REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.16266

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA, A MODELAÇÃO E O CONCEITO DE INTEGRAL

THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS, THE MATHEMATICAL MODELLING ON EDUCATION AND THE INTEGRAL CONCEPT

Rafael Winícius da Silva Bueno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – IFFAR
rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br

Resumo

Este artigo trata de uma pesquisa de doutorado que buscou investigar de que forma futuros docentes de Matemática percebem a introdução do conceito de integral, a partir de uma prática pedagógica desenvolvida por meio da Modelação e fundamentada no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Tendo cunho qualitativo e sendo caracterizado como um estudo de caso, este trabalho começou com a aplicação de uma atividade de Modelação, junto aos alunos de uma turma da disciplina de Cálculo II, de um Curso de Licenciatura em Matemática. Posteriormente, foi proposto um questionário aos acadêmicos cujas respostas dissertativas foram analisadas por meio da Análise Textual Discursiva. Os resultados obtidos apontam que os acadêmicos puderam iniciar o estudo do conceito de integral a partir de já-encontrados provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico. Ademais, os futuros docentes consideraram que experiências corporificadas trazem mais sentido para as aulas e que construções pedagógicas que não priorizam manipulações algébricas e definições formais são capazes motivar o processo de aprendizagem, podendo, inclusive, ser fonte de inspiração para sua futura atuação profissional.
Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Cálculo; Modelação; Três Mundos da Matemática.

Abstract

This paper deals with a doctorate research that aimed to investigate how future mathematics' teachers perceive the integral concept introduction made from a pedagogical practice based on Mathematical Modelling and on the Three Worlds of Mathematics theoretical framework. This research has a qualitative perspective and is characterized as case study. The research started with a pedagogical activity using Mathematical Modelling in a class of Calculus II, from a Mathematics teaching course in a higher education institution. Based on that experience, the students answered a questionnaire, whose subjective answers were analyzed using Discursive Textual Analysis. The results pointed out that the students could start the study of the concept of integral from the met-before coming from the Embodied Conceptual and Symbolic Operational worlds. Moreover, the students thought that embodied experiences give more meaning to the lessons and that an education construction that does not prioritize algebraic manipulations and formal definitions is able to create more motivation for learning, and might even become a source of inspiration for their subsequent professional action.
Keywords: Calculus teaching and learning; Mathematical Modelling; The Tree Worlds of Mathematics.

INTRODUÇÃO

O ensino universitário do Cálculo Diferencial e Integral[1] tende a centrar-se em práticas algorítmicas e algébricas e a avaliar, junto aos acadêmicos, apenas as competências provenientes desses domínios. Essa realidade acaba por deflagrar um círculo vicioso, pois, para tentar alcançar níveis aceitáveis de aprovação, os docentes procuram trabalhar com aquilo que os estudantes assimilam melhor. Os discentes, por sua vez, consideram essas competências como o essencial das disciplinas, já que constituem a base da sua avaliação (BACKENDORF; BASSO, 2018).

Imergindo em estudos de diferentes autores (ARTIGUE, 1995; BACKENDORF; BASSO, 2018; FRANT, 2016), pode-se verificar que a questão do ensino e da aprendizagem de conceitos de Cálculo é bastante relevante. Esse fato, agregado ao contexto de atuação profissional do autor do presente artigo, justifica o interesse por esse tema, que foi o cerne da sua pesquisa de doutoramento.

Estudando o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2013), encontrou-se elementos que, acredita-se, podem auxiliar no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de Cálculo. Dessa forma, foi realizado um estado do conhecimento buscando analisar o que foi produzido no Brasil, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, envolvendo os Três Mundos da Matemática e o ensino e a aprendizagem dessa área do conhecimento.

Foi possível perceber que não há pesquisas que se debruçam sobre a compreensão do conceito de integral junto a futuros professores de Matemática. Ademais, lendo trabalhos sobre a Modelagem Matemática entendeu-se que esse tipo de prática pode colaborar com o ensino e a aprendizagem de Cálculo. Sendo assim, na presente investigação, tem-se como questão norteadora: o que se mostra da percepção de um grupo de acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre a introdução do conceito de integral, a partir de uma prática pedagógica envolvendo a Modelação e fundamentada nos Três Mundos da Matemática?

Para dar conta dessas ideias, o presente artigo está dividido em cinco seções. Na primeira, apresenta-se uma contextualização das razões que levaram à realização da pesquisa, sendo explicitada a questão norteadora. Na segunda seção, são contemplados os

[1] No restante do texto será utilizada a palavra "Cálculo" para fazer referência a esse campo do conhecimento.

pressupostos teóricos estudados. Na terceira parte, são abordados os procedimentos metodológicos sobre os quais estão fundamentados os caminhos trilhados nesta pesquisa de cunho qualitativo. Na quarta seção, são trazidos os resultados construídos a partir da análise das respostas dos acadêmicos frente a um questionário proposto ao fim das atividades realizadas. O texto se encerra com as considerações finais sobre a investigação realizada.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Os Três Mundos da Matemática

O professor britânico David Tall dedica-se ao estudo de como ocorre a construção do conhecimento matemático, desde as ideias mais iniciais até o limite das pesquisas acadêmicas. Trilhando esse caminho, percebeu que o conhecimento matemático se desenvolve, de forma dinâmica, em três diferentes mundos matemáticos, que se articulam entre si: Mundo Conceitual Corporificado; Mundo Operacional Simbólico; e Mundo Formal Axiomático.

De acordo com Tall (2013), o Mundo Conceitual Corporificado refere-se às construções desenvolvidas, inicialmente, por meio de interações com o mundo real e que se complexificam, gradualmente, até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas. Conforme argumenta Lima (2019), esse é o mundo das observações, ações e percepções que ocorrem sobre objetos (físicos, mentais ou virtuais).

Já o Mundo Operacional Simbólico refere-se aos símbolos matemáticos utilizados para representar operações que se tornam procedimentos realizados em construções envolvendo aritmética e álgebra. Esses símbolos podem se referir, em certas ocasiões, a processos a serem efetuados e, em outras, aos conceitos estudados. Esse caráter dualístico é traduzido por Tall e Gray (1991) na noção de *proceito*, que é caracterizado pelos autores como o amálgama entre processo e conceito. Compreender essa dualidade, traduz-se em uma flexibilidade de pensamento que permite a movimentação entre o processo de resolver uma expressão e o conceito de manipulá-la mentalmente, como uma construção mais ampla.

O Mundo Formal Axiomático diz respeito aos conhecimentos matemáticos construídos por meio de axiomas, definições, teoremas e corolários. Nesse mundo, as propriedades são construídas por meio de deduções lógicas formais e rígidas. Conforme argumenta Tall (2013), nesse ambiente são utilizadas, sobretudo, experiências mentais abstratas.

Apesar de cada um dos Mundos apresentar determinadas características singulares, pode haver interseções entre eles. Lima (2007) argumenta que há uma hierarquia entre os Mundos, uma vez que o Mundo Formal normalmente não é discutido antes do Ensino Superior, sendo tratado, portanto, apenas após os mundos Corporificado e Simbólico. Ao compreender o Mundo Formal, no entanto, é possível que o acadêmico faça uso de concepções mentais sobre objetos reais, bem como de manipulações simbólicas, para encaminhar suas construções lógicas.

Para trilhar sua jornada pelos Três Mundos da Matemática, cada indivíduo faz uso de ideias prévias, construídas a partir de situações (escolares ou não) vividas anteriormente. Lima e Tall (2008) chamam essas ideias de *já-encontrados* e os definem como estruturas cognitivas desenvolvidas por meio de experiências anteriores.

Alguns desses constructos ajudam os sujeitos a desenvolver o seu nível de matemático. Nesse caso, são definidos como *já-encontrados colaboradores*. Em outras ocasiões, acabam por se tornar obstáculos para a construção de novos conhecimentos, sendo designados, portanto, como *já-encontrados dificultadores* (LIMA, 2019).

Os *já-encontrados dificultadores* são resultado de conhecimentos anteriores que confrontam ideias novas, que ameaçam a estabilidade intelectual do indivíduo que as detêm. D'Amore (2005) argumenta que, devido ao sucesso obtido anteriormente, o cérebro tende a lutar pela conservação *desses já-encontrados dificultadores* que, em algum momento, se mostraram eficazes para resolver determinados problemas matemáticos.

De acordo com Tall (2013), os currículos focam principalmente em *já-encontrados colaboradores*, que são vistos como a base para o desenvolvimento intelectual. Entretanto, o autor destaca a importância de perceber que muitos aspectos problemáticos surgem quando um indivíduo se depara com novas situações. Ao se confrontar com um conceito inovador, o estudante dá início a uma revolução interna de ideias e, nesse processo, conflitos cognitivos, que desafiam ideias já consolidadas, podem emergir.

Modelagem Matemática

Entende-se que a utilização da Modelagem Matemática como método de ensino pode auxiliar acadêmicos na busca pela construção de significados relativos ao conceito de integral. De acordo com Biembengut (2016), a Modelagem Matemática pode ser entendida como um método de ensino com pesquisa, que valoriza o que se aprende, tornando o conhecimento construído útil e estimulante. Bassanezi (2002) define a Modelagem Matemática como:

> [...] um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas em linguagem usual (p. 24).

Ciente que o sistema de ensino vigente exige que certos conteúdos programáticos sejam desenvolvidos, dentro de determinados períodos de tempo (trimestres, semestres, anos), Biembengut (2016) sugere adequar o processo de Modelagem Matemática, de forma que sua essência seja preservada, mas que se percorra os assuntos previstos nas ementas. Assim, Biembengut e Hein (2003) denominam de Modelação o método que se utiliza do âmago da Modelagem Matemática, mas realiza adaptações para sua aplicação em cursos com programas pré-estabelecidos.

De acordo com Biembengut (2016), a Modelação oportuniza a cada aluno: entender uma situação concreta (Mundo Conceitual Corporificado); conhecer novas linguagens matemáticas que lhe permitem representar tal situação (Mundo Operacional Simbólico); e interpretar os resultados obtidos. Nessa perspectiva, o professor pode trabalhar com certos modelos conhecidos, procurando reconstruí-los em sala de aula.

Conforme afirma Biembengut (2016), para que os futuros professores entendam a Modelação, não é suficiente que o docente apenas disponha ideias, conceitos e definições. É necessário que os acadêmicos sejam orientados: a identificar a situação que deve ser modelada; a expressar suas observações em linguagem matemática; a construir relações entre os símbolos matemáticos utilizados; e a construir, a partir dos dados coletados, um modelo que descreva o experimento realizado. Para tanto, distinguem-se três etapas essenciais nas quais a Modelação pode ser dividida: *Percepção e Apreensão*; *Compreensão e Explicitação*; e *Significação e Expressão*.

A primeira etapa, designada de *Percepção e Apreensão*, visa, de acordo com Biembengut (2016), contribuir para que surja o interesse por algum tema estimulante, que é escolhido para servir como cerne dos conteúdos com os quais se busca trabalhar. É o momento de instigar os estudantes a expressar percepções sobre o assunto e interagir com as diferentes formas de linguagem emergentes.

Na fase denominada de *Compreensão e Explicitação*, conforme salienta

Biembengut (2016), procura-se levar os estudantes a identificar elementos que, partindo de seus já-encontrados, contribuam para a construção de ideias ainda desconhecidas. Com tal intento, associa-se os dados coletados à compreensão, de forma que essa associação contribua para o entendimento da situação proposta. Assim, a compreensão se aprimora na medida em que são criadas oportunidades para a interação com contextos corpóreos e linguagens simbólicas que permeiam toda a Modelação.

A etapa chamada de *Significação e Expressão*, conforme destaca Biembengut (2016), caracteriza-se pela avaliação da validade do modelo e pela verificação do que foi aprendido. Não consiste em avaliar exclusivamente o modelo construído, mas, sobretudo, em analisar o alcance do trabalho realizado.

METODOLOGIA

Deslandes (2002) destaca que a pesquisa científica transcende o senso comum por fazer uso do método científico. Nesse sentido:

> A ciência utiliza-se de um método que lhe é próprio, o método científico, elemento fundamental do processo do conhecimento realizado pela ciência para diferenciá-la não só do senso comum, mas também das demais modalidades de expressão da subjetividade humana, como a filosofia, a arte [...] (SEVERINO, 2007, p. 102).

Para o caminho percorrido nesta investigação, optou-se pelo paradigma qualitativo que, conforme ressalta Borba (2004), implica em interpretações subjetivas e percebe o conhecimento construído como uma compreensão contingente e não como uma verdade universal. Assume-se, portanto, um raciocínio indutivo, no qual, conforme argumenta Severino (2007), o cientista procura passar de um caso particular, considerado relevante, para a construção de inferências capazes de contribuir para uma generalização, passível de ser aplicada em situações análogas.

Nesse contexto, aplicou-se, junto aos acadêmicos da disciplina de Cálculo II, uma abordagem para a introdução do estudo do conceito de integral, construída por meio da Modelação e pautada no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. A turma era composta por sete acadêmicos do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição pública de ensino do Estado do Rio Grande do Sul. Três eram do sexo feminino e quatro do masculino, com idades variando entre 21 e 38 anos.

Buscando-se, de acordo com Ponte (2006), tirar partido das fontes e evidências desse cenário, os estudantes responderam a um questionário. Com os dados coletados e registrados por meio desse questionário, procurou-se caracterizar a turma e, conforme argumentam Pimenta e Ferreira (2010), compreender melhor o problema pesquisado e, assim, construir conclusões, descrições e generalizações. Foram, então, criados textos descritivos e interpretativos, com o objetivo de contar uma história que, segundo a visão de Ponte (2006), pode acrescentar algo ao conhecimento existente.

Esses textos foram desenvolvidos a partir da interpretação das respostas dissertativas dos acadêmicos às duas questões seguintes, propostas ao final das duas aulas utilizadas para a introdução ao estudo do conceito de integral: *o que você pensa sobre o uso de experiências que requerem observação, descrição, ação e reflexão no estudo de Matemática?; e você acredita que atividades de Modelação, como a que foi realizada em aula, são importantes para a Educação Matemática?*

As narrativas trazidas pelos discentes foram estudadas para essa investigação à luz da Análise Textual Discursiva (ATD), conforme propõem Moraes e Galiazzi (2016), que a definem como um método qualitativo de análise de informações que visa a produção de novas compreensões sobre fenômenos e discursos. Seguindo os passos sugeridos pelos autores, ideias foram construídas por meio de uma sequência recursiva, composta por três momentos: unitarização, categorização e construção de metatextos.

A PRÁTICA

No primeiro encontro com a turma, de quatro horas aula, foi proposto um questionário para os acadêmicos, por intermédio da ferramenta gratuita SurveyMonkey[2]. As perguntas foram disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina, por meio de um *QR code* fornecido pela ferramenta digital. Neste artigo, são destacadas as respostas dadas a duas questões objetivas e a uma discursiva.

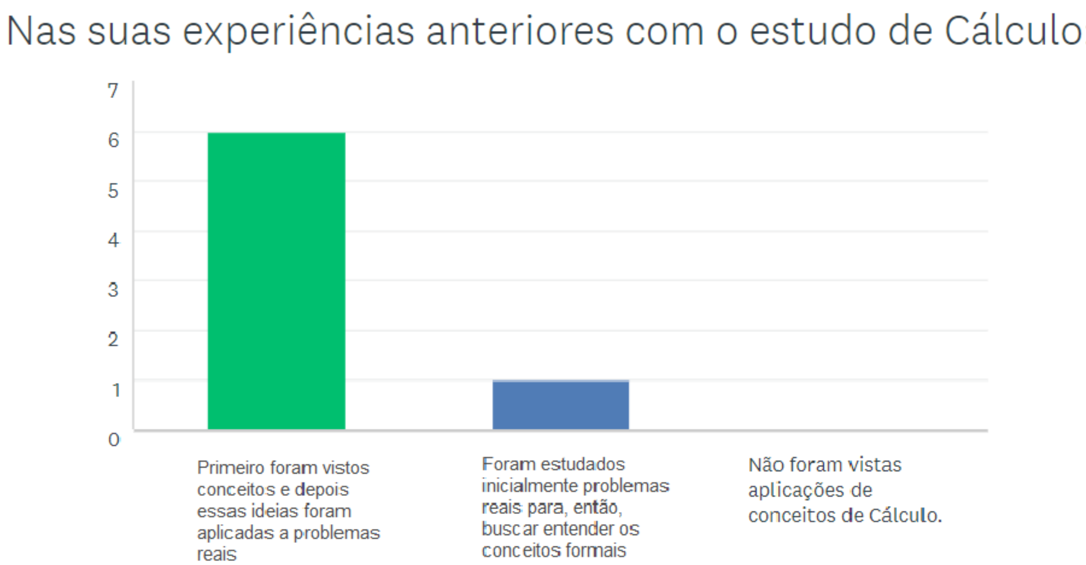
Analisando-se as respostas da primeira pergunta objetiva, pôde-se perceber que os acadêmicos consideravam que os conceitos estudados no Cálculo foram desenvolvidos desvinculados da realidade. Todos acreditavam que, inicialmente, foram desenvolvidas as criações conceituais abstratas e simbólicas e suas demonstrações formais para, somente depois, essas ideias serem aplicadas a problemas concretos.

[2] pt.surveymonkey.com

Percebe-se que os acadêmicos acreditavam que os matemáticos começam seu trabalho na intersecção entre os mundos Operacional Simbólico e Formal Axiomático, onde generalizações algébricas e demonstrações formais são desenvolvidas. Acredita-se que esse cenário pode levar a uma alienação sobre como se dão as construções matemáticas, o que pode levar os acadêmicos a terem uma postura semelhante nas suas aulas.

Ademais, conforme observa-se na Figura 1, o cenário mais comumente encontrado durante a formação desses discentes, relaciona-se com aulas lineares e expositivas, nas quais os conceitos são expostos e demonstrados algebricamente para, só então, aplicações serem trazidas sob a forma de exemplos e exercícios.

Figura 1 – Experiências anteriores com o Cálculo



Fonte: A pesquisa.

Pode-se perceber, conforme destacam Almeida, Fatori e Souza (2010), que os conteúdos trabalhados em disciplinas de Cálculo não são, costumeiramente, relacionados à realidade dos acadêmicos. Assim, são priorizadas operações e técnicas que podem levar ao insucesso dos alunos ou, em alguns casos, à simulação de sucesso, uma vez que aprovações podem ser alcançadas, mas, provavelmente, significados não são construídos.

A modelação e a integral como antiderivada

Buscando-se desconstruir esse panorama e iniciar uma jornada diferente pelos Três Mundos da Matemática, na segunda aula da turma, propôs-se uma atividade baseada nas premissas da Modelação. Com isso, procurou-se contribuir para que os acadêmicos pudessem desenvolver ideias utilizando, de acordo com Tall (2013), suas percepções sobre a realidade, operações matemáticas e o uso de linguagem adequada.

Iniciou-se pela etapa denominada por Biembengut (2016) de *Percepção e Apreensão*, que visa fomentar, junto aos acadêmicos, o interesse por um tema concreto. Conforme destaca Dewey (1979), esse interesse se caracteriza pela supressão da distância entre o sujeito e o objeto de estudo. Nesse contexto, perguntou-se aos alunos se tinham familiaridade com a seguinte situação: *em uma avaliação escolar, foi entregue à turma, da qual fazia parte um jovem chamado Newton, um teodolito*[3] *e, então, solicitou-se que, utilizando esse equipamento, descobrissem a altura de um determinado prédio*.

Após discutirem sobre a ideia proposta, e se familiarizarem com as utilidades práticas do teodolito, os acadêmicos responderam que não tinham conhecimento dessa anedota. Continuando a história, informou-se que o jovem Newton, para resolver o problema, levou o instrumento até o telhado da construção e deixou-o cair, medindo o tempo que levou para atingir o solo. De posse dessa informação, e estando a par da ideia da aceleração da gravidade na Terra, pôde, então, encontrar a altura correta do edifício.

Dando sequência à aula, fez-se as seguintes perguntas para os acadêmicos: *será que era essa a intenção do docente com a atividade? Será que o professor considerou correta a resposta do jovem Newton? O que você, como docente, faria?* A partir da situação descrita e dos questionamentos propostos, buscou-se motivar os discentes a externar suas percepções sobre o assunto, iniciando o processo de construção de significados.

Discutindo sobre as diversas nuances do contexto caracterizado, os alunos chegaram à conclusão que o professor do jovem Newton, provavelmente, não esperava essa abordagem para o problema e deve ter considerado a resposta incorreta. Entretanto, argumentaram que, caso fossem docentes na situação descrita, aceitariam a resposta dada, buscando entender o raciocínio do aluno.

Seguindo a atividade de Modelação, propôs-se que realizassem o mesmo experimento que o jovem Newton. De acordo com Tall (2013), procurou-se criar um ambiente de aprendizagem no qual os alunos pudessem perceber o problema positivamente, como um objetivo a ser alcançado em conjunto, e não como um teste padrão, em que qualquer erro deve ser necessariamente evitado.

[3] Instrumento muito utilizado na construção civil e na agricultura para medir ângulos, distâncias e alturas.

A turma foi dividida em três grupos (G1, G2 e G3) e todos foram convidados para irem até uma passarela elevada, que interliga dois laboratórios da instituição, para soltar de lá um objeto e, então, medir o tempo de queda até o solo. Foram utilizados nesta experiência os seguintes artefatos, trazidos pelos acadêmicos: uma bola de basquete, um urso de pelúcia e uma bola de handebol.

Orientou-se, então, cada grupo a realizar a experiência cinco vezes, medindo o tempo, em segundos, e anotando os valores obtidos em uma tabela. A seguir, os acadêmicos foram convidados a calcular a média aritmética dos tempos obtidos, para utilizar esse valor como referência para o desenvolvimento das atividades posteriores.

Findada essa fase da Modelação, que privilegiou aspectos vinculados ao Mundo Conceitual Corporificado, passou-se para a segunda etapa, denominada de *Compreensão e Explicitação*. Assim, iniciou-se a busca pela construção de um modelo simbólico. Tall (2013) ressalta que, nesse estágio do trabalho, aspectos da experiência sensorial passam a ser pensados com o auxílio de linguagens mais sofisticadas, que permitem a ampliação de concepções mentais para oportunizar a criação de modelos.

De acordo com Bassanezi (2002), a matemática mobilizada nessa fase da Modelação pode ser entendida como um instrumento intelectual unificador, capaz de sintetizar percepções e construir generalizações que possibilitam a previsão de tendências. Dessa forma, foram propostos dois novos desafios aos futuros professores: *procure estabelecer a seguinte relação da altura em função do tempo:* $h(t) = (gt^2/2) + C_1 t + C_2$, *sabendo que g é a aceleração da gravidade na terra (9,8* m/s^2*) e* C_1 *e* C_2 *são constantes reais*; e *descubra os valores de* C_1 *e* C_2 *para a situação estudada.*

Entende-se que, ao realizar as atividades necessárias para alcançar o modelo sugerido, criam-se condições para que os acadêmicos alcancem um estágio de combinação formal entre simbolismo e corporificação (TALL, 2013). Nesse ambiente, as verdades podem ser garantidas a partir de uma perspectiva simbólica e as definições fundamentam-se em objetos, experiências e operações conhecidos.

Alguns *já-encontrados* fizeram-se necessários para a continuidade da Modelação. Os acadêmicos passaram a interagir buscando relembrar constructos mentais advindos das suas vivências anteriores. Trocaram ideias e experiências sobre funções, variáveis, unidades de tempo, aceleração, velocidade e distância.

Para iniciar a construção do modelo, contudo, fez-se necessária uma intervenção junto aos acadêmicos, com o propósito de relembrar *já-encontrados* relacionados com um conceito que não fora mencionado: a derivada. Perguntou-se como poderiam descrever a derivada e, nas suas respostas, os estudantes trouxeram ideias sobre técnicas de diferenciação, sem que tenha sido feita relação da derivada com a ideia de variação.

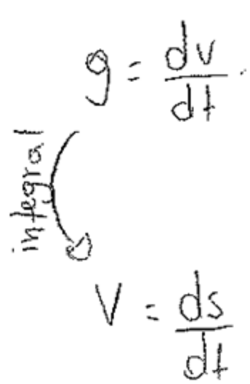
Foram relembradas, então, concepções sobre o conceito de derivada, tanto a partir de uma ótica geométrica, quanto de uma visão da sua utilidade para o cálculo de taxas de variação instantânea. Os futuros professores começaram a perceber a relação entre o conceito e o que estava sendo estudado, uma vez que visualizaram que a aceleração representa a taxa de variação da velocidade. Ou seja:

$$g = \frac{dv}{dt}$$

Partindo-se de uma concepção Newtoniana da integração (BOYER, 1959), fez-se uma nova intervenção junto aos alunos, questionando se seria interessante se existisse outra ferramenta matemática capaz de "desfazer" a derivada para encontrar a expressão da velocidade em função do tempo. Os acadêmicos foram unânimes em concordar que seria excelente se essa ferramenta realmente existisse.

Foi criada, então, a oportunidade para, a partir de uma necessidade advinda de uma experiência corporificada, introduzir a ideia inicial do conceito de integral. Nesse sentido, informou-se que existe uma operação inversa à diferenciação, que é chamada de integração. Foi trazida, então, sua notação $\int$, informando-se que se trata de "s" alongado, introduzido pelo matemático alemão Leibniz, no século XVII, para denotar a palavra soma, que, em latim escreve-se *summa*. Assim, algumas ideias, como mostra a anotação de um aluno, na Figura 2, começaram a surgir entre os acadêmicos.

Figura 2 – Raciocínio construído por um aluno da turma.



Fonte: A pesquisa.

Na sequência, surgiram dúvidas relacionadas ao seu processo de aplicação. Nesse momento, informou-se que a ideia era pensar na função que, quando derivada em relação ao tempo, resulta na constante gravitacional g. Manipulações algébricas foram feitas e os educandos chegaram à seguinte igualdade:

$$\int g\,dt = \int dv$$

$$gt = v$$

Uma nova mediação docente precisou ser feita para que os acadêmicos percebessem que essa era uma possível resposta, mas que outras poderiam existir, tais como:

$$\frac{d}{dt}[gt + 1] = g$$

$$\frac{d}{dt}\left[gt + \sqrt{2}\right] = g$$

$$\frac{d}{dt}[gt - 35] = g$$

Sendo assim, convencionou-se que a igualdade seria generalizada e expressa da forma que segue, com C1 sendo uma constante real:

$$\int g\,dt = \int dv$$

$$v = gt + C_1$$

Os acadêmicos perceberam que, apesar de essa etapa ter sido realizada com sucesso, o objetivo ainda não havia sido alcançado, pois buscava-se a expressão da altura em função do tempo. Por meio de uma nova mediação lembrou-se que a velocidade também reflete uma variação. Os discentes, remetendo à *já-encontrados* relacionados com o conceito de derivada, chegaram à seguinte expressão:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Os participantes perceberam que, se realizasse um novo processo de integração, poderia chegar a uma expressão da altura em função do tempo. A equação foi reescrita, substituindo-se v por $gt + C_1$ e, na sequência, foi aplicada a integral, de acordo com o exemplo da Figura 3.

Figura 3 – Integração realizada por um aluno.

$$\int gt + C1$$

$$h = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C2$$

Fonte: A pesquisa.

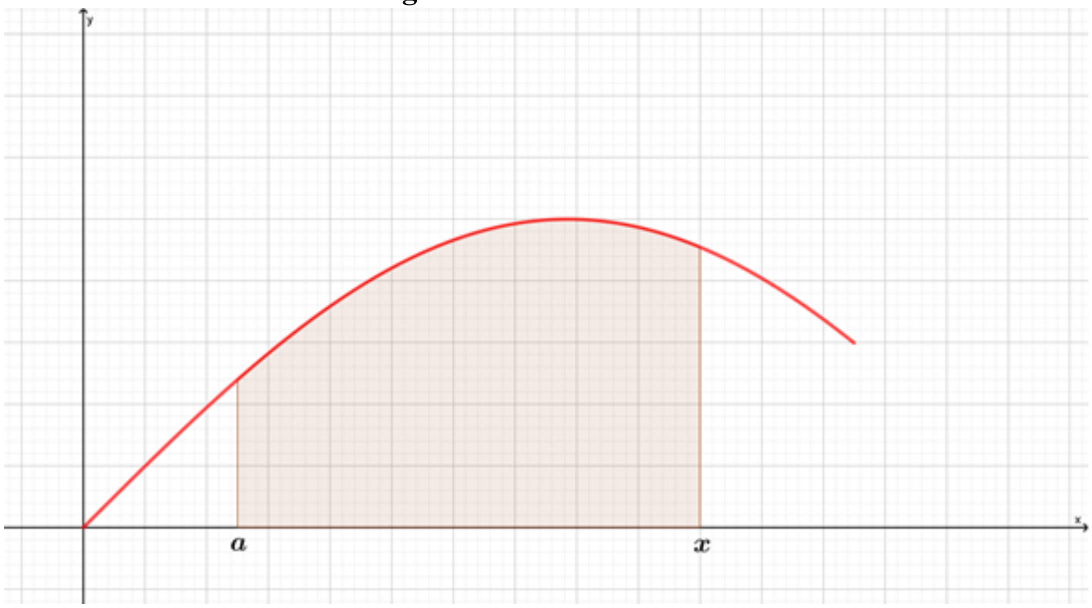
A partir dessa expressão, os estudantes utilizaram as condições iniciais para encontrar os valores das constantes reais C_1 e C_2. Achando $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, a turma estabeleceu a equação geral para descrever a queda livre dos objetos na Terra.

Iniciou-se, então, a terceira etapa da Modelação, de *Significação e Expressão*, que consiste na avaliação do modelo criado e na verificação do conhecimento construído. Tall (2013) afirma que, quando uma possível solução é encontrada, primeiro deve ser apreciada, e, então, deve ser verificada para confirmar se realmente se aplica ao problema original. Dessa forma, cada grupo, de posse da média do tempo de queda do seu objeto, utilizou a função encontrada para calcular a altura da passarela.

A integral de Leibniz e a área sob a curva

Após essa discussão inicial, a segunda aula teve prosseguimento com outra abordagem corporificada para o estudo do conceito de integral. Perguntou-se aos discentes por que Leibniz teria utilizado um símbolo relacionado com a soma para representar a integral, que, até o momento, tinha sido estudada na disciplina como a operação inversa da derivada. Sem respostas, o gráfico da Figura 4 foi desenhado no quadro.

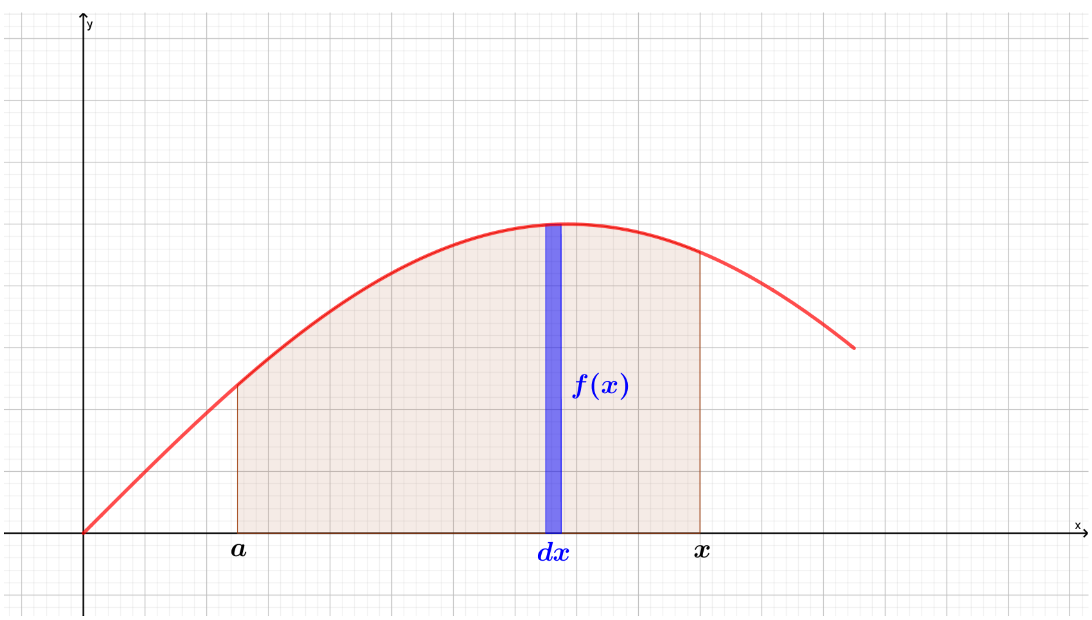
Figura 4 – Gráfico inicial.



Fonte: A pesquisa.

Uma nova questão foi proposta para os acadêmicos: *como calcular a área hachurada, que se encontra abaixo da função f, realçada em vermelho?* A primeira reação dos alunos foi indagar sobre a relação dessa situação com a integral, a derivada, a velocidade, a aceleração ou a altura, estudados anteriormente. Com um pouco de calma sendo solicitada à turma, foi feito um acréscimo à representação gráfica inicial, de acordo com a Figura 5.

Figura 5 – Acréscimo ao gráfico inicial.



Fonte: A pesquisa.

Os discentes começaram a perceber algumas nuances que lembravam a construção anterior do conceito de integral. Perceberam que o "retângulo" desenhado tem altura igual ao valor da função *f* para um determinado *x* e que o comprimento de sua base é um diferencial de *x*. Concluíram que a área desse "retângulo" pode ser dada pelo produto *f(x)dx*.

Nesse contexto, foi (re)construída a relação da palavra soma com o conceito de integral, a partir do raciocínio proposto por Leibniz (BOYER, 1959) que, de acordo com Tall (2013), percebeu a área procurada como a soma das áreas de todas as infinitas tiras azuis. Informou-se aos acadêmicos que o matemático alemão escreveu "*summa f(x)dx*" utilizando um "s" alongado para representar a palavra soma, chegando à seguinte notação para a área *A(x)* abaixo da curva.

$$A(x) = \int f(x)dx$$

Após essa construção, que contou com a participação dos acadêmicos no desenvolvimento de cada passo dado, surgiu uma nova dúvida: *o que a área abaixo de uma curva tem a ver com a derivada?* Afinal, o conceito de integral havia sido abordado por dois ângulos, mas uma conexão ainda não tinha sido construída.

A partir da visão de Leibniz, procurou-se desenvolver a ideia que a área *A* tem uma variação *dA*, quando o valor de *x* é aumentado de *dx*. Esse valor *dA*, por sua vez, conforme concluíram os acadêmicos, representa a área de um "retângulo" infinitamente pequeno, com altura *f(x)* e largura *dx*. Pôde-se estabelecer a seguinte igualdade:

$$dA = f(x)dx$$

Percebendo a semelhança com a equação *dv* = *gdt*, construída na Modelação, os acadêmicos concluíram que:

$$A = \int f(x)dx + C$$

Os discentes compreenderam a relação entre a integral como uma antiderivada, na visão de Newton (Modelação), e como uma ferramenta matemática para o cálculo da área abaixo de uma curva, partindo da percepção de Leibniz. Foi possível chegar à conclusão que:

$$A = \int f(x)dx + C \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dx} = f(x)$$

Construiu-se, com a participação efetiva dos estudantes, a percepção de que essas duas equações expressam que as operações de integração e diferenciação são, essencialmente, inversas (TALL, 2013). Informou-se à turma que essa constatação é denominada pelos matemáticos de Teorema Fundamental do Cálculo.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para buscar mais subsídios sobre o alcance dos caminhos percorridos, as questões a seguir tiveram suas respostas analisadas por meio da ATD: *o que você pensa sobre o uso de experiências que requerem observação, descrição, ação e reflexão no estudo de Matemática?;* e *você acredita que atividades de Modelação, como a que foi realizada em aula, são importantes para a Educação Matemática?*

O percurso traçado pela ATD resultou em três categorias emergentes: *experiência corporificada*; *inspiração para a prática docente*; e *tirando o foco da manipulação algébrica do formalismo*. Dessa forma, três metatextos[4] foram elaborados e expressam a compreensão dos pesquisadores construída ao longo da leitura dos argumentos dos sujeitos da pesquisa.

Experiência corporificada

Na matemática escolar o estudo se desenvolve a partir de um paralelo entre corporificações e simbolismos. Entende-se que esse é o caminho que deve ser seguido na introdução de conceitos iniciais do Cálculo. Ademais, de acordo com A2, experiências sensoriais tornam a aprendizagem "muito mais fácil, pois trabalhamos com algo do nosso cotidiano, com coisas que conhecemos".

Pondera-se, conforme ressaltam Stewart e Tall (2015), que a compreensão inicia com o desenvolvimento de conexões entre ideias matemáticas e percepções de outras dimensões, como a natureza, por exemplo. Assim, A1 afirma que "fica mais fácil compreender a teoria a partir da prática".

Corroborando essa ideia, A2 destaca que "o ser humano aprende mais com questões do cotidiano". Tall (2013) argumenta que a transição da matemática escolar para níveis mais sofisticados de pensamento pode ser realizada mais naturalmente, se for fundamentada em experiências corporificadas e simbólicas. Tall e Mejía-Ramos (2004) ressaltam que a corporificação envolve interação prática com o mundo exterior e que um

[4] Para garantir o anonimato dos alunos, esses são identificados nos metatextos pelos códigos A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.

curso de Cálculo deve ser pautado por vivências capazes de gerar experiências cognitivas fundamentadas nessa premissa.

A realização de atividades pedagógicas que levam em consideração o ponto de vista dos estudantes, suas vivências e concepções anteriores, são, de acordo com A4, “de suma importância”, uma vez que, conforme ressalta A2, “temos a possibilidade de usar nosso conhecimento prévio” em situações que, na perspectiva de A1, “são essenciais para a construção de um conhecimento”. Nesse sentido, Tall (2013) afirma que todo pensamento envolve metáforas, ou seja, envolve a utilização de experiências anteriores para se referir a novos contextos.

Pode-se perceber que experiências corporificadas, como a Modelação realizada, além de “despertar nossa curiosidade para sabermos se realmente vão dar certo” (A3), levam em consideração *já-encontrados* para a construção de novas compreensões. Esse tipo de prática parte do pressuposto que um conceito, de acordo com Stewart e Tall (2015), é o resultado do desenvolvimento de um padrão organizado de ideais que são, de alguma forma, interconectadas a partir de interações realizadas com conhecimentos já existentes.

A1 afirma que “ao simular situações-problema, podemos extrair conceitos matemáticos da sua resolução” e, então, de acordo com A5, “podemos enxergar onde está a aplicação do conteúdo”. Com atividades desse tipo, procura-se desenvolver, conforme destaca Tall (2013), construções mentais pessoais, dividir essas ideias com os colegas para trocar percepções construtivas e, então, mover-se para um novo estágio de compreensão.

Evidencia-se, entretanto, que o foco do estudo não deve recair estritamente sobre objetos corporificados ou operações simbólicas, isoladamente, uma vez que cada um tem sua força, mas também suas limitações. Uma construção intelectual restrita a manipulações algébricas, por exemplo, pode aumentar a fluência simbólica, mas pode acabar por limitar a flexibilidade de pensamento (TALL, 2013).

Trazendo essas ideias para o contexto da formação de professores, contribui-se para desmistificar o paradigma de que a Matemática tem como finalidade apenas desenvolver o raciocínio lógico e seus aspectos mais intrínsecos. Não se afirma que esses aspectos devem ser desprezados, mas sugere-se uma perspectiva menos formal, que faça uso de *já-encontrados* dos acadêmicos. Essa visão provavelmente contribuirá para a constituição de profissionais capazes de pensar e agir matematicamente por meio de uma concepção mais ampla, voltada para o mundo exterior (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

Inspiração para a prática docente

A relevância do professor para a Educação é indiscutível, uma vez que esse profissional trabalha para possibilitar que seus alunos construam conhecimentos importantes para a sua constituição como sujeitos capazes de perceber, interpretar e, por ventura, transformar a realidade que se apresenta. Entretanto, de acordo com D'Ambrósio (1996), se o docente insistir em ocupar o papel central na sala de aula, sua legitimidade será questionada por educandos, instituições de ensino e, por fim, pela sociedade. Para evitar essa obsolescência, um novo roteiro precisa ser abraçado pelos educadores, que devem transformar o panorama do ensino, facilitando a aprendizagem a partir da interação dos estudantes com experiências reais.

Interpretando esse cenário, Stewart e Tall (2015) afirmam que simplesmente aprender como fazer algo, sem desenvolver uma compreensão das relações estabelecidas entre os conceitos estudados, pode limitar o pensamento matemático. Entendendo a importância de uma postura docente inovadora para o sucesso do ensino e da aprendizagem, A3 argumenta que "o tipo de aula realizada na semana passada nos faz sair da zona de conforto".

Acredita-se que a percepção dos futuros professores sobre o seu trabalho pode ser modificada para transcender as práticas com as quais foram acostumados na sua formação básica. Com as atividades realizadas nas aulas de Cálculo II, os acadêmicos puderam perceber que, como observa Tall (2013), há uma relação entre as emoções dos discentes e o pensamento matemático, pois, de acordo com A6, situações corporificadas "instigam o aluno a pensar", uma vez que "fica nítido que o conteúdo estudado permite aplicações no cotidiano" (A4).

É importante para a motivação do aluno perceber que "o professor pensou em algo diferente" (A3), capaz de, conforme ressalta Dewey (1979), direcionar a curiosidade dos estudantes para fins intelectuais. Assim, é possível engajar os educandos em atividades que vislumbram a sofisticação de um conhecimento prévio, de forma que essa construção anterior possa dar conta de novas ideias (STEWART; TALL, 2015).

Entende-se que é possível catalisar a compreensão dos futuros professores sobre como o simbolismo corporificado cresce, a partir de ações físicas, até alcançar conceitos simbólicos mais amplos. Em alguns casos, de acordo com Tall e Gray (1991), pode-se chegar a procedimentos matemáticos mais sofisticados, a partir do desenvolvimento de uma flexibilidade de pensamento, denominada de *proceito*, que habilita o discente a transitar entre o processo de resolver uma expressão e o conceito de manipulá-la.

A prática da Modelação pode, como salienta A1, "mostrar que a Matemática não surgiu por acaso" e, ainda, evidenciar que, "através de uma necessidade ou um problema real", a corporificação inicial pode levar a descobertas de estruturas simbólicas importantes. Ademais, leva os futuros professores a perceber que, à medida que essas ideias iniciais são generalizadas, representações corporificadas podem se tornar limitadas, enquanto o simbolismo algébrico surge como uma forma de tradução cada vez mais poderosa.

Também é importante perceber que, com as atividades realizadas, os acadêmicos visualizaram novas formas para sua atuação, o que, de acordo com A6, "é renovador", pois, conforme destaca A7, "vimos que podemos sair do método tradicional". Nesse contexto, os futuros professores tiveram a oportunidade de entender que "uma situação-problema pode ser o ponto de partida da aula" e que essa "não precisa iniciar sempre com definições" (A7).

Tirar o foco da manipulação algébrica e do formalismo

Dewey (1979) destaca que, simplesmente solicitar a um estudante que pense, abstraindo-o de suas experiências anteriores, sem trazer-lhe qualquer situação tangível, que perturbe seu equilíbrio, é tão improdutivo quanto exigir que ele se erga puxando os cordões dos próprios sapatos. Tall (2013) afirma que, na Matemática, as construções conceituais desenvolvem-se sobre as percepções humanas e ações reais, que originam imagens mentais, que, por sua vez, são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada até tornarem-se entidades abstratas.

Tirando o foco da atuação docente de aspectos formais e das manipulações algébricas, de acordo com A3, pode-se enfim "usar coisas que estão no nosso cotidiano" e, desse modo, "não ficamos apenas resolvendo exercícios de uma forma correta, mas sem saber exatamente o que estamos fazendo" (A4). Nesse contexto, Tall (2013) argumenta que aprender rotinas pode levar ao sucesso em testes repetitivos, mas não vai contribuir para o desenvolvimento de sofisticações matemáticas.

Compreender a razão da aprendizagem, construir um panorama abrangente sobre o conhecimento matemático desenvolvido é, portanto, fundamental para que os estudantes saibam aplicá-lo, posteriormente, em situações distintas. Conforme destaca A4, "quando nos depararmos com uma situação que requer o conhecimento estudado, saberemos como utilizá-lo”.

Além disso, Stewart e Tall (2015) enfatizam que, apesar de ser possível desenvolver toda a Matemática por métodos formais e axiomáticos, sem utilizar qualquer recurso externo, esse contexto é absolutamente incompreensível para qualquer pessoa que não conheça previamente os conceitos construídos. Ou seja, uma abordagem estritamente formal é ineficaz na transição da matemática escolar para a matemática acadêmica, traduzida, inicialmente, no Cálculo.

Essa ideia torna-se mais evidente quando se compreende que o Cálculo é baseado em experiências corpóreas, sejam elas reais ou mentais. O Cálculo tem origens históricas basicamente geométricas, que, séculos depois, foram desenvolvidas simbolicamente, por meio de manipulações algébricas, para, apenas recentemente, ganhar definições e provas formais (TALL; MEJÍA-RAMOS, 2004).

Parece não fazer sentido, então, introduzir o estudo dessa disciplina com abordagens totalmente abstratas que, além de caracterizarem uma ruptura do modo como a Matemática é percebida pelos acadêmicos, contraria a construção humana. De acordo com A2, “ao trabalharmos com algo muito distante da nossa realidade, podemos não ter a mesma compreensão do que querem nos ensinar”.

Uma abordagem corporificada do Cálculo “é muito importante para desenvolvermos nosso conhecimento” (A4), pois, conforme ressalta A3, “não ficamos só em teorias e mais teorias” e, enfim, “podemos compreender o que estamos fazendo” (A4). Assim, é possível, conforme destaca A4, “nos tirar da teoria e nos levar para o lado mais prático do que aprendemos”, o que, na percepção de A7, “traz uma motivação maior aos alunos” e “ajuda na compreensão dos conceitos ensinados” (A5).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concordando com Tall e Mejía-Ramos (2004), entende-se que a introdução ao estudo do conceito de integral não deve ser feita a partir de um mundo muito sofisticado, que enxerga o Cálculo pelas lentes de *já-encontrados* típicos dos matemáticos, mas ainda muito complexos para estudantes recém concluintes do Ensino Básico. Conforme descreve-se neste texto, procurou-se construir um cenário no qual o estudo do conceito de integral fosse realizado a partir da realidade corporificada. Buscou-se criar condições, por meio da Modelação, para que os futuros docentes percebessem o conceito de integral a partir de seus *já-encontrados*, provenientes da Geometria, da Aritmética e da Álgebra.

Foi possível inferir que a abordagem proposta foi bem aceita pela turma, que estava habituada com realidades pedagógicas tradicionais. Os discentes trouxeram sua percepção sobre a interação pedagógica, construída nos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, destacando que experiências corporificadas trazem mais sentido para o que se estuda. Ademais, frisaram que aulas que não priorizam manipulações algébricas e definições formais são capazes de trazer mais motivação aos educandos, sendo uma inspiração para sua futura atuação.

Acredita-se que esta investigação pode levar a pesquisas futuras sobre a construção pedagógica de conceitos do Cálculo, provenientes do Mundo Conceitual Corporificado e do Mundo Operacional Simbólico. Para tanto, diversas metodologias e diferentes recursos existentes podem ser considerados, como o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e a Resolução de Problemas, por exemplo. Espera-se que esse trabalho, que faz uso da Modelação para a construção do conceito de integral, atinja docentes de Cálculo que, considerando as particularidades de suas realidades, possam buscar formas de ensino mais convergentes com os mundos habitados pelos acadêmicos atuais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. *Revista Ciência e Tecnologia*, v. 10, n. 16, 2010.

ARTIGUE, M. La Enseñanza de los Principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

BACKENDORF, V. R.; BASSO, M. V. A. GeoGebra na Aprendizagem de Conceitos de Matemática Avançada. *Novas Tecnologias na Educação*, v. 16, n. 1, 2018.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BORBA, M. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª Reunião Anual da Anped, *Anais*, 2004, Caxambu, MG.

BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, 1959.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. *Epistemologia e Didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DESLANDES, S. F. A Construção do Projeto de Pesquisa. In: MINAYO, M. C. S (org.). *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.

DEWEY, J. *Como Pensamos*: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo. São Paulo: Editora Nacional, 1979.

FRANT, J. B. Prefácio. In: FONSECA, L. (org.). *Didática do Cálculo*: epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

LIMA, R. N. Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. *Tese*. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N. Dispositivos Móveis em Sala de Aula: uma jornada pelos três mundos da matemática. *REVEMAT*, v. 14, n. 1, 2019.

LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, v. 67, p. 3-18, 2008.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MINAYO, M. C. S. Ciência, Técnica e Arte: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. S (org.). *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. *Análise Textual Discursiva*. 3 ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2016.

PIMENTA, A. S.; FERREIRA, J. V. Estudo de Caso: uma proposta de escopo. *Interação*, n. 12, v. 12, 2010.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema*, n. 25, p. 1-23, 2006.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. São Paulo: Cortez, 2007.

STEWART, I.; TALL, D. *The Foundations of Mathematics*. Oxford: University Press, 2015.

TALL, D. How *Humans Learn to Think Mathematically*: exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; GRAY, E. Duality, Ambiguity, and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 15, 1991, Assisi. *Proceedings*… Assisi: PME, 1991, p. 72-79.

TALL, D.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: International Congress of Mathematics Education, 2004, Copenhagen, DK. *Proceedings*… Plenary for Topic Group 12: Calculus. Copenhagen, DK, 2004.

Submetido em 24 de agosto de 2021.
Aprovado em 18 de abril de 2022.