Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i2.16581

ESTRATÉGIAS DE EXPLORAÇÃO DA SITUAÇÃO CONTRAINTUITIVA "JOGO INTERROMPIDO" POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

STRATEGIES TO EXPLORE THE COUNTERINTUITIVE SITUATION OF THE "GAME INTERRUPTED" BY HIGH SCHOOL STUDENTS

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

Neste artigo analisam-se as estratégias de resolução de uma situação contraintuitiva por alunos do ensino médio e extraem-se algumas implicações do uso desta tarefa para o ensino de Probabilidades. A situação contraintuitiva é uma versão mais simples do famoso problema colocado por Chevalier de Méré a Pascal, que trata da questão da divisão do prémio num jogo que foi interrompido antes de ter terminado. Participaram no estudo 203 alunos do ensino médio que responderam a um questionário com nove questões de Probabilidades, entre a quais se incluía a situação contraintuitiva objeto deste estudo. Em termos de resultados, salienta-se que os alunos adotaram estratégias variadas, em que combinam argumentos analíticos com argumentos intuitivos e em que está muito presente a ideia de equidade, seja ao nível das partidas do jogo ou do jogo. Por outro lado, essa diversidade de estratégias e a mobilização de aspetos analíticos e intuitivos revelam o potencial da tarefa para a sua exploração em termos do ensino de Probabilidades. Tal diversidade, ao favorecer o confronto, a discussão e a partilha entre os alunos, promove a construção de um conceito de probabilidade multifacetado e, em última instância, bem integrado na mente do aprendiz.

Palavras-chave: Probabilidades; Situação contraintuitiva; Estratégias de resolução; Alunos do ensino médio.

Abstract

In this article, strategies for solving a counterintuitive situation by high school students are analysed and some implications of the use of this task in the teaching of Probability are extracted. The counterintuitive situation is a simpler version of the famous problem posed by Chevalier de Méré to Pascal, which deals with the issue of the division of the prize in a game that was interrupted before it was finished. Two hundred and three high school students participated in the study and answered a questionnaire with nine Probability questions, including the counterintuitive situation that is the object of this study. In terms of results, it should be noted that students have adopted varied strategies, in which they combine analytical arguments with intuitive arguments and in which the idea of equity is very present, whether at the level of the game matches or the game. On the other hand, this diversity of strategies and the mobilization of analytical and intuitive aspects reveal the potential of the task for its exploration in terms of teaching

Probability. Thus, such diversity, by favouring confrontation, discussion and sharing among students, contributes to the construction of a multifaceted probability concept and, consequently, well integrated in the learner's mind.
Keywords: Probability. Counterintuitive situation. Strategies of resolution. High school students.

INTRODUÇÃO

Desde o seu surgimento, no século XVII, tem-se constatado que a teoria das Probabilidades constitui uma área científica especialmente propensa para o surgimento de situações contraintuitivas e mesmo paradoxais. São muitos e variados os exemplos de tais situações, que podem ser consultados em diferentes publicações (e.g., BATANERO; CONTRERAS; CAÑADAS; GEA, 2012; BATANERO; SANCHEZ, 2005; FALK, 1986; TVERSKY; KAHNEMAN, 1982).

Para alguns autores, as situações contraintuitivas, que veiculam falácias e conclusões paradoxais (FALK; KONOLD, 1992), são mais frequente em Probabilidades do que em outras áreas da matemática, o que se explica pelo facto de se tratar de uma área científica relativamente recente, com apenas cerca de quatro séculos de existência. Segundo Batanero (2005), muito embora o conceito de probabilidade tenha sido definitivamente estabelecido por Kolmogorov, em 1933, ele continua a assumir uma natureza multifacetada, contribuindo os seus vários significados (intuitivo, clássico, frequencista, subjetivo e estrutural) para aumentar as dificuldades na sua aquisição.

Ao mesmo tempo, atualmente, um pouco por todo o mundo, assiste-se ao desenvolvimento do ensino das Probabilidades na escola, com maior incidência nos primeiros anos de escolaridade. Ora, é provável que as dificuldades enfrentadas pelas pessoas, inclusive por aquelas com uma razoável formação em Probabilidades, se repercutam na aprendizagem dos alunos na escola.

Portanto, no contexto do ensino, interessa conhecer a forma como os alunos reagem às situações contraintuitivas e avaliar o seu valor educacional, pois omitir tais situações não implica que as dificuldades dos alunos desapareçam (FERNANDES, 1990). Especificamente, no presente estudo, confrontam-se alunos do ensino médio brasileiro com uma situação contraintuitiva e analisam-se as suas respostas, mais precisamente estudam-se as estratégias por eles adotadas ao resolverem a situação problemática do “jogo interrompido”.

Nas secções subsequentes do artigo trata-se o enquadramento teórico, focado nas intuições e situações contraintuitivas de Probabilidades e na aprendizagem através de situações contraintuitivas, seguindo-se a referência ao método usado no estudo, a exploração propriamente dita da situação contraintuitiva e a análise das estratégias adotadas pelos alunos e, por último, apresentam-se as principais conclusões do estudo e extraem-se algumas implicações para o ensino de Probabilidades.

INTUIÇÕES E SITUAÇÕES CONTRAINTUITIVAS DE PROBABILIDADES

Para Fischbein (1987), as intuições fazem parte integrante da atividade regular de pensamento de qualquer pessoa, significando que

> durante um processo de raciocínio, temos de acreditar – pelo menos temporariamente (mas absolutamente) – nas nossas representações, interpretações ou soluções momentâneas, de outro modo o nosso fluxo de pensamentos paralisaria. É a este tipo de crença que chamamos intuição. Crenças cognitivas, elaboradas e confirmadas repetidamente pela prática, podem adquirir um carácter axiomático. (p. 28)

Ainda, segundo Fischbein (1987, 1990), as intuições têm certas características gerais que as distinguem de outros tipos de cognições, designadamente: (1) a autoevidência, significa que as intuições são autoconsistentes e autojustificáveis ou autoexplicativas; (2) a certeza intrínseca, refere-se à convicção de que algo é verdadeiro sem necessidade de prova; (3) a persistência, significa que as intuições são muito resistentes e tenazes; (4) a coercividade, exprime que as intuições se impõem aos indivíduos como verdades obrigatórias e como proposições que não podem ser substituídas pelas suas contrárias; (5) a condição teórica, implica que, geralmente, numa intuição se atinge a universalidade de um princípio, de uma relação ou de uma lei; (6) a extrapolação, refere-se a que a intuição excede os dados disponíveis; (7) a globalidade, significa que a intuição é uma cognição estruturada que oferece uma visão global e unitária de uma certa situação; e (8) a natureza implícita, revela que as reações intuitivas são a expressão superficial da estrutura de mecanismos e processos subjacentes tácitos.

Por seu lado, Scholz (1987) confronta atributos do pensamento intuitivo e analítico, referindo que: (1) o pensamento intuitivo é pré-consciente ao nível da aquisição e do processamento de informação, e o pensamento analítico é consciente ao nível da aquisição, seleção e processamento de informação; (2) enquanto o pensamento intuitivo envolve uma compreensão por sentimento e instinto de empatia, o pensamento analítico envolve um raciocínio puramente intelectual ou lógico, independente de disposições temporárias e fisiológicas; (3) no pensamento intuitivo o processamento de um campo global de conhecimento é repentino, sintético e paralelo, já no pensamento analítico a atividade cognitiva é sequencial, linear e ordenada passo-por-passo; (4) no pensamento intuitivo o problema é tratado como um todo, e no pensamento analítico há uma separação dos detalhes da informação; (5) enquanto o pensamento intuitivo depende da experiência pessoal, o pensamento analítico é dela independente; (6) o pensamento intuitivo socorre-se de metáforas pictóricas, enquanto o pensamento analítico socorre-se de padrões conceptuais ou numéricos; (7) no pensamento intuitivo há um baixo controlo cognitivo, e no pensamento analítico há um alto controlo cognitivo; (8) o pensamento intuitivo é acompanhado de envolvimento emocional, embora sem ansiedade, enquanto o pensamento analítico é uma atividade livre de emoções; e (9) o produto do pensamento é acompanhado de um sentimento de certeza no pensamento intuitivo, e no pensamento analítico é acompanhado de um sentimento de incerteza.

Na perspetiva de Fischbein (1975), as intuições dos estudantes podem classificar-se em primárias e secundárias, consoante são desenvolvidas em contexto informal, em resultados das suas vivências e experiências do quotidiano, ou em contexto formal de ensino, respetivamente. Ao desenvolverem intuições secundárias na escola, espera-se que os estudantes ultrapassem as possíveis limitações e erros inerentes às intuições primárias.

Para além dos tipos de intuições, antes referidos, podemos também considerar as situações matemáticas, ou de outra área disciplinar, como sendo ou não contraintuitivas (e.g., BURRIL, 1990; FALK; KONOLD, 1992; LESSER, 1984). Estas situações, que desencadeiam falácias e conclusões paradoxais, revelam-se difíceis para os alunos e levam-nos, em geral, a dar respostas erradas.

No caso das Probabilidades proliferam as situações contraintuitivas (BATANERO; SANCHEZ, 2005), talvez mais frequentes do que em qualquer outro ramo da matemática. Encontramos exemplos destas situações desde a origem da teoria das probabilidades (BATANERO et al., 2012), como acontece com o problema da divisão das apostas num jogo de dados que teve de ser interrompido sem que nenhum dos dois jogadores tivesse ganho. Este problema, colocado por Chevalier de Méré a Pascal, estabelece que:

> Dois jogadores, A e B, combinaram realizar um conjunto de jogos, tendo cada um deles a mesma chance de ganhar. Deles, o primeiro que ganhasse cinco jogos, ganharia a aposta. Contudo, por razões que lhes eram estranhas, tiveram de interromper o jogo quando A tinha ganho 4 jogos e B tinha ganho 3 jogos. Como deve ser dividida a aposta?

Segundo Freudenthal (1973), algumas pessoas adotam a estratégia baseada nos jogos já ganhos por cada jogador, devendo a aposta ser dividida segundo a razão $4:3$; enquanto outros se focam nos jogos que é necessário ganhar para atingir as cinco vitórias, devendo a aposta ser distribuída segundo a razão $(5-3):(5-4)$, ou seja, $2:1$. Para Pascal nenhuma destas estratégias é adequada, defendendo que a aposta deve ser dividida segundo a razão das possibilidades de cada jogador ganhar os cinco jogos, supondo que o jogo continua até terminar. Como o jogador A tem 3 possibilidades e o jogador B tem uma possibilidade, então a aposta deve ser distribuída segundo a razão $3:1$.

Estudando um problema diferente, Falk (1986) apresentou a alunos a seguinte situação contraintuitiva:

> Uma urna tem três cartões: um é azul dos dois lados, outro é verde dos dois lados e o terceiro é azul de um lado e verde do outro. Seleciona-se um cartão ao acaso que é colocado sobre uma mesa. O lado que se vê é azul. Qual a probabilidade de o outro lado ser também azul?

Neste problema, que é uma versão adaptada do paradoxo da caixa de Bertrand, o autor verificou que a maior parte dos estudantes apresentou o valor $\frac{1}{2}$ para a probabilidade de a cor oculta ser azul se a face mostrada era azul, quando o valor correto é $\frac{2}{3}$. Este erro pode resolvido considerando a descrição do espaço amostral implicado (BATANERO; SANCHEZ, 2005; CORREIA; FERNANDES, 2010). Sejam então A, B e C cada um dos cartões e nomeiem-se por 1 e 2 cada uma das suas faces. Assim, A_1, A_2 e B_1 são as faces azuis, e B_2, C_1 e C_2 são as faces verdes. Portanto, sabendo-se que o lado do cartão é azul, conclui-se que há 2 casos favoráveis num total de 3, ou seja, que a probabilidade é $\frac{2}{3}$.

Num outro caso, Fernandes (1990) propos a estudantes, futuros professores de matemática, a seguinte situação:

> Qual das afirmações seguintes é mais provável?
> a) Um ser humano é de cor negra.
> b) Um ser humano é de cor negra e nasceu em África.
> c) As duas afirmações a) e b) são igualmente prováveis.

Apesar da afirmação a) ser mais provável, pois o conjunto dos seres humanos de cor negra é mais vasto do que o conjunto dos seres humanos africanos de cor negra, a maioria dos estudantes avaliaram a afirmação b) como sendo mais provável. Nesta situação, os estudantes violaram a regra da conjunção, que afirma: Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$ e, em consequência desta regra, resulta também que $P(A \cap B) \leq P(A)$ e $P(A \cap B) \leq P(B)$, pois $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

Para Tversky e Kahneman (1983), uma tal violação da regra da conjunção, conhecida por 'falácia da conjunção', resulta do facto de o acontecimento B ser altamente representativo do acontecimento A, isto é, o acontecimento 'ter nascido em África' é altamente representativo do acontecimento 'ser de cor negra'.

Muitas mais situações contraintuitivas poderíamos apresentar, contudo, por razões de espaço, ficamo-nos apenas com as três antes referidas. A título de exemplo, poderão ser consultados muitos outros exemplos em Batanero et al. (2012), Batanero, Fernandes e Contreras (2009), Batanero e Sanchez (2005), Fernandes (1990) e Tversky e Kahneman (1982).

APRENDIZAGEM E SITUAÇÕES CONTRAINTUITIVAS

No caso das situações contraintuitivas, as quais revelam intuições persistentes e conflituantes com o saber normativo, Lesser (1994) distingue dois paradigmas de ensino e aprendizagem da estocástica: o paradigma tradicional, em que os exemplos contraintuitivos não são abordados (pelo menos de forma sistemática), e o paradigma alternativo, focado nos exemplos contraintuitivos.

Defendendo o paradigma tradicional, Burril (1990), das recomendações para o ensino das Probabilidades e Estatística, na perspetiva da implementação do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989), afirma na quinta recomendação que "A ênfase no ensino da Estatística deve ser colocada em bons exemplos e na construção de intuições, e não em paradoxos de Probabilidades ou na utilização da Estatística para enganar" (p. 113).

No mesmo sentido, Watkins, Burril, Landwehr e Scheaffer (1992) afirmam que mostrar como mentir com a Estatística e destacar paradoxos em Probabilidades tem por consequência a destruição da confiança do estudante. Este ponto de vista é também partilhado por Falk e Konold (1992), os quais, referindo-se aos paradoxos em Probabilidades, afirmam:

> Eles parecem desafiar os estudantes e captar o seu interesse. É tentador trazer para a sala de aula alguns dos problemas mais contraintuitivos para demonstrar aos estudantes as suas tendências erradas e talvez esclarecê-las. Contudo, se um professor persiste em chamar a atenção dos estudantes para o quão predispostos estão a cometer erros inferenciais, eles poderão tornar-se tão convencidos das suas incapacidades ao ponto de jamais acreditarem que alguma vez dominarão técnicas mais apropriadas. (p. 161)

Tendo em vista evitar a perda de confiança dos estudantes nas suas capacidades, Falk e Konold (1992) advogam um equilíbrio entre situações que ilustrem conceções erradas e enviesamentos e situações que afirmem as capacidades dos estudantes. Neste contexto, as intuições válidas, cuja existência tem sido demonstrada por vários autores (e.g., FERNANDES, 2000; FISCHBEIN; NELLO; MARINO, 1991; GREEN, 1983), constituem para estes autores um bom ponto de partida para o ensino e aprendizagem de Probabilidades.

Lesser (1994) reconhece limitações no paradigma tradicional na medida em que algumas conceções erradas resistem ao ensino e consolidam-se com a idade (FISCHBEIN; SCHNARCH, 1997; GREEN, 1983) e pelo facto de a posição de Burril (1990) se basear no que acontece na sala de aula e não na investigação formal.

Diferentemente, no paradigma alternativo destaca-se a exploração sistemática de situações contraintuitivas. Segundo Gordon (1991), a exploração destas situações, que se podem encontrar em todas as áreas da matemática, incluindo as Probabilidades, apresentam várias vantagens: capta a atenção dos estudantes em virtude do desequilíbrio experienciado; desafia hábitos de pensamento e práticas e constitui uma oportunidade de desenvolver a necessidade de exploração, de reflexão e de raciocínio.

Lesser (1998) defende que o uso inteligente de exemplos contraintuitivos em Estatística apoia uma pedagogia construtivista, promovendo uma aprendizagem mais profunda a partir das crenças prévias dos alunos e estimulando o papel do professor como facilitador da aprendizagem. Destaca, ainda, que os alunos poderão desenvolver a motivação, a metacognição, o pensamento crítico, a aprendizagem por descoberta, as conexões com aplicações da vida real e a história. Alguns destes aspetos são também mencionados por Falk e Konold (1992), e Konold (1994) acrescenta que os resultados surpreendentes predispõem os alunos a explorarem formalmente o problema e revelam a ansiedade dos alunos em exprimirem opiniões nas discussões de sala de aula. Por fim, Batanero et al. (2012) destacam a importância de os estudantes experienciarem o processo histórico do desenvolvimento da teoria de Probabilidades.

Tal como no paradigma tradicional, também no paradigma alternativo Lesser (1994) reconhece limitações, designadamente: uma situação pensada para confrontar um raciocínio normativo com um raciocínio informal pode não gerar qualquer conflito; a ampla circulação de um conjunto standard de exemplos contraintuitivos e a sua exploração em sala de aula pode reduzir a sua eficácia pois os alunos podem-se focar mais nas respostas corretas do que em compreender os problemas; e a profunda compreensão resultante da exploração de um exemplo contraintuitivo raramente está associada a um curso superior introdutório. Neste último caso, a questão crítica é estar-se seguro de que os estudantes dispõem dos meios adequados para analisar os paradoxos de modo significativo.

Finalmente, Lesser (1994) aponta quatro razões para defender uma síntese dos dois paradigmas: primeiro, os investigadores de Educação em Ciências recorrem simultaneamente a intuições ancoradoras, consistentes com o paradigma tradicional, e a estratégias de mudança conceptual, consistentes com o paradigma alternativo; segundo, a recomendação de Burril (1990) não deve ser entendida como excluindo totalmente as situações contraintuitivas, assim como Gordon (1991), provavelmente, não defende a apresentação exclusiva de situações paradoxais; terceiro, assim como não há evidência de que à eliminação dos exemplos contraintuitivos corresponderia uma realização mais efetiva em certos objetivos afetivos e cognitivos, também não há evidência de que esses exemplos devam ser usados sempre ou durante a maior parte do tempo; e quarto, a escolha entre explorar uma situação contraintuitiva ou outra situação deve ser ditada por critérios de adequação.

METODOLOGIA

Neste artigo estudam-se as estratégias adotadas por alunos brasileiros do ensino médio na exploração do problema da divisão das apostas de um jogo de várias partidas entre dois jogadores, quando esse jogo foi interrompido por razões estranhas aos jogadores.

Participaram no estudo 203 estudantes brasileiros do ensino médio, pertencentes a duas escolas, uma púbica e outra privada, da cidade de Brasília. Estes alunos frequentavam o 3.º ano e os alunos da escola privada apresentavam uma realização a matemática superior (média de 7,5 valores ao longo do ensino médio) ao dos alunos da escola pública (média de 6,5 ao longo do ensino médio). Quando inquiridos sobre o problema da divisão das apostas, os alunos já tinham concluído o estudo do tema de Probabilidades no ensino médio.

Os dados foram recolhidos através de um questionário com nove questões, incluindo tarefas de probabilidade em experiências compostas, probabilidade conjunta e probabilidade condicionada em diversos contextos. Neste artigo apresentamos e analisamos apenas uma dessas questões, a qual trata do problema da divisão das apostas num jogo que foi interrompido antes de ter sido concluído (Figura 1). Na aplicação do questionário, que foi respondido individualmente em sala de aula em cada uma das turmas, os alunos foram informados, previamente, de que as suas respostas, fornecidas sob a condição de anonimato, apenas tinham fins investigativos e não se destinavam a atribuir qualquer classificação. Assim, cientes de que a sua participação era voluntária, os alunos assinaram o termo de consentimento esclarecido, tendo-se verificado que todos os alunos presentes no momento da aplicação responderam ao questionário.

Dois jogadores A e B disputam um jogo que termina quando um dos dois ganhar duas rodadas[1]. Em qualquer das rodadas, ambos os jogadores têm a mesma chance de ganhar. A primeira rodada aconteceu e o jogador A ganhou. Ora, por algum motivo, o jogo foi interrompido antes de acontecer a segunda rodada, donde a aposta de R$ 800, que estava em jogo, deverá ser dividida entre os dois jogadores. Quanto você acha que deve receber o jogador A? E o jogador B? Justifique.

Figura 1 — Tarefa proposta aos alunos
Fonte: Elaboração do autor

A questão proposta aos alunos consiste num problema sobre a divisão das apostas num jogo interrompido antes de ter sido concluído. Como foi referido numa secção anterior, este tipo de problema foi apresentado por Chevalier de Mére a Pascal (FREUDENTHAL, 1973), embora numa versão mais elaborada. Nessa versão, dos primórdios do desenvolvimento da teoria das Probabilidades, ganhava o jogo o jogador que vencesse cinco partidas e, na altura da interrupção do jogo, o jogador A tinha ganho quatro partidas e o jogador B tinha ganho três partidas. Com a versão simplificada, que

[1] Neste artigo usamos o termo rodadas(s) com o mesmo significado de partida(s).

foi apresentada aos alunos, pretendeu-se adequar a versão original do problema aos conhecimentos de Probabilidades adquiridos pelos alunos.

Por fim, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as estratégias adotadas pelos alunos na resolução do problema proposto, determinando-se, de seguida, frequências dessas estratégias e recorrendo-se a tabelas para resumir essa informação. Nas estratégias, para estabelecer as categorias, recorreu-se à análise de conteúdo, sendo as categorias emergentes da análise das resoluções apresentadas pelos alunos, as quais são descritas na próxima secção, quando da apresentação dos resultados. A categorização efetuada será também ilustrada com exemplos de respostas dos alunos, identificados pela letra A (abreviatura de aluno) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 203).

EXPLORAÇÃO DA SITUAÇÃO CONTRAINTUITIVA "JOGO INTERROMPIDO"

Da totalidade de alunos que participaram no estudo (203), verificou-se que apenas 110 responderam à questão do jogo interrompido, a que corresponde 46% de não respostas. E desses, três não apresentaram qualquer explicação para a divisão do valor do prémio segundo cada jogador, tendo, portanto, de ser excluídos também da análise subsequente. Esta elevada percentagem de não respostas indicia que os alunos tiveram muitas dificuldades em responder a esta questão do estudo.

Seguidamente, na Tabela 1, apresentam-se os diferentes tipos de estratégia divisadas pelos alunos para dividirem o prémio por cada um dos dois jogadores após a interrupção do jogo.

Tabela 1 ─ Frequências (em %) de alunos segundo as estratégias por eles utilizadas na divisão do prémio

Tipo de estratégia	Frequência (em %)
Dividir o prémio igualmente em cada rodada	37 (35)
Dividir o prémio segundo a probabilidade de cada jogador ganhar	28 (26)
Dividir igualmente o prémio total	26 (24)
Dividir qualitativamente o prémio	11 (10)
Estratégia irrelevante ou incompreensível	5 (5)
Total	107 (100)

Nota: as percentagens registadas na tabela foram determinadas considerando o número total de alunos que responderam à tarefa e explicaram as suas respostas, ou seja, um total de 107 alunos.

Fonte: Elaboração do autor

Na continuação, explica-se e exemplifica-se cada um dos diferentes tipos de estratégia subjacentes às resoluções dos alunos, tendo em vista compreender mais profundamente as ideias mobilizadas pelos alunos na exploração da situação problemática.

Dividir o prémio igualmente em cada rodada

Esta estratégia foi adotada por 35% dos alunos e conduziu a dois tipos de resposta diferentes. Num dos tipos de resposta, 17% dos alunos reconheceram que a divisão não deve ser equitativa, uma vez que o jogador A já tinha ganho a primeira rodada. Porém, estes alunos utilizaram probabilidades, a um nível superficial, para estabelecer a partilha do prémio entre os dois jogadores, considerando que em cada rodada estava em jogo metade do valor do prémio, ou seja, o valor de R$ 400.

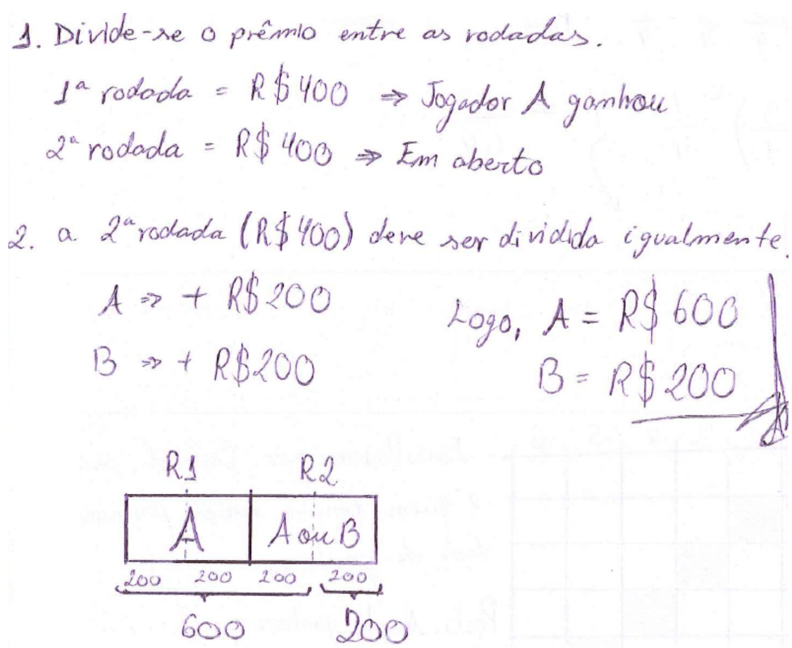

Figura 2 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A187 na divisão do prémio
Fonte: Elaboração do autor

Seguindo esta estratégia, conforme podemos verificar na Figura 2, os alunos consideraram que o jogador *A* tinha direito a receber R$ 400, por ter ganho a primeira rodada, e mais R$ 200 pela segunda rodada, portanto R$ 600, e cabendo os restantes R$ 200 ao jogador *B* . Note-se que na divisão do prémio da segunda rodada, implicitamente, assume-se que os jogadores teriam as mesmas chances de ganhar, o que implicaria receberem também o mesmo valor do prémio. Além disso, a realização de duas rodadas pode não ser suficiente para determinar o vencedor do jogo, devendo realizar-se mais uma rodada (portanto um total de três) no caso do jogador B ganhar a segunda rodada.

No outro tipo de resposta, os restantes alunos (18%) consideraram a divisão do prémio total pelas três rodadas do jogo, conforme se mostra na resolução da Figura 3.

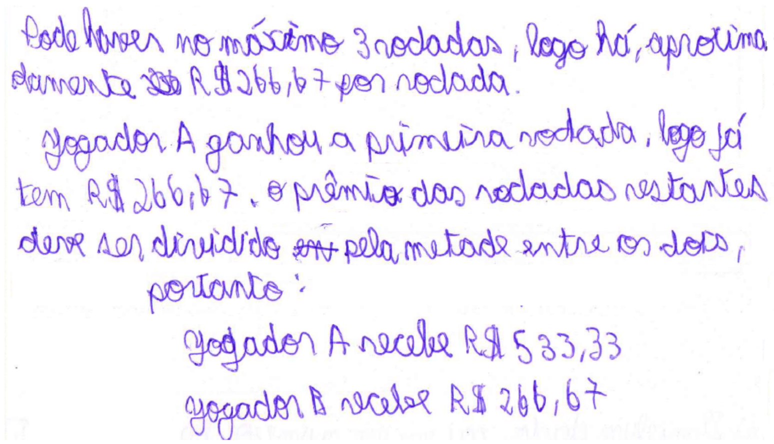
Pode haver no máximo 3 rodadas, logo há, aproxima-damente R$ 266,67 por rodada.
Jogador A ganhou a primeira rodada, logo já tem R$ 266,67. O prêmio das rodadas restantes deve ser dividido ~~em~~ pela metade entre os dois, portanto:
Jogador A recebe R$ 533,33
Jogador B recebe R$ 266,67

Figura 3 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A93 na divisão do prémio.
Fonte: Elaboração do autor

O aluno A93 adota uma estratégia com semelhanças à do aluno A187 (Figura2), porém realiza a divisão do prémio em três partes, considerando corretamente que seria necessário realizar três rodadas para determinar o vencedor do jogo em qualquer caso. Nesta estratégia, $\frac{1}{3}$ do prémio caberia ao jogador A por ter ganho a primeira rodada e o restante $\frac{2}{3}$ seria distribuído equitativamente pelos dois jogadores, portanto, recebendo cada jogador $\frac{1}{3}$ do prémio pelas duas rodadas seguintes. Deste modo, do prémio total, o jogador A ganharia $\frac{2}{3}$ e o jogador B ganharia $\frac{1}{3}$. Também neste caso, os alunos assumiram, implicitamente, iguais chances de qualquer dos jogadores vencer a segunda e terceira rodadas, e, em consequência, cada um devia receber o mesmo valor do prémio.

Dividir o prémio segundo a probabilidade de cada jogador ganhar

Esta estratégia foi adotada por 26% dos alunos e conduziu, tal como a estratégia anterior, também a dois tipos de resposta, baseados na determinação da probabilidade de cada jogador ganhar o jogo e na distribuição proporcional do prémio. Num desses tipos de resposta, 15% dos alunos determinou corretamente as probabilidades de cada jogador vir ganhar o jogo e, de seguida, distribuíram proporcionalmente o prémio em jogo.

Na perspetiva de Pascal, o jogador A, que ganhou a primeira rodada, tem a probabilidade $\frac{1}{2}$ de ganhar o jogo na segunda rodada e a probabilidade $\frac{1}{4}$ $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$ de ganhar o jogo na terceira rodada, portanto, ao todo, tem a probabilidade $\frac{3}{4}$ de ganhar o jogo, enquanto o jogador B tem a probabilidade $\frac{1}{4}$ de ganhar o jogo. Na Figura 4 apresenta-se a resolução de um aluno que seguiu exatamente esta estratégia.

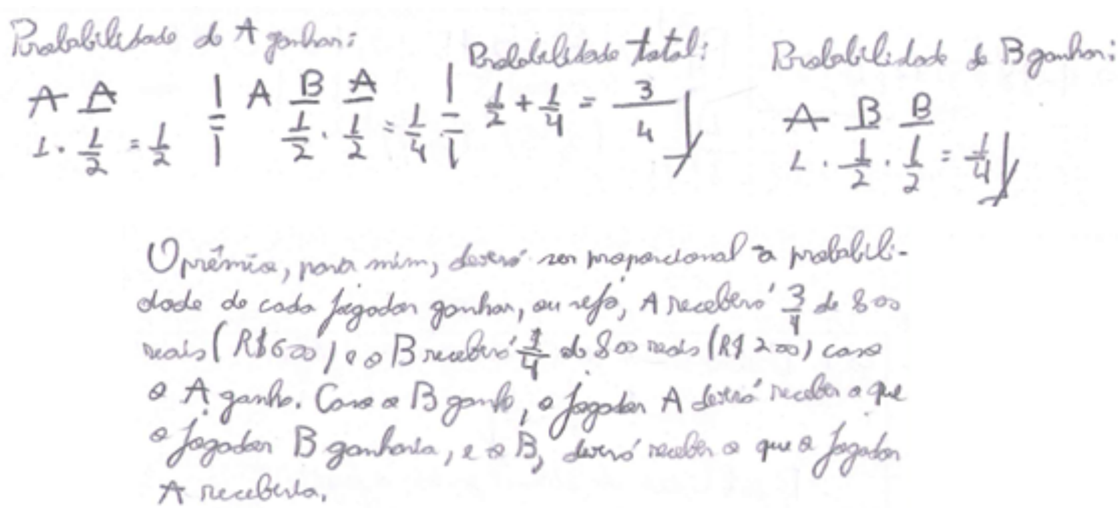

Figura 4 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A31 na divisão do prémio
Fonte: Elaboração do autor

Neste exemplo, o aluno A31 determina corretamente as probabilidades de cada jogador ganhar e, de acordo com o que foi calculado, distribui proporcionalmente o valor do prémio recorrendo à noção de esperança matemática, o que significa multiplicar o valor da aposta (R$ 800) pela probabilidade de cada jogador ganhar o jogo. Contudo, o aluno distingue a hipótese de A ganhar da de B ganhar. Na hipótese de A ganhar, o aluno obtém os valores corretos do prémio que cada jogador deve ganhar; mas na hipótese de B ganhar, ele troca erradamente os valores dos prémios que cada jogador deve ganhar.

Já os 11% restantes alunos cometeram erros na determinação das probabilidades de os jogadores vencerem o jogo. Na Figura 5 exemplifica-se uma resposta desse tipo, em que o aluno apenas indica os valores das probabilidades.

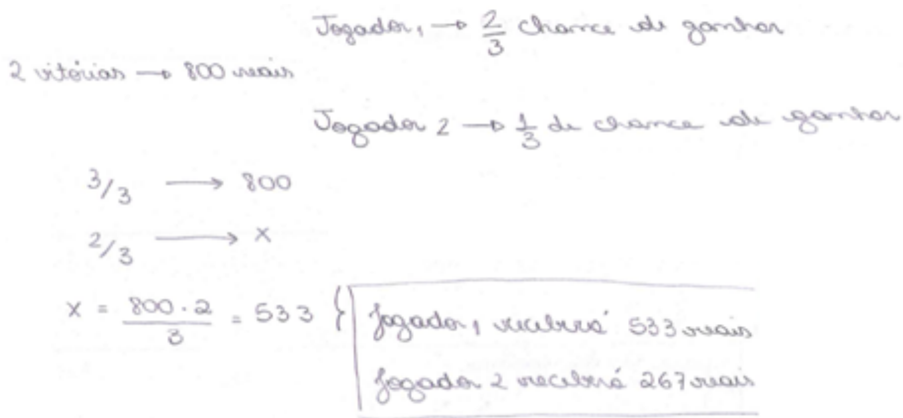

Figura 5 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A194 na divisão do prémio.
Fonte: Elaboração do autor

Nesta resolução, o aluno A194 divide proporcionalmente o prémio consoante as probabilidades de cada jogador ganhar. Contudo, na sua estratégia, ele falha na atribuição de tais probabilidades. Sem explicar a origem dos valores das probabilidades que usa na determinação dos prémios dos jogadores, o aluno parece considerar as três rodadas do jogo, das quais um dos jogadores ganharia duas e o outro uma.

Dividir igualmente o prémio total

Esta estratégia foi adotada por 24% dos alunos e resultou em dividir o prémio igualmente pelos dois jogadores, ou seja, atribuindo a cada jogador a quantia de R$ 400,00. Na Figura 6 apresenta-se um exemplo deste tipo de estratégia.

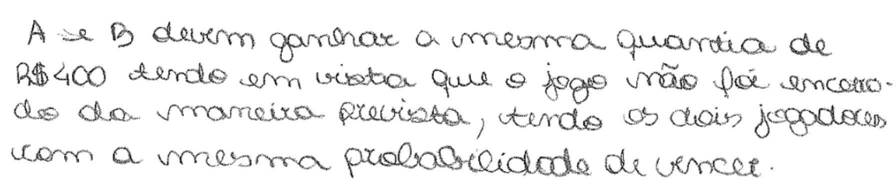

Figura 6 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A162 na divisão do prémio
Fonte: Elaboração do autor

O aluno A162 parece referir-se ao facto de que em qualquer das rodadas ambos os jogadores têm a mesma chance de ganhar, referida no enunciado, para justificar o porquê da divisão do prémio em partes iguais entre os jogadores. Apesar dessa constatação, decorrente do enunciado, daí não se deve inferir que as probabilidades de ganhar o jogo são iguais para ambos os jogadores.

Dividir qualitativamente o prémio

Esta estratégia foi adotada por 10% dos alunos e conduziu a respostas muito diversas. Os alunos neste tipo de respostas não atribuíram valores numéricos aos prémios dos jogadores, referindo apenas que ao jogador A ou ao jogador B caberia uma parcela maior do prémio, como se exemplifica na Figura 7.

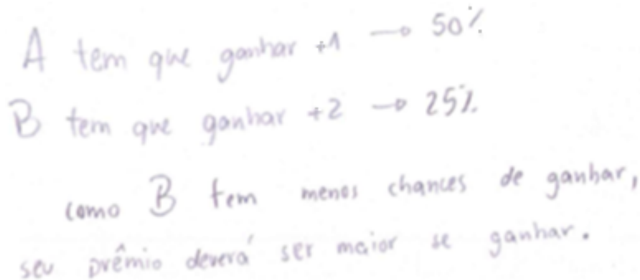
A tem que ganhar +1 → 50%
B tem que ganhar +2 → 25%
como B tem menos chances de ganhar,
seu prêmio deverá ser maior se ganhar.

Figura 7 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A141 na divisão do prémio
Fonte: Elaboração do autor

Não dando qualquer explicação sobre os valores de probabilidade que refere, o aluno A141 parece considerar que a probabilidade de cada jogador ganhar é de 50% por rodada e divide este número pelo número de rodadas necessárias para cada um deles ganhar o jogo, sem considerar a primeira rodada. O aluno conclui que o valor do prémio deve ser maior no caso da menor probabilidade de ganhar, parecendo estar subjacente a ideia jogo equitativo.

Estratégia irrelevante ou incompreensível

Este tipo de estratégia foi adotado por 5% dos alunos, conduzindo sempre a respostas ininteligíveis e/ou que não atendem ao enunciado. Na Figura 8 apresenta-se um exemplo desta estratégia, em que o aluno, apesar de apresentar alguma explicação sobre a resposta dada, não atendeu ao enunciado.

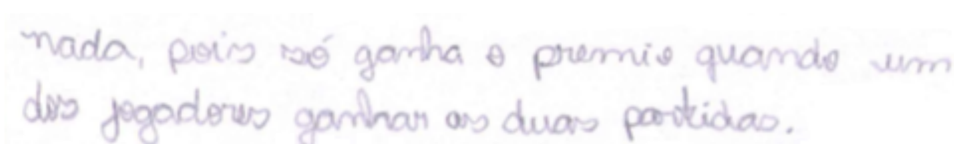
nada, pois só ganha o premio quando um
dos jogadores ganhar as duas partidas.

Figura 8 ─ Estratégia utilizada pelo aluno A43 na divisão do prémio
Fonte: Elaboração do autor

O aluno A43 não recorre a conceitos probabilísticos na sua argumentação e não responde àquilo que foi solicitado, limitando-se a um detalhe do enunciado, concretamente ao referir que o jogo termina quando um dos jogadores ganhar duas rodadas.

CONCLUSÃO

Do presente estudo destacam-se dois resultados: a elevada percentagem de alunos que não apresentaram qualquer resposta à tarefa proposta (46%) e a diversidade de estratégias por eles adotadas na divisão do prémio em jogo. Naturalmente que à elevada percentagem de não respostas estão associadas dificuldades dos alunos em resolver a situação problemática proposta, o que leva a concluir que se tratou de uma tarefa difícil para muitos alunos.

Já as estratégias de divisão do prémio em jogo foram variadas, salientando-se, em termos de frequência, dividir o prémio igualmente pelas rodadas, seguindo-se as estratégias dividir o prémio segundo a probabilidade de cada jogador ganhar e dividir igualmente o prémio total. Por último, poucos alunos referiram uma divisão qualitativa do prémio e menos ainda adotaram uma estratégia irrelevante ou incompreensível.

De entre as estratégias usadas pelos alunos, reveste-se de um interesse especial aquela que diz respeito a dividir o prémio segundo a probabilidade de cada jogador ganhar. Esta estratégia, comparativamente com as restantes, mantém uma mais forte ligação com as probabilidades, mais ainda quando alguns desses alunos (15%) determinaram corretamente as probabilidades de cada jogador ganhar recorrendo à visão de Pascal sobre um problema análogo, apresentado na secção 2 do artigo, mas com mais rodadas e, portanto, mais complexo (FREUDENTHAL, 1973).

Para além das probabilidades, também as experiências vivenciadas pelos alunos no seu quotidiano perpassam as estratégias por eles adotadas. Ou seja, as estratégias adotadas pelos alunos têm uma origem, simultaneamente, analítica e intuitiva (SCHOLZ, 1987) ou, na perspetiva de Fischbein (1975, 1987), observa-se uma interação entre intuições primárias e secundárias. Deste modo, às representações e aos conceitos e cálculos numéricos e algébricos combinam-se ideias provenientes da experiência quotidiana dos alunos. Neste último caso, a ausência de um vencedor, em virtude da interrupção do jogo, justificaria a igual divisão do prémio pelos jogadores e/ou pelas rodadas, pois a própria interrupção dos jogos em muitas situações sociais é vista como impossibilidade decidir um vencedor e, portanto, implicaria a igual divisão do prémio.

Constata-se, também, que as ideias de jogo equitativo e de divisão equitativa do prémio aparecem amplamente enraizadas nas estratégias desenvolvidas pelos alunos quando confrontados com a situação de interrupção do jogo. Bryant e Nunes (2012) atribuem mesmo à aleatoriedade, enquanto componente do conceito de probabilidade, um caracter equitativo, pois o facto de todos os resultados de uma experiência aleatória terem as mesmas chances de ocorrer e desconhecermos o resultado que ocorrerá, implica que todos os resultados estão em iguais condições.

Muito embora não se tenham estudado aspetos da exploração da situação contraintuitiva jogo interrompido em ambiente de sala de aula, a diversidade de estratégias divisadas pelos alunos, a combinação de argumentos analíticos com argumentos intuitivos implicados nessas estratégias e o suscitar da problemática da equidade dos jogos constituem aspetos promissores para a integração desta e outras tarefas semelhantes no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidades, não apenas num paradigma alternativo, mas antes privilegiando a síntese entre os paradigmas tradicional e alternativo (LESSER, 1994). Para Koparan (2021), a diversidade de estratégias adotadas pelos estudantes permite implementar novas formas para aprender matemática e podem contribuir para desenvolver o conhecimento e as experiências dos estudantes.

A respeito dos jogos equitativos, Ortiz, Batanero e Contreras (2012) referem no seu estudo que alunos de diferentes idades têm conceções adequadas da noção de jogo equitativo. Mais concretamente, os jogos de sorte e azar constituem um dos principais contextos para as crianças aprenderem probabilidades, os alunos (mesmo os mais novos) têm uma intuição correta de esperança matemática e, no caso dos alunos do ensino médio, salientam-se duas situações possíveis de equitatividade: quando todos os jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar em cada rodada ou, não sendo iguais as probabilidades, quando são iguais as esperanças matemáticas. Este último tipo de situações de equitatividade permite ampliar o estudo dos jogos equitativos a muitas mais situações.

A situação contraintuitiva aqui estudada pode ser usada na aprendizagem de probabilidades, pois o contexto de jogo que lhe é inerente favorece o envolvimento e a motivação dos alunos na sua exploração. Adicionalmente, esta situação constraintuitiva pode ser facilmente adaptável a alunos com diferentes níveis de formação matemática, bastando, para tal, variar o número de rodadas. Quanto maior for a diferença entre o número de rodadas ganhas pelos jogadores no momento em que o jogo foi interrompido, mais desafiante se torna o jogo e, por consequência, mais complexa será a resolução da situação contraintuitiva.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005.

BATANERO, C.; SANCHEZ, E. What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In: Jones., G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York: Springer, 2005. p. 241-266.

BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; CAÑADAS, C.; GEA, M. M. Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. **Novedades educativas**, Buenos Aires, 261, p. 78-84, 2012.

BATANERO, C.; FERNANDES, J. A.; CONTREARAS, J. M. Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **SUMA**, Badalona, 62, p. 11-18, 2009.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children´s understanding of probability: A literature review**. Oxford: Nuffield Foundation, 2012.

BURRIL, G. Implementing the standards: statistics and probability. **Mathematics Teacher**, Reston, v. 38, n. 12, p. 113-118, 1990.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. O jogo das fichas coloridas: estratégias de resolução de alunos do 12.º ano. In: Gomes, H.; Menezes, L.; Cabrita, I. (Orgs.). **Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2010. p. 374-386.

FALK, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. In: Davidson, R.; Swift, J. (Eds.). **Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics**. Victoria: International Statistical Institute, 1986. p. 292-297.

FALK, R.; KONOLD, C. The psychology of learning probability. In: Gordon, F.; Gordon, S. (Eds.). **Statistics for the twenty-first century,** MAA Notes 26. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 151-164.

FERNANDES, J. A. **Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos**. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1990.

FERNANDES, J. A. **Intuições e aprendizagem de probabilidades**: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade. Tese (Doutorado em Educação), Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2000.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

FISCHBEIN, E. Intuition and information processing in mathematical activity. **International Journal of Educational Research**, United Kingdom, v. 14, p. 31-50, 1990.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, n. 1, p. 96-105, 1997.

FISCHBEIN, E.; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments inchildren and adolescents. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, p. 523-549, 1991.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GORDON, M. Counterintuitive instances encourage mathematical thinking. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 84, n. 7, p. 511-515, 1991.

GREEN., D. R. (). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: Grey, D. R.; Holmes, P.; Barnett, V.; Constable, G. M. (Eds.). **Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics** (vol. 2,). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, 1983. p. 766-783.

KONOLD, C. Teaching probability through modelling real problems. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 87, n. 4, p. 232-235, 1994.

KOPARAN, T. The impact of a game and simulation based probability learning environment on the achievement and attitudes of prospective teachers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, United Kingdom, v. 52, p. 1-19, 2021.

LESSER, L. M. **The role of counterintuitive examples in statistics education**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), University of Texas, Austin, 1994.

LESSER, L. M. Countering indifference: using counterintuitive examples. **Teaching Statistics**, Nottingham, v. 20, n. 1, p. 10-12, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Autor, 1989.

ORTIZ, J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, C. Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 15, n. 1, p. 64-91, 2012.

SCHOLZ, R. W. **Cognitive strategies in stochastic thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**, Washington, v. 90, n. 4, p. 293-315, 1983.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In: Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (Eds.). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 3-20.

WATKINS, A.; BURRIL, G.; LANDWEHR, J. M.; SCHEAFFER, R. L. Remedial statistics?: The implications for college of the changing secondary school curriculum. In: Gordon, F.; Gordon, S. (Eds.). **Statistics for the twenty-first century**, MAA Notes 26. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 45-55.

Submetido em 19 de setembro de 2021.
Aprovado em 22 de junho de 2022.