

## CONTRIBUIÇÕES DAS ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE DO NÚMERO INTEIRO RELATIVO

### CONTRIBUTIONS OF PRELIMINARY ANALYSES OF DIDACTIC ENGINEERING IN TEACHER PROFESSIONAL KNOWLEDGE OF THE RELATIVE INTEGER NUMBER

Raquel Gomes de Oliveira  
Universidade Estadual Paulista – UNESP  
[raquel.g.oliveira@unesp.br](mailto:raquel.g.oliveira@unesp.br)

Alex Ribeiro Batista  
Universidade Estadual Paulista – UNESP  
[alex.ribeiro@unesp.br](mailto:alex.ribeiro@unesp.br)

#### Resumo

O conhecimento profissional do professor de Matemática, ancorado no domínio dos objetos de conhecimento e do saber como ensiná-los, tem motivado a realização de pesquisas, cujos resultados implicam sua compreensão e ampliação como campo de conhecimento e perspectivas para seu desenvolvimento desde a formação inicial de professores. Neste artigo, descreveremos a fase 1 (Análises Preliminares) de uma pesquisa, que objetiva analisar o desenvolvimento do conhecimento profissional de licenciandos de Matemática sobre Números Inteiros Relativos, tendo em vista a docência a ser realizada na Educação Básica. Ao adotar a perspectiva teórico-metodológica da Engenharia Didática, a fase 1 objetivou que os licenciandos conhecessem as dimensões epistemológica, cognitiva, didática e também curricular do Número Inteiro Relativo. Os resultados mostraram que saberes docentes necessários ao alcance de objetivos curriculares do Número Inteiro Relativo fundamentaram-se na compreensão de seus aspectos epistemológicos, cognitivos, didáticos e curriculares e que dúvidas e dificuldades, em qualquer um desses aspectos, podem prejudicar este alcance. Concluímos que esses resultados apresentam-se como fundamentais para as próximas fases da pesquisa, de acordo com pressupostos metodológicos da Engenharia Didática e para alcançar o objetivo de desenvolver conhecimento profissional do professor de Matemática, desde sua formação inicial.

**Palavras-chave:** Número Inteiro Relativo, Engenharia Didática. Conhecimento Profissional Docente, Formação de Professores de Matemática.

#### Abstract

The Mathematics teacher professional knowledge, anchored in the domain of knowledge objects and knowing how to teach them, has motivated the realization of research, whose results imply their understanding and expansion as a field of knowledge and perspectives for its development

from initial teacher education. In this article, we will describe phase 1 (Preliminary Analyses) of a research, which aims to analyze the development of professional knowledge of Mathematics graduates on Relative Whole Numbers, in view of the teaching to be carried out in Basic Education. By adopting the theoretical-methodological perspective of Didactic Engineering, phase 1 aimed at making the undergraduate students aware of the epistemological, cognitive, didactic and also curricular dimensions of the Relative Integer Number. The results showed that teaching knowledge necessary to achieve curricular objectives, of the Relative Integer Number, was based on the understanding of its epistemological, cognitive, didactic and curricular aspects and that doubts and difficulties in any of these aspects can impair this reach. We conclude that these results are fundamental for the next phases of the research, according to methodological assumptions of Didactic Engineering and to achieve the objective of developing professional knowledge of the Mathematics teacher, since his initial formation.

**Keywords:** Relative Integer Number, Didactic Engineering. Teacher Professional Knowledge, Mathematics Teacher Education.

## INTRODUÇÃO

No Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) a ideia de competência é a mesma da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que a define como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (BRASIL, 2017, p. 8). Nessa perspectiva, um currículo “indica claramente o que os estudantes devem “saber” (em termos de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer”...” (SÃO PAULO, 2019, p. 35) para que se alcancem as finalidades curriculares previstas na BNCC.

Igualmente apoiadas no desenvolvimento de competências e habilidades específicas, identificadas com saberes da docência, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores (DCN) (BRASIL, 2019) elucidam a composição desses saberes pelo conhecimento, pela prática e pelo engajamento profissionais. Do ponto de vista específico da prática docente, o conhecimento profissional do professor se caracteriza pelo domínio dos objetos de conhecimento e do saber como ensiná-los, além do saber sobre como os alunos da Educação Básica aprendem (BRASIL, 2019).

Desenvolver esse conhecimento pode ser justificado, por exemplo, pela pesquisa de Oliveira (2019), sobre erros e dificuldades com Números Inteiros Relativos (NIR) na perspectiva de licenciandos de Matemática que, como estagiários na Educação Básica, foram questionados se no ensino de NIR, os professores reproduzem “... a indagação de origem, a questão ou necessidade que levou à construção de um conhecimento – que já

está dado e precisa ser apropriado e aplicado, não obrigatoriamente ser “descoberto” de novo.” (SÃO PAULO, 2011, p. 21), oportunizando aos alunos compreenderem a necessidade de ampliar o Conjunto dos Números Naturais, a fim de que a resolução de problemas, impossível com esses números, possa agora acontecer.

Respostas afirmativas da maioria dos licenciandos de Matemática, para esta questão, não se alinham aos resultados de desempenho de alunos da Educação Básica em questões sobre o Número Inteiro Relativo (SÃO PAULO, 2012; SÃO PAULO, 2019). Como esses resultados refletem o processo de ensino-aprendizagem deste objeto de conhecimento e o desenvolvimento de competências e habilidades a ele relacionadas, foi possível concluir que esses licenciandos apresentam dificuldades quanto ao entendimento do NIR e de sua metodologia de ensino, em face do que foi observado no ensino de Matemática da Educação Básica. Nesse sentido, entendemos a pertinência de realizar uma pesquisa no campo da intersecção entre perspectivas formativas para o professor de Matemática e a elaboração de saberes docentes relativos ao conhecimento profissional docente do Número Inteiro Relativo.

Ainda respostas dos licenciandos foram fundamentais para as questões: o que sabem os futuros professores de Matemática sobre o Número Inteiro Relativo e sobre suas operações numéricas? Quais ações, desde a formação inicial, podem ser consideradas formativas, oportunizando a licenciandos de Matemática o desenvolvimento do conhecimento profissional (BRASIL, 2019) sobre Números Inteiros Relativos?

Para responder a esses questionamentos, estamos realizando uma pesquisa exploratória, que utiliza pressupostos da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e de ensino (ARTIGUE, 1988; 1995, 1996, 2020). O objetivo da pesquisa é analisar a elaboração do conhecimento profissional docente sobre Números Inteiros Relativos, tendo em vista a perspectiva de trabalho docente que, conforme diretrizes curriculares, objetiva desenvolver em alunos da Educação Básica competências e habilidades associadas a este objeto de conhecimento.

Neste artigo apresentamos ações e resultados da fase 1 da pesquisa (Análises Preliminares), que mostraram que saberes docentes relacionados a competências e habilidades para analisar atividades do 7º ano sobre o Número Inteiro Relativo (NIR), disponibilizadas pelo Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), tendo em vista seus objetivos curriculares, fundamentaram-se no conhecimento de aspectos epistemológicos,

cognitivos, didáticos e curriculares deste conceito. Concluímos que a continuidade da pesquisa, considerando-se seu objetivo e pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, deverá fundamentar-se em resultados e conclusões da fase 1 relativamente às dificuldades e compreensões dos licenciandos, do 3º e do 4º ano do curso de licenciatura em Matemática, que caracterizaram o processo de conhecer sobre o Número Inteiro Relativo e de saber como ensiná-lo.

### **UMA REFERÊNCIA TEÓRICA PARA O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO NÚMERO INTEIRO RELATIVO**

A partir de realizações em sala de aula, contemplando observação, análise, reelaboração de sequências de ensino, ou seja, um esquema experimental (ARTIGUE, 1995, 2020; DOUADY, 1995), a Engenharia Didática é considerada tanto como uma metodologia de pesquisa como de ensino (ARTIGUE, 1988, 1995, 1996, 2020; DOUADY, 1995; CARNEIRO, 2005; ALMOULOU, SILVA COUTINHO, 2008), sendo composta por 4 fases: 1) Análises Preliminares; 2) Análise a Priori; 3) Experimentação e 4) Análise a Posteriori (Validação) que, respeitadas suas caracterizações, articulam-se, podendo ter intersecções.

As Análises Preliminares permitem elaborar um quadro teórico (ARTIGUE, 1995, 2020; DOUADY, 1995) que elucida a epistemologia do objeto de conhecimento a ser ensinado, seu tradicional ensino e suas consequências, as concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos epistemológicos (BROUSSEAU, 1976 apud CID, 2000) e análise do contexto no qual serão desenvolvidas as outras fases da Engenharia Didática.

Aspectos metodológicos da Engenharia Didática em pesquisas na Educação Matemática são apresentados por Almouloud e Silva Coutinho (2008) e por Lopes, Palma e Franco de Sá (2019). Especificamente para pesquisas sobre formação de professores de Matemática, esses aspectos metodológicos podem ser encontrados nas pesquisas de Alves (2016), Alves e Catarino (2017), Alves e Dias (2017) e Oliveira e Pereira (2019).

Na pesquisa que realizamos, a Engenharia Didática é utilizada como metodologia de ensino. Logo, o quadro teórico originado nas Análises Preliminares contempla dimensões que compreendem o processo de ensino-aprendizagem de Números Inteiros Relativos: a dimensão epistemológica, associada às questões do saber sobre Números

Inteiros Relativos, a dimensão cognitiva associada a quem aprende e as dimensões didáticas e curriculares relativas às características do sistema de ensino.

Portanto, entendemos que as Análises Preliminares coadunam com objetivo da pesquisa quanto a analisar a elaboração do conhecimento profissional docente sobre o Número Inteiro Relativo, ao considerar que seu processo de ensino-aprendizagem objetiva desenvolver em alunos da Educação Básica competências e habilidades associadas a este conhecimento.

O Número Inteiro Relativo formalmente é uma generalização do Número Natural, que parte das propriedades do Conjunto dos Números Naturais (Conjunto  $N$ ), mas que amplia a fim de responder à situação  $a - b$ , com  $b > a$ , impossível de ser resolvida no Conjunto  $N$ . Logo, “... à diferença  $a - b$  chamaremos de número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for  $a > b$ ,  $a = b$ ,  $a < b$ .” (CARAÇA, 2003, p. 92)

Contrariamente ao encadeamento lógico, que não é passível de dúvidas, nem de dificuldades de aceitação, a conceitualização do Número Inteiro Relativo historicamente apresenta dificuldades e conflitos de diferentes naturezas, mostrando que a compreensão e a aceitação do “novo número” como ferramenta e objeto matemático, constituem-se de modo diferente de sua formalização (GLAESER, 1985; BOYER, 1991; STRUIK, 1992).

[...] a palavra “negativo” tem o significado de negação, isto quer dizer que se trata de “não – números”, e esta expressão é a mais adequada para mostrar as dificuldades que se opunham ao espírito humano na conquista de novos domínios no reino dos números (KARLSON, 1961, p. 42).

Glaeser (1981) apud Cid (2000) sistematizou obstáculos epistemológicos específicos para o número negativo. Contudo, apesar de ter iniciado seu artigo “... referindo-se à noção de obstáculo em Bachelard e Brousseau, em seguida, esclarece que considera prematuro especificar demais o termo ‘obstáculo’ e que o usa em um sentido amplo, igualando-o com ‘dificuldade’, ‘limiar’, ‘sintoma’, etc...” (CID, 2000, p. 5).

Tomando obstáculos epistemológicos como dificuldades presentes na compreensão e na aprendizagem do número negativo, Cid (2000) elucida amplamente significações para as mesmas. Em resumo, a dificuldade para lidar com quantidades isoladas identifica-se com a não aceitação de medidas negativas: o número não positivo representava a quantidade que faltava e não uma medida. Também ao dar um sentido às quantidades negativas isoladas, os números negativos não eram tidos como números, mas sim como elementos isolados que atendiam às dinâmicas da própria Matemática.

Compreender a reta numérica como duas semirretas opostas, com origem no zero, é outra dificuldade, principalmente para a ordenação e a comparação entre Números Inteiros Relativos, pois a não consideração de um campo numérico único e crescente da esquerda para a direita, leva a não reconhecer que entre dois números inteiros relativos, o maior é sempre o que está à direita. Também a mudança conceitual do zero absoluto, como ausência de quantidade, para o zero relativo, como uma origem ou referência inicial, é um dos obstáculos que contribuíram para aceitação do número negativo.

Superar a ideia de que a Matemática só existiria a partir do mundo real, sem recorrer a abstrações é o que caracteriza a estagnação no estágio das operações concretas apresentada por Matemáticos em diferentes épocas. De acordo com Glaeser (1981) apud Cid (2000) um salto epistemológico decisivo foi efetuado na Antiguidade, quando se proclamou que os objetos matemáticos deveriam ser convenientemente idealizados.

A ideia de um único modelo para operações entre Números Inteiros Relativos, que atenda às propriedades da Adição e da Multiplicação, além de resultar na queda de acertos com essas em operações, após o ensino da Multiplicação, conforme pesquisas citadas por Cid (2000), mostra que ensinar o Número Inteiro Relativo com o modelo de “ganhos e perdas”, apesar de explicar a estrutura aditiva, torna-se um obstáculo para a compreensão da estrutura multiplicativa (CID, 2000).

Pesquisas como a de Pommer (2010) sobre diversas abordagens para regras de sinais, subentendidas nessas operações, levam a entender a necessidade do trabalho com diferentes modelos a fim de que se percebam características comuns e não comuns necessárias para a elaboração de regras.

O trabalho de Sá e Salgado (2011) buscou investigar se os alunos conseguiriam descobrir e enunciar regras operatórias adequadas para o cálculo da adição e multiplicação de números inteiros sem que os docentes as tenham apresentado previamente. A análise dos resultados apontou que o ensino por atividade mediada pelo uso didático de uma calculadora, com o uso da tecla parênteses, possibilitou que os alunos descobrissem e enunciassem regras operatórias válidas para o cálculo das operações de adição e multiplicação com números inteiros.

Para Hillesheim e Moretti (2013), o ensino de adição, multiplicação e subtração precisa ser ampliado dos Números Naturais aos Números Inteiros Relativos. Ao analisarem as respostas de alunos do 7º ano do ensino fundamental, quanto a essa

ampliação, com base na noção de congruência semântica, encontraram que em problema cuja formulação não apresenta congruência semântica com a operação requerida na sua solução tende haver um índice de acerto menor em relação a problema que mobiliza os mesmos conhecimentos matemáticos, mas que possui esse tipo de congruência, o que leva a atentar para a questão da ressignificação das operações com NIR.

Canal e Queiroz (2012) analisaram a contagem de pontos através de um jogo com Números Inteiros Relativos. Mesmo os resultados mostrando associação entre procedimentos mais simples por alunos do 7º ano e entre mais complexos por alunos do 9º ano, na maioria das partidas, os alunos contaram incorretamente os pontos. Assim, apesar da associação entre maior nível de escolarização e estratégias mais complexas, estas não determinaram a contagem correta no jogo, demonstrando dificuldade na realização e na compreensão das operações com Números Inteiros Relativos.

Hillesheim e Moretti (2020) analisaram a congruência semântica em situações de ensino da regra dos sinais com alunos do 7º ano do ensino fundamental. Os resultados mostraram que as situações de ensino em que a congruência semântica se destacou da equivalência referencial, exigiu um custo cognitivo maior quando comparado aos casos em que a congruência semântica incidiu com a equivalência referencial.

De modo geral, a história nos revela a complexidade para se compreender o Número Inteiro Relativo, quando este é um número negativo. Esta complexidade tem se mostrado atual tanto na diversidade de pesquisas como em seus focos de investigação e resultados que, em sua maioria revelam dificuldades de conceitualização e de operações com esses números. Em termos curriculares, é possível entender que essas dificuldades estejam associadas à abordagem dos Números Inteiros Relativos que tem acontecido há tempos: em muitos casos, através da memorização de regras para efetuar cálculos em situações descontextualizadas, fazendo com que muitos alunos não reconheçam os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não obtêm êxito na aplicação, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do conceito de número inteiro (BRASIL, 1998).

Reelaborar a ideia de número e aquelas associadas à adição e multiplicação e a suas representações é fundamental para a aprendizagem do Número Inteiro Relativo (COQUIN-VIENNOT, 1985 apud CID, 2000). Se o Número Natural representa uma contagem, o Número Inteiro Relativo representa uma magnitude investida de qualidade

predicativa, a partir das operações de somar, tirar, comparar e completar (TEIXEIRA, 1993; CID, 2000). A qualidade investida à quantidade é uma relação orientada, pois se aplica ao estado do número em termos de uma referência (zero origem), a partir da qual, quantidades iguais com qualidades opostas se anulam e quantidades diferentes com qualidades opostas se compensam (CARAÇA, 2003).

No Conjunto N, a Adição se identifica com acrescentar e a Subtração com tirar, comparar e completar. No conjunto Z, além desta tripla natureza da subtração e do sinal “-” (BELL, 1982, GALLARDO, 1996 apud CID, 2000) é preciso considerar que essas operações acontecem por composições entre quantidades, cujas qualidades definem a operação realizada: para qualidades iguais, a Adição é uma soma na qual permanece a qualidade comum aos números adicionados:  $(-4) + (-3) + (-2) = -4 -3 -2 = -9$ , sintetizada na regra: “sinais iguais soma, e dá o sinal comum.” (TEIXEIRA, 1993).

Para números com qualidades opostas e dada a propriedade na qual quantidades iguais com qualidades opostas se anulam, a Adição é uma compensação entre quantidades:  $(-7) + (+3) = (-4) + (-3) + (+3) = (-4) + 0 = -4$ , sintetizada na regra: “sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior” (TEIXEIRA, 1993).

Na consideração da tripla natureza da Subtração em Z e do seu respectivo sinal “... é fundamental que seu esquema de assimilação esteja estruturado com base na abstração do invariante da inversão e não simplesmente no conceito de tirar.” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Assim, tanto em operações binárias  $((+8) - (-6) = +8 + 6 = +14)$  como nas unárias  $(-(-6) = +6)$  é preciso atribuir ao símbolo negativo o significado de um operador de inversão de operações e de qualidades. Essa característica da Subtração em Z, em questões de ensino e aprendizagem, tem como consequência o repensar de modelos didático-pedagógicos que fazem uso das operações em Z (CID, 2000; 2002; 2003).

Para Teixeira (1993), na aprendizagem do NIR concorrem o entendimento e a aplicação de suas propriedades “... a outro contexto com novos significados o que supõe uma reorganização do conceito de número na medida em que se incorporam a ele qualidades até então desconhecidas ou não explicitadas” (TEIXEIRA, 1993, p. 62). O ensino de NIR deve ocorrer com diversas situações e representações a fim de que o aluno perceba o que permanece inalterado em cada situação. Essa percepção é construída

através da observação e do entendimento das propriedades de cada contexto, que permitem agir sobre este contexto ou situação (VERGNAUD, 1990, 1998, 2009).

Portanto, para Vergnaud (1990, 1998, 2009) na formação de um conceito não se separam os conjunto de situações (S), de invariantes operatórios (I) (propriedades, relações, funções, operações) e o de representações simbólicas (R), dado que este último reporta ao conceito em si com suas propriedades e respectivas situações. Essa indissociação entre S, I e R implica à conceitualização a necessidade de representar um conceito de diferentes modos e igualmente a discriminação dessas representações face à utilização de um conceito em diferentes situações.

A compreensão do NIR e a utilização de habilidades e competências para resolver problemas, assentam-se não em definições, mas em processos nos quais os alunos dominam as propriedades que regem o NIR como um sistema (TEIXEIRA, 1993). Essa ideia de formação conceitual implica entender que questões e dificuldades da compreensão do NIR podem justificar experiências docentes nas quais licenciandos de Matemática tenham oportunidades de refletir e de agir a partir do que sabem sobre Números Inteiros Relativos e do que sabem sobre seu ensino com vistas à elaboração e ampliação de respectivos saberes docentes.

Essas elucidações históricas e epistemológicas (KARLSON, 1961; GLAESER, 1985; BOYER, 1991; STRUIK, 1992; CID, 2000) e cognitivas (VERGNAUD, 1990, 1998, 2009; TEIXEIRA, 1993; CID, 2000) que apresentamos compuseram um referencial fundamental para pesquisarmos o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor de Matemática quanto ao saber sobre o Número Inteiro Relativo e ao seu processo de ensino-aprendizagem no sentido das DCN (BRASIL, 2019).

## **AÇÕES METODOLÓGICAS**

Para analisar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor de Matemática quanto ao Número Inteiro Relativo e seu processo de ensino-aprendizagem, desenvolvemos uma pesquisa experimental, na qual a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988, 1995, 1996, 2020) é tomada como uma metodologia de ensino. A pesquisa está sendo realizada como parte de atividades de um projeto de Residência Pedagógica em Matemática (CAPES, BRASIL, 2020) em uma escola estadual paulista, com a participação de 02 professores de Matemática desta escola, de 16 licenciandos dos 3º e 4º

anos do curso de Licenciatura em Matemática, de 01 doutorando de pós-graduação em Educação e da coordenadora do projeto, todos de uma mesma universidade pública.

A Engenharia Didática é composta por: 1) elaboração de fundamentação teórica a partir de conhecimentos epistemológicos, didáticos e cognitivos (Análises Preliminares); 2) determinação de hipóteses e do que será modificado (variável global e local) (ARTIGUE, 1988), com descrição da elaboração e reelaboração de atividades e materiais pedagógicos, a fim de observar e analisar essas modificações quanto ao desenvolvimento do que se busca aprender; (Análise a Priori); 3) implementação das atividades e materiais pedagógicos (Experimentação); e 4) comparação entre Análise a Priori e observações e dados posteriores dada a Experimentação (Análise a Posteriori e Validação) para que seja feita a validação ou não da(s) hipótese(s) formuladas.

Realizamos as Análises Preliminares (ARTIGUE, 1995, 2020; DOUADY, 1995) objetivando que os licenciandos conhecessem as dimensões: epistemológica por meio de leituras de textos sobre a epistemologia do Número Inteiro Relativo e cognitiva e didática ao analisar o desempenho de alunos da Educação Básica em Questões do SARESP e da Avaliação de Aprendizagem em Processo e igualmente as atividades da Situação de Aprendizagem 2, do Material SP FAZ ESCOLA, Caderno do Professor, Matemática – 7º Ano, volume 2. (CURRICULO PAULISTA, SÃO PAULO, 2019).

No Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), uma Situação de Aprendizagem se identifica com um conjunto de atividades sobre objetos de conhecimento curricular, cujos objetivos se relacionam ao desenvolvimento de habilidades associadas a estes objetos de conhecimento. Caracterizam Situações de Aprendizagem ter “[...] como foco o estudante no centro das aprendizagens, atuando de forma colaborativa, interativa e responsável durante o processo de aprendizado.” (SÃO PAULO, 2019, p. 2).

Neste artigo, apresentaremos resultados sobre a análise realizada pelos licenciandos da Situação de Aprendizagem 2. Essa análise ocorreu como uma atividade orientada na qual individualmente os licenciandos responderam por escrito a questões sobre o significado, a leitura, a comparação e ordenação de Números Inteiros Relativos em diferentes contextos, incluindo a reta numérica e a resolução de problemas envolvendo operações com esses números.

Sobre o significado do Número Inteiro Relativo, os licenciandos responderam a questão 1, indicando os significado(s) associado(s) e itens em que aparecem (parte A) e

também dificuldades sobre o número negativo (GLAESER, 1985; CID, 2000) em atividades e itens (parte B). Na questão 2, justificando suas respostas, os licenciandos responderam sobre o se as atividades oportunizam aos alunos entenderem os significados do número negativo, que haviam indicado na questão 1 (parte A).

A análise da ordenação e comparação de NIR ocorreu a partir de 3 questões, com justificativa de respostas para as questões 1 e 2. Na questão 1, a parte A era sobre se a atividade com a reta numérica oportuniza ao aluno diferenciar a ideia de zero absoluto da ideia de zero relativo. Já a parte B versava sobre o entendimento da reta como um campo de duplo sentido e ordenado da esquerda para a direita. Na questão 2, o interesse era sobre a dificuldade do aluno para ordenar e comparar Números Inteiros Relativos e na questão 3, buscou-se saber se a adição entre inteiros opostos é explorada nas atividades.

Para análise dos dados, utilizamos a Análise de Conteúdo (SILVA e FOSSA, 2015), considerada “[...] uma técnica para ler e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos, que analisados adequadamente nos abrem as portas ao conhecimento de aspectos e fenômenos da vida social de outro modo inacessíveis.” (OLABUENAGA e ISPIZÚA, 1989 apud MORAES, 1999, p. 7), sendo possível “[...] reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum.” (1999, p. 7). Nesse sentido, apresentaremos resultados e análises que realizamos e discussões relativas aos mesmos e ao objetivo da pesquisa.

## RESULTADOS E ANÁLISES

A tabela 1 apresenta dados de respostas dos licenciandos para a questão 1 da análise das atividades, categorizadas a partir de seus objetivos no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019). As respostas identificam os significados do Número Inteiro Relativo nos itens das respectivas atividades.

**Tabela 1** – Significados do Número Inteiro Relativo identificados em atividades do Currículo Paulista

Caracterização da Atividade	Significado identificado para o número inteiro relativo (NIR)	Item	Total de Licenciandos
(A) – Operações com números inteiros relativos	A1- NIR como estado qualitativo de uma quantidade numérica associada a um contexto (um saldo negativo, um saldo positivo, falta/ausência de quantidade, dívida, prejuízo, ponto ganho, ponto perdido).	1.2	10/16 (62.5%)
		2.1 (b)	03/16 (18.8%)
		3.5	09/16 (56.3%)
		3.7	04/16 (25%)
		3.8	05/16 (31.3%)
		4.1; 4.2; 4.3; 4.4 e 4.6	09/16 (56.3%)
	A2- NIR como estado qualitativo (positivo ou negativo) a ser utilizado nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.	4.5; 4.7 e 4.8	08/16 (50%)
	A3- NIR como medida de temperatura, sendo este resultado da variação entre uma quantidade inicial e final	2.2 (b)	05/16 (31.3%)
		2.3	03/16 (18.8%)
		3.6	07/16 (43.8%)
3.9		04/16 (25%)	
(B) – Comparação e ordenação entre números inteiros relativos	B1- NIR como estado qualitativo de uma quantidade (um saldo negativo, uma posição, uma temperatura) a partir de comparações e ordenações.	2.1 (a)	09/16 (56.3%)
		2.2 (a)	03/16 (18.8%)
	B2- NIR como oposto ou simétrico de outro número inteiro relativo.	3.2	09/16 (56.3%)
	B3- NIR como estado qualitativo a ser de um número inteiro a ser utilizado em comparações e ordenações.	3.3	06/16 (37.5%)
(C) – Comparação e ordenação entre números inteiros relativos na reta numérica	NIR como posição em relação ao zero na reta numérica e em relação a outros números inteiros relativos na reta numérica.	3.1	09/16 (56.3%)
		3.4	07/16 (43.8%)

Fonte: os autores.

De acordo com a tabela 1, os significados identificados para o NIR, associam-se a atividades de: A) Operações com NIR; B) Comparação e ordenação entre NIR e C) Comparação e ordenação entre NIR na reta numérica. Nas operações com Números Inteiros Relativos, A1 apresenta uma expressiva variação de frequência nos itens 1.2 e 2.1, que remetem aos significados de saldo negativo/ positivo, falta/ausência de quantidade, dívida, prejuízo e ponto ganho/perdido. O mesmo ocorrendo em A3, nos itens 3.6 (43.8%) e 2.3 (18.8%), para o entendimento de NIR como temperatura.

Variações de frequências em itens de A1, associados às mesmas ideias ou conceitos, levam a refletir sobre as situações nas quais estes conceitos se apresentam. Para responder a questão do item 1.2 era preciso considerar a adição e a com expressos dados numéricos associados a peso de alimentos: quilos de arroz, de feijão, de açúcar e litros de óleo em uma situação de compra e venda, além de necessitar da representação matemática do resultado das ações realizadas com dados desta situação.

Três (18.8%) dos 16 licenciandos identificaram um significado para NIR no item 2.1 (b), que solicitava a explicação para a representação do saldo de gols de um time. Entende-se que esta baixa frequência de identificação possa estar associada não à identificação deste significado como um saldo positivo ou negativo, mas à dificuldade de explicar o porquê de ser registrado assim. Portanto, inferimos que para a maioria dos 16 licenciandos o entendimento da origem de um saldo “menos 8”, ou 8 negativo, não está consolidado, rerepresentando uma dificuldade epistemológica, neste caso, a dificuldade para lidar com quantidades isoladas no sentido de Glaeser (1985) e Cid (2000).

Para o significado do NIR como temperatura, o item 2.3 teve a menor frequência (18.8%) em relação aos outros itens. Como a situação apresentada para o item 3.6, de maior frequência, é a mesma para o item 2.3, possivelmente os licenciandos desconsideraram o fato de que a identificação de significados deveria ser feita por itens nos quais estes aparecem. Com relação à comparação e ordenação entre números inteiros, percebe-se entre os licenciandos a incidência da ideia de NIR como estado qualitativo de uma quantidade (um saldo negativo, uma posição, uma temperatura) a partir de comparações e ordenações (B), principalmente no item 2.1 (a) (56.3%).

Somente 3 (18.8%) licenciandos associaram o item 2.2 (a) à comparação de estados qualitativos, apesar da questão objetivar a apresentação de maior e de menor temperatura. A explicação pode estar no fato de não compreenderem a temperatura como

um estado qualitativo, inclusive a de medida positiva. Possivelmente a não exigência no exercício de comparação de temperaturas abaixo de zero, não evidenciou, para os licenciandos, a ideia de comparação entre estados qualitativos associados a Números Inteiros Relativos.

Para 9 (56.3%) dos 16 licenciandos, o item 3.2 foi destacado no sentido de identificar um número como oposto ou simétrico de um NIR (B2). Neste item, a expressão “oposto ou simétrico” estava presente no enunciado, tornando explícita a associação a este significado. Ainda em B, comparece a ideia de NIR como estado qualitativo de um número a ser utilizado em comparações e ordenações (B3), representada pelo item 3.3 (37.5%).

Por fim, a comparação e ordenação entre Números Inteiros Relativos na reta numérica (C) remete aos itens 3.1 (56.3%) e 3.4 (43.8%), nos quais esses números apresentam-se associados à posição em relação ao zero e a outros Números Inteiros Relativos. Percebe-se um equilíbrio nas frequências entre os itens mencionados, que pode ser explicado dada a natureza semelhante dos mesmos ao utilizarem a reta numérica: o item 3.1 é inerente à ideia de oposto ou simétrico de um número inteiro, enquanto o item 3.4, por exemplo, objetiva a localização de Números Inteiros Relativos na reta numérica.

Dois licenciandos (12.5%) responderam a questão 1 de forma generalizada, não citando atividades e itens, bem como significado(s) do número negativo, o que comprometeu a análise das respostas.

As variações de frequências de respostas na questão 1 possibilitam entender as elucidções de Vergnaud (1990, 1998, 2009) sobre a necessária consideração de aspectos contextuais, operatórios e representacionais quando se elabora um conceito matemático e igualmente quando se verifica sua consolidação, dada como fundamental para que os licenciandos de Matemática analisassem o material curricular.

Na questão 2 os licenciandos responderam sobre se o desenvolvimento das atividades propostas no Currículo Paulista oportuniza a compreensão dos significados para o número negativo, que haviam indicado na parte A da questão 1. Dos 16 licenciandos, 10 (62.5%) licenciandos responderam sim, 5 licenciandos (31.25%) responderam sim, mas com ressalvas e 1 licenciando (6.25%) respondeu não. O conteúdo das respostas tornou possível entender que não houve consenso para o sim, dadas as ressalvas que identificaram as respostas como não sendo absolutamente afirmativas.

Justificativas como: “Sim, pois [...] tem exercícios que dão ao número negativo o sentido de quantidade, outros o sentido de deslocamento [...], fazendo com que os alunos entendam de forma mais fácil pela diferenciação.” (Licenciando 1) formaram uma categoria de respostas em que 10 (62.5%) dos 16 licenciandos compreendem que as atividades possibilitam ao aluno entender diferentes significados para o NIR, pois o apresenta em diferentes contextos, com uso de recursos como tabelas e a reta numérica.

Mesmo respondendo afirmativamente ao fato de o desenvolvimento das atividades do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) oportunizar aos alunos a compreensão de significados do número negativo, indicados na parte A da questão 1, nas justificativas de 5 licenciandos (31.25%) foi possível identificar ressalvas, que se referiam às atividades como limitadas e incompletas quanto à ação do professor e quanto ao entendimento da operação de subtração no Conjunto dos Números Inteiros Relativos.

Um único licenciando (6.25%) respondeu negativamente à questão, com justificativa que revela a necessária percepção do papel do professor no desenvolvimento das atividades, como uma competência ou saber docente que pode ser associado ao conhecimento profissional (BRASIL, 2019), imprescindível na escolha e na utilização de materiais pedagógicos na perspectiva de ensino de um objeto de conhecimento.

Objetivando que os alunos localizem na reta numérica Números Inteiros Relativos e também resolvam respectivas situações-problema, a atividade 3 do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) é composta por itens que, em maioria, versam sobre ordenação e comparação entre estes números, havendo itens sobre números opostos e outros itens associados a operações de adição e subtração com Números Inteiros Relativos.

Nesses itens, os licenciandos analisaram a oportunidade de levar o aluno a diferenciar o zero como ausência de quantidade, do zero como origem, ou seja, uma dificuldade epistemológica (GLAESER, 1985; CID, 2000) e necessária para elaboração de significados associados ao NIR (TEIXEIRA, 1993) de entender a reta numérica como campo numérico de duplo sentido e ordenado da esquerda para a direita.

Conforme os resultados, 11 (68.8%) licenciandos creem que as atividades no contexto da reta numérica oportunizam ao aluno diferenciar a ideia de zero absoluto da ideia de zero relativo. Afirmações sobre essa diferenciação foram justificadas por 5 (45.5%) dos 16 licenciandos a partir do conteúdo figurativo da reta numérica, que

permite a visualização da posição relativa dos números quanto ao zero: números à esquerda de zero e números opostos ou simétricos.

Para 3 (27.3%) dos 16 licenciandos, a apresentação figurativa da reta numérica permitiu observar o zero como origem ou marco divisório entre inteiros negativos e positivos e não somente como ausência de quantidade. Na justificativa de um licenciando (9.1%) foi apresentada a possibilidade de visualizar a distância entre um número o zero e nas justificativas de outros 2 (18.2%) dos 16 licenciandos constou ser possível “concretizar”, por observação, que o zero não é o menor inteiro.

As justificativas de 4 (80%) dos 5 licenciandos, para o entendimento de que atividades com a reta numérica não oportunizam diferenciação entre zero absoluto e zero relativo, remeteram a não referência ao zero absoluto e para 1 (20%) destes licenciandos a não existência de atividades com os conceitos de zero e nem a continuidade dos negativos até o infinito pela esquerda. Quanto à compreensão da reta numérica como campo numérico de duplo sentido e ordenado da esquerda para a direita (TEIXEIRA, 1993; CARAÇA, 2003; CID, 2010), houve 7 (43.75%) respostas afirmativas, 2 (12.5%) respostas negativas e também respostas afirmativas, mas com ressalvas, dadas por 7 (43.75%) dos 16 licenciandos.

Justificativas das respostas de 5 (71.4%) dos 7 licenciandos remeteram a aspectos figurativos da reta numérica, relativamente à apresentação de setas nas extremidades, dando a ideia de ida e volta e apresentando setas da esquerda para a direita para ligar números opostos ou simétricos. Ainda para 2 (28.6%) dos 7 licenciandos o aspecto visual da reta contribuiu tanto para sua compreensão como campo ordenado da esquerda para a direita como para o entendimento de sua infinita extensão em ambos sentidos.

Respostas positivas com ressalvas foram justificadas pela apresentação figurativa da reta numérica: para 2 (28.6%) licenciandos as flechas de duplo sentido na reta se confundem com as que relacionam números simétricos. Para um licenciando (14.3%) as setas nas extremidades da reta podem levar à ideia de justaposição entre conjuntos opostos: à direita os números positivos e à esquerda os números negativos, o que justifica a errônea lógica de ordenação de NIR como se fossem números naturais (GLAESER, 1995; TEIXEIRA, 1993; CID 2010, OLIVEIRA, 2019). Ainda um licenciando (14.3%) apontou que as setas de duplo sentido levam a crer que o zero é o menor número inteiro.

Ainda nas respostas positivas, com ressalvas, as justificativas de 3 (42.3%) dos licenciandos relacionam-se à necessária intervenção do professor para o entendimento das características da reta numérica que contém Números Inteiros Relativos: as setas, o distanciamento entre pontos, a correspondência entre cada ponto da reta e um NIR, o significado do zero e da ideia de número relativo e número oposto. Dois (12.5%) dos 16 licenciandos consideram que não é possível com as atividades do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), compreender a reta numérica como um campo numérico de duplo sentido e ordenado da esquerda para a direita porque não existem atividades que possibilitem essa compreensão.

A questão 2, sobre ordenação e comparação entre NIR e suas respectivas dificuldades, admitia mais de uma resposta, que pode ser classificada em diferentes categorias de análise. Assim, dificuldades quanto à compreensão da reta numérica, como campo numérico de duplo sentido e orientado da esquerda para a direita, apareceram em 6 das respostas. Um licenciando ressaltou a dificuldade de entender as setas da reta como não representantes de sentidos de ordenação, mas de prolongamentos infinitos. Outro licenciando apontou como dificuldade entender que o zero não é o menor NIR.

Em 4 respostas foi apontada a dificuldade de diferenciação entre os sinais operatórios de adição e subtração e os sinais que qualificam um NIR como positivo ou negativo. Ainda em 3 respostas, a dificuldade se referiu ao entendimento pelos alunos dos termos crescente e decrescente. No conteúdo de 11 respostas dos licenciandos houve alusão à dificuldade assente na utilização da lógica de comparação entre Números Naturais para a comparação entre Números Inteiros Relativos, que diferentemente dos Números Naturais, é regida não mais somente por comparações quantitativas, mas pelo aspecto posicional desses números em relação ao zero e em relação a outros Números Inteiros Relativos em termos de estar à esquerda ou à direita dos mesmos (TEIXEIRA, 1993; CARAÇA, 2003; CID, 2010).

Na identificação de significados associados ao Número Inteiro Relativo os resultados mostram que não houve consenso entre os 16 licenciandos, mesmo analisando atividades com operações entre Números Inteiros Relativos, que apresentam idênticos significados (saldo negativo/positivo; falta/ausência de quantidade; dívida/prejuízo; ponto ganho/perdido) e atividades sobre comparação e ordenação entre esses números, agora com significados de saldo, de posição e de temperatura. Portanto, há licenciandos com

dificuldades para observar os mesmos significados do Número Inteiro Relativo em situações e representações diferentes, não conseguindo perceber o que é invariante ao significado deste conceito em detrimento de situações e respectivas representações (TEIXEIRA, 1993; VERGNAUD, 1990, 1998, 2009), o que certamente comprometerá o conhecimento profissional necessário para esse conceito.

Para o desenvolvimento deste conhecimento profissional, tendo em vista objetivos curriculares do Número Inteiro Relativo, as Análises Preliminares mostraram a necessidade de os licenciandos vivenciarem atividades formativas oportunizadoras de reflexão para ações e em ações didáticas e seus resultados quanto ao processo de ensino-aprendizagem do NIR, a partir de diferentes contextos e representações, a fim de que compreendam o que é permanente neste conceito (invariante conceitual) (VERGNAUD, 1990, 1998, 2009) a despeito da situação ou representação utilizada, fazendo uso dessa compreensão como parâmetro para o ensino.

Consideramos que esses resultados e implicações devam ser considerados ao entendimento dos licenciandos sobre a pertinência curricular das atividades relativas à compreensão do significado de NIR e a sua ordenação e comparação, em termos das habilidades fundamentais para essas ações. Isto porque mesmo que 15 dos 16 licenciandos tenham entendido esta pertinência curricular, houve ressalvas em respostas afirmativas, que remetem às atividades como limitadas, de modo geral, mas que são enfáticas quanto à ausência de atividades que possibilitem a intervenção do professor e que portando, alinham-se à única resposta negativa para esse entendimento.

Ainda sobre as habilidades de ordenação e comparação entre Números Inteiros Relativos, mas no contexto de reta numérica, o entendimento da compreensão da reta numérica, como campo numérico de duplo sentido e ordenado da esquerda para a direita sendo, portanto imprescindível para a realização dessas habilidades, mesmo reconhecido pelos licenciandos, também apresentou ressalvas e também foi negado. Nas respostas com ressalvas, além dos aspectos figurativos da reta numérica, novamente foi identificada a ausência de atividades que oportunizem a intervenção do professor ou a transposição didática, no sentido de adaptar o objeto de conhecimento para ser ensinado (CHEVALLARD, 1985 apud D'AMORE, 2007).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No currículo escolar da Educação Básica, o Número Inteiro Relativo (NIR) é um objeto de conhecimento, cujo ensino considera seus usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações (BRASIL, 2017, p. 307; SÃO PAULO, 2019, p. 351) e também as habilidades de “Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração” (BRASIL, 2017, p. 307; SÃO PAULO, 2019, p. 351) e de “Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.” (BRASIL, 2017, p. 30; SÃO PAULO, 2019, p. 351).

Essa consideração vai ao encontro de diretrizes curriculares para a formação de professores quanto ao desenvolvimento de saberes docentes, tendo motivado a realização desta pesquisa, com licenciandos de Matemática, cujas Análises Preliminares da Engenharia Didática, utilizadas como metodologia de ensino, mostraram-se fundamentais para a elaboração de habilidades específicas, associadas a esses saberes docentes, para o processo de ensino-aprendizagem do Número Inteiro Relativo.

Em conformidade com os resultados da pesquisa, os licenciandos de matemática desenvolveram saberes docentes identificados com a compreensão do papel da indissociação entre situações, propriedades, relações, funções, operações e suas respectivas representações (língua materna, figurativas, aritméticas, algébricas, geométricas), tal como elucidado por Vergnaud (1990, 1998, 2009), para a elaboração do conceito de NIR. Conclui-se ainda que esta compreensão tenha origem nas percepções de aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do NIR, fundamentais para o planejamento e desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem deste conceito.

Diante destes resultados e considerações, entendemos que fases seguintes da pesquisa, considerando pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, serão desenvolvidas a partir da hipótese na qual saberes profissionais do professor de Matemática sobre o Número Inteiro Relativo se desenvolvem como referências para o seu ensino e aprendizagem, a começar pela integração entre suas dimensões epistemológicas, cognitivas, didáticas e curriculares. Com a continuidade da pesquisa, esperamos elucidar específicos elementos de saberes docentes sobre o Número Inteiro Relativo que contribuam para a ampliação do campo do conhecimento profissional docente.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S.A.; SILVA COUTINHO, C. Q. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19. **REVEMAT**, v.3, n.1, p.62-77, 2008
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, 18 (1), p. 61-93, 2016.
- ALVES, F. R.V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia didática de formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **EMR**. n. 18, v. 12, p. 121 – 137, 2017.
- ALVES, F. R.V.; DIAS, A. M. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **REVEMAT**. v.12, n. 2, p. 192-209, 2017.
- ARTIGUE, Michelle. . Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: OÙ en sommes-nous? **Eduação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n.3, p. 25-64, 2020.
- ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.
- ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: GÓMEZ, P. (Ed). **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**. Colonia San Rafael: Una Empresa Docente, 1995, p. 33-59.
- ARTIGUE, M. “**Ingénierie Didactique**”. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308, 1988.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental- 1 ed. – Brasília: MEC/SEF. 1998.
- BRASIL. MEC. **Resolução CNE/CP nº 2**, de 20 de dezembro de 2019.
- CANAL, C. P. P.; QUEIROZ, S. S. de. Contando pontos em um jogo com conteúdo matemático: alguns procedimentos. **O Psicol. Esc. Educ.**, v. 16, n. 1, p. 25-33, 2012.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5.ed. Lisboa: Gradiva, 2003.
- CARNEIRO, V. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v.13, n.1, p. 87–120, 2009.
- CID, E. Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. **Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas**, 2, p. 529-542, 2002.
- CID, E. La investigación didáctica sobre los números negativos: Estado de la cuestión. **Pre-publicaciones del Seminario matemático García de Galdeano nº 25**. Universidad de Zaragoza, 2003.
- CID, E. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. **Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**, 2000.

- D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Orgs.). **Ingeniería didáctica en educación**, 1995. p.62- 96.
- GLAESER, G. Epistemologia dos Números Negativos. Rio de Janeiro: **Boletim GEPEM**, 1985.
- HILLESHEIM, S.; MORETTI, M. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, p. 119-135, 2013.
- HILLESHEIM, S.; MORETTI, M. Congruência Semântica: implicações didáticas no ensino da regra dos sinais. **INTERMATHS**, v. 1, n. 1, p. 101-118, 2020.
- KARLSON, P. A. **A Magia dos Números**. Porto Alegre: Globo, 1961.
- LOPES, T. B.; PALMA, R. C.; FRANCO DE SÁ, P. Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, 159-181, 2018.
- MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.
- OLIVEIRA, G. P.; PEREIRA, A. C. O uso da Engenharia Didática e da Sequência Fedathi como ferramentas metodológicas na Formação de Professores de Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** . v. 7, n.18, p. 65–78, 2019.
- OLIVEIRA, R. G. Uma referência para a elaboração de saberes docentes a partir da observação e da reflexão de dificuldades e de erros sobre números inteiros relativos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 5, p. 318 – 332, 2019.
- POMMER, W. M. Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. In: **SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/SEMA– FEUSP 2010**, USP. São Paulo, 2010. p. 1-13.
- SÁ, P.F.; SALGADO, R. C. da S.. A construção das regras operatórias dos números inteiros com a calculadora. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – v. 2, n. 3, p. 1 – 16, 2011.
- TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiro: obstáculos de dificuldades. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 60-72. 1993.
- SÃO PAULO (ESTADO). **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE, 2019.
- SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico SARESP - Matemática**. São Paulo: SEE, 2012.
- STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.
- SILVA, A. H; FOSSA, M. I. T. Análise de conteúdo: exemplo de aplicação da técnica para análise de dados qualitativos. **Qualit@s Revista Eletrônica**. v.17, n.1, p. 1-14, 2015.
- VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**, v.17, n. 2, p. 167 – 181, 1998.

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**. Curitiba: UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. Psicologia cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas. In: **Caderno do CEM**. Ano 2, n. 2, p. 19 –39, 1990.

**Submetido em 22 de maio de 2021.**

**Aprovado em 21 de março de 2022.**