones mentales* dentro de un *proceso de comprensión* compuesto por *actos de comprensión* que se *relacionan* entre sí. Algunos de estos actos de comprensión, los *significativos*, requieren que se *reorganicen* las estructuras mentales. De esta forma, el sujeto sobrepasa *obstáculos epistemológicos*.

Obstáculos epistemológicos

El concepto de obstáculo epistemológico parece estar en el centro de la discusión. Pero, ¿qué es un obstáculo epistemológico? Sierpinska no lo define formalmente. Termina diciendo que hay dificultades en la definición de este concepto en la educación matemática. Sin embargo, en la introducción, lanza esta frase: “[Los obstáculos epistemológicos son] formas de comprensión basados en algunos esquemas inconscientes de pensamiento que han sido adquiridos culturalmente y en creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y acerca de categorías fundamentales como número, espacio, causa, azar, infinito [que son] inadecuados con respecto a la teoría actual” (p. xi).

La mayor parte de las explicaciones acerca de los obstáculos epistemológicos las encontramos, dentro del libro, en dos fuentes: ejemplos de actividades de estudiantes (actuaciones) en las que se manifiestan sus formas de conocimiento (sus obstáculos epistemológicos) y en equivalencias entre los procesos de comprensión que un sujeto puede realizar y la evolución del conocimiento de la humanidad con respecto a un concepto. Esto es lo que ella llama el *análisis histórico–epistemológico*. El argumento central es que se puede conjeturar una equivalencia entre las formas de conocimiento (y sus consecuentes reorganizaciones) de un sujeto y la forma como la humanidad (e.g., la comunidad de matemáticos) ha evolucionado en su conocimiento de un concepto (aparece entonces la dimensión de las matemáticas como saber cultural). Esta equivalencia se sustenta con varios argumentos que manifiestan las características comunes de ambos procesos: la *secuencialidad*, en el sentido de que, en ambas dimensiones, “[...] cada estadio es el resultado de posibilidades abiertas por el estadio anterior y la condición necesaria para el siguiente” (p. 122); el paso por diversos *niveles* dentro de la categorización intra–inter–trans, propuesta por Piaget; la *racionalización de las palabras*, en el sentido de que una palabra se convierte en un término científico dentro de una teoría (modelo); y el proceso mediante el cual una palabra asume un significado *metafórico*. Esta equivalencia entre el *desarrollo cognitivo* y el *desarrollo histórico–epistemológico* es importante desde el punto de vista de la enseñanza y de la investigación. Desde el punto de vista de la enseñanza, porque si conocemos los obstáculos epistemológicos que ha tenido que sobrepasar la humanidad, podemos tener una idea de aquellos que tienen que sobrepasar nuestros estudiantes y tendremos luces para saber qué hacer como profesores para ayudarles a sobrepasarlos. Desde el punto de vista de la investigación, porque si conocemos estos obstáculos epistemológicos, podremos tener luces para construir categorías que nos permitan explorar los procesos de comprensión de los estudiantes.

Los obstáculos epistemológicos son “formas de conocimiento” (modelos mentales, estructuras mentales) con ciertas características. Pero, ¿cómo se crean (construyen) estas formas de conocimiento? ¿Cómo es el desarrollo cognitivo de un sujeto con respecto a un concepto? Aquí tenemos que considerar los conceptos de *operaciones mentales* y de *desarrollo cognitivo*.

Operaciones mentales y desarrollo cognitivo

Un acto de comprensión es la operación mental por medio de la cual el *sujeto* (de comprensión) relaciona un *objeto de comprensión* con unas *bases de comprensión* gracias a unas *operaciones mentales* dentro de unas *condiciones* (psicológicas y sociológicas). Nos interesamos, por ahora, por las operaciones mentales. Se identifican cuatro operaciones mentales. La *identificación*, que permite hacer resaltar un objeto de comprensión en el campo de la conciencia y que implica un cambio en las prioridades con las que se percibe el objeto de comprensión. La *discriminación*, operación mediante la cual es posible identificar la diferencia entre dos objetos. La *generalización*, que es la operación mental gracias a la cual es posible pensar el objeto de comprensión como un caso particular de otra situación. Finalmente, la *síntesis*, que es la búsqueda de una conexión común, de un principio unificador, de una similitud entre generalizaciones y su “agarre” como un todo (un cierto sistema) con esta base. Estas operaciones mentales permiten describir los estadios por los que un sujeto puede pasar en su proceso de comprensión de un concepto. Esta descripción general (no se hace con respecto a un concepto específico) está basada en la propuesta de Vygotsky sobre el desarrollo cognitivo. Se identifican cuatro estadios: la *sincretización*, la *complejización*, la *identificación* y *discriminación*, y la *síntesis*. Estos estadios describen el camino que un sujeto debe (o puede) seguir para llegar a tener una forma de conocimiento (con su correspondiente obstáculo epistemológico) acerca de un concepto. Pensamos entonces en un concepto (como una entidad que representa a una multitud —posiblemente infinita— de casos particulares de acuerdo a unas características y relaciones generales) y en un sujeto a lo largo de un período largo de tiempo².

En el estadio de *sincretización*, el sujeto logra identificar que un objeto concreto pertenece a un grupo con base en criterios vagos, afectivos y subjetivos. Esta identificación es inestable. En el estadio de *complejización*, las conexiones que se hacen entre los objetos concretos son objetivas, pero no hay lógica o estructura en estas conexiones, se dan razones de conexión variadas y se buscan parecidos físicos entre los objetos sin que haya un criterio lógicamente homogéneo. Se conforma entonces un “complejo” (*complex*) en el que ninguna característica es esencial. En estos dos estadios, la operación mental que está más involucrada es la *generalización*. En el siguiente estadio se forman los conceptos potenciales. Este es el estadio de *identificación* y *discriminación*. En él, se da una importancia relativa diferente a las características de los objetos y se generaliza en una sola característica común concreta. Estos conceptos potenciales se definen con base en acciones. Finalmente, en el estadio de *síntesis*, cuando se da el pensamiento conceptual, se hace una abstracción de características y se hace una síntesis en una sola globalidad. Se entra entonces en un sistema de conceptos, se es capaz de hacer cosas con el concepto, de definirlo y, sobre todo, de ser consciente del propio pensamiento acerca del concepto. Hay entonces un carácter sistémico que requiere tener los pensamientos y experimentar procesos sobre estos pensamientos. El desarrollo de los conceptos reales está entonces

2. Aquí es importante diferenciar entre las operaciones mentales y los estadios del desarrollo cognitivo, dado que utilizan términos comunes. Las primeras son eventos que suceden en el acto de comprensión cuando un sujeto relaciona un objeto de comprensión con sus bases de comprensión. En este caso, el objeto de comprensión es un concepto específico. Los segundos son estadios por los que sujeto puede pasar a lo largo de un período extenso de tiempo (e.g., la niñez y parte de la adolescencia) dentro del proceso que da lugar a su desarrollo cognitivo.

basado en la abstracción y generalización de pensamientos acerca de pensamientos y requiere que haya conciencia de que el objeto hace parte de un sistema que no acepta inconsistencias. Es al interior de este *sistema conceptual* que aparecen los obstáculos epistemológicos. Para tener un obstáculo epistemológico es necesario tener conceptos dentro de un sistema que involucra formas de pensar y creencias que no se pueden cambiar sin involucrar el sistema y que pertenecen a la esfera del pensamiento científico y sus fundamentos.

La anterior es la visión de largo plazo del desarrollo cognitivo. ¿Qué pasa en el corto plazo? ¿Cómo se van construyendo estas formas de conocimiento y de “qué” están compuestas? Tenemos entonces que entrar en el tema de los actos de comprensión y de los procesos de comprensión.

Actos, bases, objetos y procesos de comprensión

Si un acto de comprensión es la operación mental de relacionar un objeto de comprensión con unas bases de comprensión, entonces resulta interesante profundizar en los conceptos de objeto y bases de comprensión.

¿Cuáles son los objetos de comprensión y qué características tienen? En primera instancia, Sierpínska propone que los objetos matemáticos son creaciones de la mente como producto de nuestras propias definiciones. Por esta razón, cuando se va construyendo un objeto a través de actos de comprensión se da un juego dialéctico entre sensaciones de libertad, invención y creación de objetos, por un lado, y sensaciones de restricciones, de descubrimiento y de comprensión de sus propiedades, por el otro. Cuando se define un objeto, se está creando, hay libertad. Sin embargo, en el momento en el que el objeto ha sido definido, éste comienza a hacer parte de un sistema que impone restricciones y que caracteriza las propiedades del objeto y de sus relaciones con los demás objetos del sistema. Por otra parte, los procesos de comprensión tienen una *especificidad* matemática. No podemos saber cómo se puede comprender un objeto de comprensión hasta que no conozcamos en detalle ese objeto. Porque para ayudar al estudiante en este proceso, es necesario que nosotros conozcamos los obstáculos epistemológicos que están asociados a este objeto, de tal forma que podamos identificar los actos de comprensión significativos que queremos que el estudiante realice. Se identifican cuatro tipos de objetos de comprensión: comprensión de conceptos, de problemas, del formalismo matemático y de textos.

Por otra parte, las bases de comprensión es lo que hay en la mente del sujeto de comprensión y que le “permite”, de cierta forma, comprender un objeto de comprensión.

¿Qué son estas bases de comprensión, cómo están compuestas y cómo cambian?

Mi interpretación de las bases de comprensión es que están compuestas por representaciones mentales y que estas representaciones mentales se expresan en diversos medios (gráfico, simbólico, verbal, entre otros) y que representan una cierta capacidad del sujeto para “ver” y comprender el objeto de comprensión desde un espectro que va de lo puramente procedimental (una actividad sólo se puede expresar mostrándola) hasta lo conceptual (hay algún tipo de esquema verbalizado de la actividad). Hay entonces dos dimensiones en las bases de comprensión con respecto a un concepto: la de los sistemas de representación (Janvier, 1987) y la de la dualidad operacional–estructural (Sfard, 1991).

Dependiendo del “estado” de estas bases de comprensión el sujeto es capaz de hacer o no ciertas actividades con respecto a un objeto de comprensión (concepto). Nos encontramos entonces con las dos clasificaciones de Piaget para las acciones. En la primera clasificación, la de las acciones físicas, se tienen tres etapas I, II y III³. En la primera etapa,

3. Las dos clasificaciones de Piaget que se presentan en este párrafo son también diferentes, y al menos parcialmente independientes, de las operaciones mentales y de los estadios del desarrollo cognitivo presentados anteriormente.

el sujeto “sabe al hacer”, se concentra en los resultados y justifica su acción con base en la acción misma. En la segunda, hay una cierta conceptualización que permite anticipar la acción inmediata y las operaciones mentales suceden sobre acciones. En la última etapa de esta clasificación, tiene lugar una “abstracción reflejada”, la acción está guiada por la teoría y el sujeto se concentra en los mecanismos que rigen esta teoría.

La segunda clasificación de Piaget se refiere a las acciones que el sujeto es capaz de hacer sobre los objetos. En el etapa *intra*, el sujeto se interesa en objetos particulares; en la etapa *inter*, el sujeto es capaz de establecer relaciones entre los objetos y reflexionar sobre estas relaciones; y en la etapa *trans*, las operaciones mentales se transforman en objetos de reflexión y se conforman teorías.

Las reflexiones anteriores muestran cómo una forma de conocimiento puede evolucionar sin necesidad de que haya cambios sustanciales en las estructuras mentales. Esto es lo que algunos llaman *adaptación* de estas estructuras.

Quedan algunas preguntas por responder. Estas se refieren a la calidad de la comprensión, al papel del profesor y de la interacción social en los procesos de comprensión, y al tema del significado.

Calidad de la comprensión y el proceso de enseñanza

Sierpinska evita (y hace énfasis en esto) el tema de la “buena” comprensión. La comprensión no se juzga. No obstante, el tema de la calidad de la comprensión se puede mirar desde dos perspectivas: la del sujeto de comprensión y la de alguien “externo” que juzga la comprensión de ese sujeto. Desde el punto de vista del sujeto, consideramos que hemos entendido cuando tenemos la sensación de que el objeto de comprensión “cuadra” dentro de nuestras bases de comprensión; cuando encontramos un principio unificador que nos permite concebir algo como una globalidad (las unidades están separadas y la comprensión las reúne); cuando logramos reducir el objeto de comprensión a algo más sencillo o más fundamental y logramos experimentar algo “desde adentro”, sin clasificar, sin mirar sus propiedades sistémicas, en toda su riqueza y variedad (lo que tiene un matemático que no tiene un no-matemático); y cuando logramos llegar a la esencia de las cosas (*esencialismo*; se va más allá de lo observable) o logramos conocer las reglas con las que se juega el “juego” (*fenomenalismo*).

Desde el punto de vista de quien juzga la comprensión de otro, hay que mirar la comprensión de un concepto como un sistema de conocimientos y creencias acerca del mismo y debemos juzgar si la base de comprensión con la que se relaciona el objeto de comprensión puede ser aceptada como una forma de comprender ese objeto. Entonces este sistema se puede juzgar de acuerdo a su consistencia interna (no da lugar a actuaciones contradictorias); de acuerdo a la consistencia con la “teoría” generalmente aceptada; si marca una transferencia a un nivel diferente de pensamiento (intra-inter-trans); o si permite sobrepasar un obstáculo epistemológico.

Con base en esta manera de ver la comprensión, ¿cuál es el papel del profesor en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? “No podemos sencillamente decirle al estudiante que ‘ahora reorganice’ sus comprensiones anteriores, no podemos *mostrarle* qué es lo que debe cambiar y cómo debe lograr esos desplazamientos de foco o generalidad, porque tendríamos que hacer eso en términos de un conocimiento que él todavía no ha adquirido. Por lo tanto, debemos proponerle a nuestros estudiantes nuevas situaciones problemáticas y esperar que surjan todo tipo de dificultades, malas comprensiones y obstáculos. Nuestro principal trabajo como profesores es el de ayudar a nuestros estudiantes a sobrepasar estos obstáculos, al hacernos conscientes de las diferencias. En ese momento, tal vez, los estudiantes serán capaces de hacer las reorganizaciones necesarias” (pp. 121-122). Si ésta es la función del profesor, ¿qué papel juega la explicación?

El propósito de la *explicación* es el de fundamentar la comprensión en una nueva base de comprensión. Hay *explicaciones científicas* (en las que se buscan bases más conceptuales) y *explicaciones didácticas* (en las que se buscan bases más familiares). En las explicaciones didácticas se identifican cuatro grandes categorías: la utilización de modelos, los ejemplos, las formas de hablar y las metáforas. Los modelos se utilizan para representar los objetos con la ayuda de bases familiares. Sin embargo, los modelos tienen problemas porque no necesariamente explican por qué las cosas se definen como se definen y a veces el modelo se convierte en el objeto de la enseñanza. Algo similar sucede con los ejemplos. Al presentar ejemplos paradigmáticos de un concepto, estamos tratando de resaltar algunas de las características de este concepto. Pero esto no quiere decir que el estudiante pueda discriminar estas características y es posible que él no pueda ver la globalidad a la que pertenece el ejemplo y que le asigne al concepto características que son exclusivas del ejemplo (e.g., el medio de representación en el que se presenta). Con las formas de hablar y las metáforas se busca dar una base sobre la cual fundamentar algo que se ha identificado y para lo cual no hay un lenguaje. Estas formas de hablar ordenan nuestra experiencia y la hacen cuadrar con nuestras estructuras mentales. De esta forma, puede tener lugar un acto de comprensión significativo que causa una reorganización de nuestros marcos conceptuales y prepara el terreno para la formación de un concepto.

La discusión anterior tiene que ver parcialmente con algunas de las preocupaciones de la posición constructivista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El constructivismo no solamente postula que es el sujeto quien, de manera activa, construye su conocimiento. También postula que esta construcción sucede con motivo de experiencias que el sujeto vive y que generan conflictos por estar en contradicción con las formas de conocimiento que tiene el sujeto en ese momento. Algunos constructivistas (los no-radicales) afirman que la interacción con el profesor y con los compañeros es la principal fuente de conflictos en el proceso de comprensión. Es evidente que, dentro del salón de clase, la comprensión se da dentro de un ambiente social en el que nosotros, como profesores, podemos jugar con algunas variables, en particular, en el proceso conjunto de construcción del contrato didáctico (Brousseau, 1986). Sin embargo, aunque el constructivismo sugiere que las situaciones de comunicación y discusión son importantes para los procesos de comprensión, estas situaciones no son muy comunes y, además, no funcionan por sí solas. Lo importante no es que haya comunicación y discusión. Lo importante es que esta comunicación y discusión esté enfocada de tal forma que le permita a los estudiantes vivir experiencias que les generen conflictos, que los induzcan a tener actos de comprensión significativos y, por consiguiente, que los obliguen a reorganizar sus estructuras conceptuales de tal forma que puedan sobrepasar sus obstáculos epistemológicos.

Terminamos con el tema del primer capítulo del libro: el tema del *significado*. Significado y comprensión son dos términos que van juntos. No se pueden definir de manera independiente. Sierpínska asume la posición de tomar la comprensión como término de partida. Define entonces el significado como una cierta forma de comprensión (una clase de comprensiones). El significado es entonces un concepto social. El significado de una expresión dentro de una institución social es la forma como ese concepto se comprende dentro de la institución: los miembros de esa institución (que podría ser el salón de clase) aplican la expresión a los mismos objetos; usan el mismo método para tomar decisiones; la utilizan en el mismo modo gramatical; y le atribuyen el mismo aspecto emotivo.

Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), pp. 33-115.

- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. (1996). Comprendiendo la comprensión en matemáticas. *Revista EMA*. 1 (3).
- Resnick, L.B., Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: M.E.C. - Paidós.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Basingstoke, UK: Falmer.