REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v7i2.16530

UM ESTUDO DO LIVRO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE RICHARD COURANT: REFLEXÕES PARA O ENSINO DE CONTEÚDOS DE ANÁLISE REAL

A STUDY OF THE BOOK DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS BY RICHARD COURANT: REFLECTIONS FOR TEACHING REAL ANALYSIS CONTENTS

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE
kellyrobertaml@gmail.com

Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina – UEL
rcgpasq@uel.br

Resumo

Apresentamos, neste artigo, um estudo comparativo entre livros comumente adotados na disciplina de análise real, em alguns cursos de formação de professores de matemática, especificamente, com o compêndio Cálculo Diferencial e Integral I, editado no início do século XX, do matemático Richard Courant, com o objetivo de discutir possíveis variações na apresentação dos temas trabalhados nesta disciplina e realizar um estudo sistemático da forma como os conceitos se apresentam. Para isso, por meio de uma pesquisa bibliográfica, buscamos na história da análise real os conteúdos que melhor à caracterizam para serem abordados em nosso estudo comparativo. Na sequência, detalhamos aspectos importantes do livro de Courant para, por fim, traçarmos um paralelo entre as obras. Através desta investigação, foi possível apontarmos aspectos desta disciplina que podem ser trabalhados de modo distinto, explorando outras formas interpretativas, com releituras de alguns tópicos, de modo a expandir o olhar para assuntos que se mostraram essenciais para o desenvolvimento, e concepção atual, da própria matemática, conduzindo a implicações pedagógicas em relação ao ensino destes tópicos.
Palavras-chave: análise real; cálculo; história da matemática; ensino.

Abstract

In this article, we present a comparative study between books commonly used in the discipline of real analysis, from some courses of the formation of mathematics teachers, specifically, with the book Differential and Integral Calculus I, published in the early 20th century, by the mathematician Richard Courant, with the objective of discussing possible variations in the presentation of the themes covered in this discipline and carry out a systematic study of the way concepts are presented. For this, through a bibliographical research, we searched in the history of real analysis the contents that best characterize it to be approached in our comparative study. Next, we detail important aspects of Courant's book to, finally, draw a parallel between the works. Through this investigation, it was possible to point out aspects of this discipline that can be worked in a different way, exploring other

interpretative forms, with re-readings of some topics, in order to expand the look at issues that proved essential for the development, and current conception, of the mathematics, entailing to pedagogical implications regarding the teaching of these topics.
Keywords: real analysis; history of mathematics; calculus; teaching.

INTRODUÇÃO

A análise real tem sido apontada como importante disciplina dos cursos de licenciatura em matemática e representa, por assim dizer, o apogeu das ideias apresentadas nos cursos de cálculo. Segundo Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020), "discutir o papel e a relevância da disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática é, assim, uma tarefa extremamente complexa, porém, acreditamos ser necessária e urgente" (p. 01).

Além disso, é nesta matéria que o acadêmico é conduzido a reflexões sobre o rigor e os fundamentos expostos nos processos de limite, seja pelas definições de continuidade, derivação, integração ou pelo estudo das séries. Curry e Vianna (2005) apresentam argumentos de docentes (matemáticos) que defendem a importância desta disciplina para a formação de professores e buscam discuti-los e situá-los em relação a estudos sobre a formação do professor de matemática da escola básica, questionando tais colocações. Dentre os apontamentos citados, os autores categorizaram

> Categoria 1: A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de "pensar matematicamente", proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de "cultura matemática". (p. 20-21)
> Categoria 2: A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os "porquês" e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras. (p. 22)
> Categoria 3: A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências. (p. 24)

Tais categorias indicam argumentações que reforçam a relevância desta matéria tanto para a formação matemática como do professor de matemática. Ademais, como disciplina obrigatória dos cursos de formação de professores, conforme parecer nº 1.302/2001 CNE/CES (BRASIL, 2001) que estabelece Fundamentos de Análise como "conteúdos comuns a todos os cursos de licenciatura" (p. 6), esperamos que este corpo teórico de conhecimentos conduza o acadêmico a aperfeiçoar sua linguagem matemática e favorecê-lo a realizar uma análise teórica de conceitos, além de estabelecer conexões, quando possível, com conteúdos de matemática de níveis mais elementares.

Neste sentido, no intuito de contribuir com reflexões que possam ampliar os horizontes/fronteiras desta disciplina, exibimos na sequência um comparativo de uma obra editada do início do século XX, do matemático Richard Courant (1951), Cálculo Diferencial e Integral I, com livros comumente adotados na disciplina de análise real, de cursos de licenciatura em matemática. Este estudo é parte de um projeto maior, “A disciplina de Análise: uma investigação em curso”, em que nos dedicamos a compreender a problemática desta disciplina, para, possivelmente, contribuirmos com a formação de professores investigando maneiras alternativas de intervir junto a esta matéria.

Outrossim, em seção subsequente, apresentamos uma breve contextualização sobre o desenvolvimento da análise real a fim de melhor identificarmos os seus “pontos conflitantes” e os personagens que se debruçaram sobre tais questões. Tais pontos auxiliaram a definir os conteúdos que damos ênfase em nosso estudo descritivo.

Dessa forma, através desta investigação, além de mostrarmos uma breve discussão sobre os conteúdos constantes nas obras de análise real de Figueiredo (1996), Ávila (1999, 2006) e Lima (2017) em paralelo ao desenvolvido por Courant (1951), procuramos apontar aspectos desta disciplina que possam ser trabalhados de modo distinto, explorando outras formas interpretativas, buscando expandir olhares para assuntos que se mostraram essenciais para o desenvolvimento da própria matemática.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

O estudo dividiu-se em três etapas. Inicialmente, realizamos uma pesquisa bibliográfica, pautada em diferentes referenciais de história da matemática, com o objetivo de identificar como a análise real estruturou o seu atual corpo de conteúdos, para obtermos uma visão crítica e interpretativa desta organização, tornando-nos capazes de reconhecermos os principais problemas enfrentados nesta estruturação e os grupos de conteúdos que melhor a caracterizam, para posterior tabulação. Segundo Gil (2008), a “pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (p. 50).

Num segundo momento, efetivamos o estudo analítico e interpretativo da obra Cálculo Diferencial e Integral (1951), volume I, de Richard Courant, uma obra de grande impacto junto à comunidade científica da época. Sua primeira edição em língua alemã data de 1934[1], traduzida em língua inglesa e portuguesa. Ainda, conforme Escher (2011, p. 06), que analisou "as influências, limites e potencialidades do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no Cálculo Diferencial e Integral: (1) em uma perspectiva histórica, e (2) em uma perspectiva de ensino e de aprendizagem", o (saudoso) professor Ubiratan D'Ambrósio reforça a utilização deste exemplar, colocando

> Há inúmeros textos [de cálculo] que poderiam, de fato deveriam, ser consultados para um estudo mais aprofundado, mais rigoroso nos casos em que demos um tratamento apenas intuitivo e informal, ou mesmo para um tratamento diferente, que poderá abrir novas perspectivas para o leitor. Citamos **com especial recomendação o texto clássico de R. Courant: Cálculo Diferencial e Integral** (ESCHER, 2011, p. 85, grifo nosso).

Ademais, além de um notável matemático, Courant se preocupava com a disseminação e divulgação do conhecimento matemático, vindo a publicar a obra "O que é a matemática?", em parceria com Herbert Hobbins. Neste sentido, o autor mantinha certa preocupação com o entendimento dos conceitos. Tais justificativas demonstram os motivos pelos quais escolhemos este livro para nossa investigação.

Por fim, realizamos uma tabulação entre tópicos do conteúdo do livro de Courant com livros didáticos de análise real que são comumente adotados nesta disciplina, são eles: Figueiredo (1996), Ávila (1999, 2006) e Lima (2017). Para escolha destes exemplares considerou-se a experiência dos autores no trato e estudo desta disciplina e a pesquisa de Moreira, Curry e Vianna (2005), que apontou, junto a 31 (trinta e um) matemáticos de diferentes instituições brasileiras, um levantamento de 51 (cinquenta e um) livros didáticos indicados para instrução da análise real. Destas indicações, aproximadamente 70% (setenta por cento) correspondem as obras acima citadas, o que demonstra que tais referências são pertinentes para tal trabalho. Por vezes, faremos referência a algumas obras utilizadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, obras também comumente utilizadas nos cursos de cálculo e que são elencadas nos trabalhos de Barufi (1999), Marin (2009) e Echer (2011).

A tabulação, como forma de dispor os dados que foram analisados, "é a disposição

[1] Título original alemão: Vorlesoungen über Differential – und Integralrechnung.

dos dados em tabelas, possibilitando maior facilidade na verificação das inter-relações entre eles [...] Dessa forma, poderão ser melhor compreendidos e interpretados mais rapidamente" (MARCONI, LAKATOS, 2003, p. 167).

SOBRE A HISTÓRIA DA ANÁLISE REAL: uma breve cronologia

Em nossas diligências, buscamos determinar a época em que os conceitos e as ideias matemáticas passaram a contribuir para a constituição do que hoje conhecemos como análise real. Certamente que, precedente a este tempo, pertencem à história, a evolução das ideias do cálculo.

Segundo Jahnke (2003) foi no século XVII que a análise foi criada como um objeto independente, durante a revolução científica. E, "por volta de 1800, a análise era considerada a área da matemática que estudava todos os conceitos que tratava dos processos infinitos, tais como limites, séries, diferenciação, integração..." (BARONI; OTERO GARCIA, 2013, p. 11), todos estes assuntos, obviamente, advindos do cálculo. Sabemos ainda que,

> A história da análise, ou do cálculo infinitesimal, possui um papel central nestas transformações [mudanças que culminaram com a imagem da matemática que temos hoje] e costuma ser dividida em três momentos: um primeiro de natureza geométrica, em que problemas e métodos de investigação geométricas eram predominantes; um estágio analítico, ou algébrico, que começa por volta de 1740 com os trabalhos de Euler e atingiu sua forma final com Lagrange, no final do século XVIII; e o período em que foi forjada uma nova arquitetura para a análise matemática, proposta inicialmente por Cauchy no início do século XIX e continuada por diversos outros matemáticos nas décadas seguintes. (ROQUE, 2012, p. 343)

Vários matemáticos abordaram os problemas do cálculo ao longo dos séculos, com soluções engenhosas para casos particulares. Contudo, "dois gênios da última metade do século dezessete, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, criaram a maquinaria da análise infinitesimal, a base da análise matemática moderna" (KATZ, 2010, p. 591).

Percebemos que, anteriormente a eles, o panorama grego e islâmico não dispunha de muitos problemas para se resolver devido as poucas ferramentas para descrever curvas e sólidos e somente com o advento da geometria analítica é que esta situação se alterou, tornando-se subitamente possível construir muitos tipos de novas curvas e sólidos, ampliando e generalizando soluções para os problemas existentes (BOYER, 2004).

Elaboram-se, por diferentes matemáticos, ensaios sobre determinação de máximos e mínimos de polinômios, métodos para estabelecer tangentes a curvas dadas, cálculo de áreas, retificações de curvas e a expansão de funções em séries de potências. Todas estas questões impulsionaram a descoberta das ferramentas do cálculo diferencial e integral, em que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727), de forma independente, percebem a relação estabelecida entre a determinação da tangente de uma curva e a área sob o gráfico, e as utilizaram para resolver as mais variadas questões. Porém, a forma de apresentação de seus procedimentos foi completamente diferente. A abordagem de Newton se deu pelas ideias de velocidade e distância enquanto as de Leibniz pelas ideias de diferenças e somas.

O emprego desta nova técnica de cálculo levou os matemáticos a explorarem os mais diversos problemas. Conforme Jahnke (2003),

> Os matemáticos que contribuíram para o progresso da análise no século XVIII pertenciam a um pequeno grupo. Entre os mais importantes estavam, Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, Brook Taylor, James Stirling, Leonhard Euler, Colin Maclaurin, Alexis Clairaut, Jean le Rond d'Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph-Louis Lagrange, Gaspar Monge, Pierre Simon Laplace, Adrien Marie Legendre. (p. 105)

Destacamos os trabalhos de Euler sobre cálculo e análise, que estabelecem as primeiras definições de função e uma obra de "análise pura" sem diagramas que retomassem os conceitos geométricos, pois esses textos mostraram-se influentes até o final do século devido a sua apresentação e organização (KATZ, 2010).

Com a Revolução Francesa, os princípios de clareza, precisão e rigor chegam ao ensino e os matemáticos se vêm obrigados a discutir assuntos delicados como diferenciais, indivisibilidade e processos infinitos. Joseph Louis Lagrange (1765-1843) tentou, de forma equivocada, estabelecer uma definição precisa de derivada eliminado todas estas questões por meio da ideia de que qualquer função pode ser representada por uma série de potência, ou seja, utilizava o equivalente a fórmula de Taylor para o desenvolvimento das funções, e identificava a derivada com o coeficiente do primeiro grau desta expansão. Foi no final do século XIX, que matemáticos notaram a existência de funções diferenciáveis que não tem uma representação em séries de potências e, assim, o conceito básico de Lagrange não poderia ser sustentado (KATZ, 2010).

Por fim, com a ruptura com a geometria (por Euler) e com a álgebra (de Lagrange), tem-se a fase da aritmetização da análise real, cujos principais representantes foram o francês Cauchy e o alemão Weierstrass, os quais ajudaram a delinear a matemática dos próximos séculos.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) desenvolveu uma teoria para os limites e apresentou uma definição para a continuidade, diferenciabilidade e a integral definida em termos deste limite. O rigor de Cauchy inspirou novas reflexões acerca da análise (EVES, 2004). A noção de convergência de Cauchy também foi desenvolvida por Bernhard Bolzano e pelo português José Anastácio da Cunha, mas, seus trabalhos não foram apreciados na época. Cauchy percebeu intuitivamente o que eram os números reais, afirmando sem justificar que um número irracional poderia ser considerado como limite de uma sucessão de números racionais (KATZ, 2010).

Karl Weierstrass (1815-1897) foi o matemático que instrumentalizou a análise real com os "épsilons e deltas", ou seja, ele operacionalizou os conceitos de limite, continuidade e convergência elaborados por Cauchy. Ainda, defendeu um programa "no qual o próprio sistema dos números reais, inicialmente, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele recorresse na análise inspirasse segurança. Esse notável programa [é] conhecido como aritmetização da análise" (EVES, 2004, p. 611). Segundo Lützen (2003) "A abordagem de Weierstrass para os fundamentos da análise, encontrada em sua discussão geral de função e série, é muito semelhante à abordagem moderna" (p. 185).

Conclui-se a formalização da análise real com o trabalho de vários matemáticos para compor o conjunto dos números reais. Dentre eles, citamos Dedekind com a extensão dos racionais através dos "cortes de Dedekind", e Georg Cantor (1845-1918) com sua teoria dos enumeráveis, os transfinitos e a utilização das sequências de Cauchy para "construção" do conjunto dos números reais, a partir de classes de equivalência de sequências de Cauchy. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932) estabelecem os axiomas que caracterizam os números naturais, dando um fechamento a estrutura numérica básica.

Com relação a noção de rigor e formalismo matemático, cabe-nos observar as palavras de Schubring e Roque (2016) ao mencionarem que

> A noção de rigor de Lagrange era diferente da noção de Cauchy, que, por sua vez, também era criticado por Weierstrass, com base na concepção aritmética desse último. Parece-nos mais produtivo afirmar que, no final do século XVIII, a matemática era praticada com bases em crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiam em seu interior. Os matemáticos do século XVIII propuseram definições e métodos que eram rigorosos, no contexto daquela matemática, como a algebrização da análise, defendida também como uma tendência capaz de imprimir mais rigor ao cálculo. A um dado momento, contudo, surgiram problemas, [...] o que levou a proposição de novos modos de fazer e legitimar a matemática. (2016, p. xii)

Isto assinala para o aspecto construtivo da matemática e de como esta ciência evolui a partir de problemas de cunho prático ou teórico, similares aos exemplificados.

Apesar da amplitude dos temas abordados nesta retrospectiva, que se constituíram de forma paralela com problemas de tangente, áreas, limites, determinação específica para conceito de função, continuidade etc., os tópicos gerais de análise real que abordaremos, e seus principais representantes, são: o conjunto dos números reais (Cantor, Dedekind), sequências e séries de números reais (Lagrange), limites de funções, continuidade, derivada e integral (Cauchy e Weierstrass).

ANÁLISE DA OBRA DE RICHARD COURANT

A obra Cálculo Diferencial e Integral (1951), de Richard Courant, por mais que seu título propõe apresentar os conteúdos de cálculo, afasta-se deste viés no momento que especifica e trabalha com temas próprios das ementas atuais dos cursos de análise real.

A análise real, dos cursos de licenciatura em matemática, é ministrada nos últimos semestres do curso, e é nela que se estabelecem, dentre outros objetivos, o formalismo e a precisão de linguagem dos conteúdos de cálculo, desenvolvendo-se com exatidão as noções de limite (do infinito), incluindo a concepção dos números reais.

Em seu livro, Richard esclarece um ponto que julga ser de relevada importância: às relações que procura estabelecer entre a teoria e suas aplicações com a própria intuição, como fator fundamental para o desenvolvimento da matemática, colocando que

> Meu objetivo é demonstrar a estreita conexão que existe entre a análise e as suas aplicações e, sem perda de rigor e precisão, dar o devido crédito a intuição como fonte da verdade matemática. A apresentação da análise como um sistema fechado de verdades, sem referência à sua origem e fim, tem, efetivamente, encanto estético e satisfaz profunda necessidade filosófica. Mas, a atitude daqueles que consideram a análise unicamente como ciência lógica e abstrata de introversão não é, apenas, altamente inadequada para os principiantes, mas perigosa para o desenvolvimento futuro da matéria; investigar a análise matemática e ao mesmo tempo voltar as costas às suas aplicações e intuição, é condená-la a uma atrofia irremediável. (COURANT, 1951, p. viii)

Percebemos a preocupação que o autor mantém com relação a compreensão do que se está estudando, pois apesar do rigor exigido na disciplina, o docente que a ministrará deve tomar o cuidado de não a instrumentalizar por demasia, afastando-se dos grandes e importantes resultados em detrimento de uma valorização excessiva de suas técnicas.

O livro analisado, cuja edição está em português, conserva em sua tradução o prefácio da primeira edição alemã, bem como o primeiro e segundo prefácios das edições inglesas. No prefácio alemão o autor adverte os leitores sobre as pretensas diferenças de seu texto para os já publicados, enfatizando o aspecto conciso que dará a matéria. Coloca também, que “O leitor notará, de modo especial, o completo rompimento com a antiga tradição de tratar, separadamente, o cálculo diferencial e o cálculo integral” (p. vii).

Realmente, os assuntos derivada e integral estão apresentados de forma concomitante, intercalando definições e exemplos de integral e derivada, bem como as técnicas de integração e derivação: problemas de queda livre, movimento (derivação) com os problemas de centro de massa, cicloide, trabalho (integração), como exemplo. Esta interação reforça o elo estabelecido entre ambas pelo Teorema Fundamental do Cálculo[2], o qual impõe, sob certas circunstâncias, que os processos de derivação e integração são um o inverso do outro.

Courant compõe sua obra para dar suporte às demonstrações de todos os resultados mencionados, discutindo tópicos decisivos, como a questão da completude do conjunto dos números reais, ponto chave para a demonstração dos principais resultados de análise real. Ademais, a quantidade de temas abordados neste livro excede, em muito, um curso introdutório de cálculo, pois, além das questões próprias de cálculo, o livro trata da representação de Taylor; da irracionalidade do número de Euler e; de métodos numéricos; de sequências e séries; de séries de Fourier; de derivação e integração de funções de diversas variáveis e de algumas equações diferenciais. Aqui, nossa atenção volta-se às matérias relacionados à análise real, em especial aos itens anteriormente selecionados.

NÚMEROS REAIS

Já na introdução, o autor expõe o que julga ser os conceitos fundamentais do cálculo, a saber: a ideia de número, de função e de limite. Dessa forma, o primeiro tema que ele aborda são os números e, por ser um dos tópicos centrais da análise real, apresentamos, na sequência, suas ideias com maiores detalhes.

Courant coloca que “Admitiremos, pois, como dados, os números, e, em primeiro lugar, os números naturais 1, 2, 3 ..., assim como consideramos conhecidas as regras com as

[2] Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f: [a, b] \to IR$ uma função (limitada) integrável. Se G for uma primitiva qualquer de f em *[a, b]*, então $\int_a^b f = G(b) - G(a)$ (FIGUEIREDO, 1996, p. 176). Observamos que nos livros de cálculo a hipótese (limitada) integrável é substituída pela continuidade.

quais operamos sôbre êstes números." (p. 05) e, em uma breve nota de rodapé, indica a validade das propriedades associativa, comutativa e distributiva para a soma e para a multiplicação nesse conjunto. Para apresentar os racionais faz menção às demais operações de subtração e divisão e a necessidade de incluir novos elementos ao conjunto numérico, como zero, negativos e frações positivas e negativas. Esta apresentação é bem intuitiva, seguindo a própria linha que o autor informou ser importante.

Neste início, ele não faz qualquer referência às ideias de corpo, como formalização para os conjuntos numéricos, uma vez que, é pela unicidade (a menos de isomorfismos) de um corpo ordenado completo que se estabelece a axiomatização dos números reais.

Autores de livros de análise real, como Figueiredo (1996), Ávila (1999) e Lima (2017), também iniciam os conteúdos de suas obras com a apresentação dos conjuntos numéricos. Entretanto, eles apresentam uma visão mais rígida da estrutura numérica, mencionando as propriedades de corpo, de ordenação e completeza, abordando aspectos da teoria de estruturas algébricas, especificamente da estrutura de corpo ordenado, conceitos que Courant não trabalha em seu livro.

Para ampliação do conceito dos números racionais, Courant introduz uma correspondência dos números com os pontos da reta ordenada. Neste intuito, apresenta o fato de os números racionais serem densos em *IR*, isto é, qualquer intervalo da reta sempre contém números racionais, justificando tal consequência sem falar da propriedade Arquimediana[3], apelando para a intuição. Para isso, coloca que o eixo dos números é subdividido em intervalos com extremos do tipo $1/2^n, 2/2^n, 3/2^n, \ldots$ e tomando *n* suficientemente pequeno de forma que $1/2^n$ seja menor que o comprimento do intervalo dado, garante-se que pelo menos um dos pontos $m/2^n$ esteja nele.

Estende a discussão informando que, apesar de serem muitos, os racionais são insuficientes para descrever todos os pontos do eixo, como já mostraram os matemáticos gregos através da incomensurabilidade do segmento de medida $\sqrt{2}$ com o segmento da unidade pré-fixada, e demonstra, por fim, que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional. Conclui seus argumentos colocando

> Vemos, pois, que se insistirmos em que cada ponto do eixo dos números tenha um único correspondente, uma vez fixado o intervalo unitário, seremos forçados a

[3] Propriedade Arquimediana: "Se $x>0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$" (GUIDORIZZI, 2008, p. 19).

> expandir o domínio dos números racionais pela introdução de novos números "irracionais". O conjunto dos números racionais e irracionais, no qual a cada ponto do eixo corresponde a um só número e a cada número corresponde um só ponto sôbre o eixo, é denominado conjunto dos *números reais*. (COURANT, 1951, p. 08, grifo do autor).

Para completar a discussão a respeito de numeração, o autor procura estabelecer a relação existente entre os números reais e sua representação decimal com os pontos do eixo. O autor relembra (sem demonstrações ou comentários) o resultado de que todo racional está associado a uma dízima finita ou periódica e, inversamente, toda dízima finita ou periódica está associada a um racional. Na sequência, estabelece a relação entre as dízimas infinitas $g, a_1 a_2 a_3 \ldots$ com os pontos do eixo numérico. Para isto, dado um ponto *P* do eixo, o autor constrói números racionais de aproximação $g + 0, a_1 a_2 \ldots a_n$ de forma que *P* pertence ao intervalo *(g, g+1)*. Por conta da proximidade destes racionais de *P*, ele os chama de pontos de aproximação e, conclui: "podemos, pois, afirmar que a decimal infinita $g + 0, a_1 a_2 \ldots$ é um número real correspondente ao ponto *P*" (p. 10).

Somente depois de ter estabelecido (de forma intuitiva) toda a estrutura dos reais, é que ele menciona a hipótese fundamental que estrutura o conjunto dos reais com suas operações, a saber

> [...] antes de permitir que nosso progresso sofra embaraços logo de início, preferimos admitir que as regras comuns de cálculo se aplicam aos números reais como um axioma, sôbre o qual basearemos todo o cálculo diferencial e integral (p. 10).

Finalizando o assunto, faz uma observação sobre a dupla possibilidade de escolha de dízimas que terminam $0, a_1 a_2 \ldots a_n 999 \ldots$ e $0, a_1 a_2 \ldots (a_n + 1)000 \ldots$ Notemos que, ele segue as ideias anteriormente consolidadas sobre os irracionais que o sistema indo-arábico possibilitou estabelecer. Pois,

> A noção geral de número irracional apareceu no final do século XVI, e foi uma consequência da introdução das dízimas, [se] considerar uma dízima não periódica cujos algarismos se sucedem obedecendo a uma regra arbitrária, e intuitivamente aceitamos que se trata de um número bem definido mas que não é racional. Fica portanto estabelecida a noção de número irracional, de certo modo uma criação espontânea, através da utilização das dízimas. (KLEIN, 2009, p. 42 - 43).

Demos ênfase a apresentação de Courant para os números reais, pois é a partir das propriedades deste conjunto que decorrem as demonstrações dos principais teoremas de análise real, a saber, teoremas como o do valor intermediário[4], de Bolzano-Weierstrass[5], do valor extremo[6] que necessitam da completude de *IR* para suas demonstrações. Eves (2004) salienta a importância de *IR* colocando que "pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a matemática existente dependa da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da matemática" (p. 611).

FUNÇÕES, LIMITES E CONTINUIDADE

Courant expõe a definição de função, tal como se apresenta hoje nos livros de análise real, sem discutir os poucos exemplos apresentados. Classifica as funções como: funções de variáveis contínuas, definidas em subintervalos do conjunto dos números reais, e funções de variáveis inteiras, definidas no conjunto dos números naturais, como forma de introduzir, posteriormente, o conceito de limite de uma sequência, sendo esta, a primeira noção de limite que se estabelece.

Informa, também, quais sequências ele considera importante, que são justamente aquelas usadas para estender as propriedades do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

> A fecundidade do conceito de limite, na análise, reside essencialmente, no fato de que os limites das seqüências dos números conhecidos permitem-nos operar com *outros números* que não são diretamente conhecidos ou expressáveis. [...] A representação dos números irracionais com limite dos números racionais, pode ser considerada como um primeiro exemplo (COURANT, 1951, p. 39, grifo do autor).

Com relação ao conteúdo de sequências, a sua apresentação possui uma distinção em relação aos atuais livros de análise, no que diz respeito ao Critério de Cauchy[7], denominado por ele como sequência *intrinsicamente convergente*. Os livros de análise real colocam esse critério após toda a abordagem de sequências, já Courant o apresenta como um dos primeiros

[4] Teorema valor intermediário: "Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$" (LIMA, 2017, p. 234).

[5] Teorema de Bolzano-Weierstrass: "Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente" (ÁVILA, 2006, p. 96). O autor ainda coloca que Weierstrass formulou originalmente este teorema como: "Todo conjunto numérico infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação" (p. 172).

[6] Teorema do valor extremo: "Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, f assume máximo e mínimo em $[a, b]$" (FIGUEIREDO, 1996, p. 65).

[7] Critério de Cauchy: Uma sucessão (a_n) é convergente se, e só se, dado $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para $n, m > n_0$." (FIGUEIREDO, 1996, p. 31).

resultados, embora traga a sua demonstração no apêndice. Acreditamos que a importância que ele dá para as sequências de Cauchy se deve ao fato da possibilidade de se estender os números racionais no conjunto dos reais através do limite destas sequências.

Como esta obra é destinada a um curso de cálculo, ele deixa para o apêndice do final dos capítulos as demonstrações de vários resultados, como uma forma de atenuar o desenvolvimento do curso. Justamente neste espaço é que se encontram as demonstrações dos principais teoremas de análise real.

No apêndice, Courant informa que os fundamentos da análise real seguem, em principal, do *princípio do ponto de acumulação* de Weierstrass, atual teorema de Bolzano-Weierstrass, ou seja, "Se um intervalo finito contém uma infinidade de números, êstes possuem ao menos um ponto de acumulação, isto é, há, no mínimo, um ponto ξ tal que, em cada intervalo, por menor que êste seja, em torno de ξ existe uma infinidade de números dados" (p. 58).

O método utilizado na demonstração é construtivo e o ponto de acumulação $\xi = 0, a_1 a_2 a_3$ ... "surge" como que de forma natural nas subdivisões por décimos, centésimos, milésimos etc. dos subintervalos que contemplam os infinitos pontos. Entretanto, para se demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass é necessário levar em consideração um fato incontestável, que não foi mencionado por Courant, que se refere a propriedade da completeza dos números reais, ou seja, a propriedade que garante que todo conjunto limitado superiormente possui supremo (em *IR*), e que está na base de tais resultados. Obviamente, ao construir sua sequência no conjunto dos números reais, existe o ponto de acumulação mencionado pelo resultado, mas, se o conjunto em questão estivesse em um corpo ordenado não completo (como os racionais, por exemplo) tal premissa não seria verdadeira. Vide o conjunto *X* de pontos formados pelos racionais que convergem ao número irracional $\sqrt{2}$, a saber 1,4; 1,41; 1,414; ... note que *X* é limitado e infinito, mas seu único ponto de acumulação é o próprio $\sqrt{2}$, que não pertence ao conjunto *X*.

É a propriedade da completeza dos reais (ou algum equivalente) que está na base de todas as demonstrações dos principais resultados de análise, é ela que torna possível a desejada "aritmetização da análise". Por isso, acreditamos que o autor poderia ter sido mais enfático com relação a esta informação. Vemos, contudo, que ele optou por outra abordagem, ao assumir o Teorema de Bolzano-Weierstrass (princípio de ponto de acumulação) como verdadeiro.

Para finalizar os apêndices do capítulo I, o qual consideramos de relevada importância, o autor utiliza o *princípio do ponto de acumulação* para demonstrar o critério de convergência de Cauchy, e, que toda sequência monótona limitada é convergente. Em seguida, introduz novos conceitos, necessários para a apresentação e a demonstração de resultados clássicos sobre continuidade, a saber: toda função contínua em um intervalo fechado admite máximo e mínimo; o teorema da continuidade uniforme das funções contínuas em intervalo fechado; teorema do valor intermediário; continuidade das inversas de funções monótonas contínuas; e sobre a continuidade da composição de funções contínuas.

INTEGRAL E DERIVADA

O Capítulo II, informa a existência de dois importantes limites, a derivada e a integral, que estão relacionados, colocando que, o começo do cálculo diferencial e integral só ocorreu “devido a natureza complementar destes processos” (p. 76).

Neste ponto, ocorre uma significativa ruptura da sequência dos livros didáticos de análise real aqui abordados, ou mesmo dos livros de cálculo, como Thomas (2002), Leithold (1994) e Stewart (2015). Atualmente, a maioria das obras exibe a seguinte sequência de conteúdos: limite (e continuidade), derivadas e integrais. Diferentemente destes autores, Courant exibe a definição de integral definida antes da definição da derivada, de uma função. Neste ponto, ele introduz a integral definida de f (função contínua), num intervalo $[a, b]$, através da motivação do cálculo da área, entretanto salienta e generaliza sua definição para funções com qualquer positividade, sobre intervalos arbitrários ($a>b$).

A integral é expressa como o limite das *somas superiores e/ou inferiores* de “retângulos aproximantes”, que a priori, possuem base com medidas determinadas pelos comprimentos de subintervalos resultantes das n subdivisões do intervalo $[a, b]$, ou seja, possuem o mesmo comprimento. Este conceito se aproxima da definição atual de integral dos livros de análise, que trabalha com partições quaisquer do intervalo $[a, b]$. Na sequência, o autor introduz a ideia de integral como limite das *somas de Riemann*, estabelecidas nos atuais cursos de cálculo I. E informa que, para esta última definição, os subintervalos de [*a,* *b*] não precisam ter o mesmo comprimento, mas exige que a maior norma[8] tenda a zero. Observamos que suas definições transitam entre as atuais definições discutidas na análise real e no cálculo, pois mesclam componentes destes conceitos.

O autor não dá maiores detalhes da relação existente entre os dois tipos de definição, e apesar de não especificar qual delas utiliza nos exemplos, percebemos a sua predisposição pelo emprego da segunda, já que apresenta alguns resultados operacionais para a integral como triviais, o que não se verifica se assumirmos a definição de integral como limite das somas inferiores e/ou superiores[9].

Courant expõe exemplos da integral definida, sobre o intervalo [*a, b*], das funções $1, x, x^r, r \in \mathbb{Q}$ e $sen\, x$, e para concluir a seção, esclarece os diferentes artifícios utilizados no cálculo dos limites citados, e coloca a necessidade de uma ferramenta que auxilie nestes onerosos processos.

> Quase todos os exemplos apresentados foram tratados por métodos especiais ou por artifícios particulares. O ponto essencial, porém, do cálculo integral e diferencial, quando encarrado de maneira sistemática, consiste no emprêgo de considerações de caráter geral, que conduzam diretamente ao resultado desejado (1951, p. 87).

Neste ponto, o interessante desta abordagem encontra-se não somente no fato do emprego de diferentes técnicas para a resolução das integrais através da aplicação da definição de limite, mas na observação da dificuldade de tais processos e na importância de se perceber a necessidade de um método que solucione e instrumentalize o cálculo destas integrais, donde ressaltamos a importância do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que resolve esta questão.

Posteriormente, o autor introduz o conceito de *derivada* de uma função relacionando-o às questões intuitivas da tangente a uma curva dada em um certo ponto e ao problema da velocidade instantânea de um objeto com determinado deslocamento.

Com esta definição em mãos, observa que a derivada pode ser estendida a qualquer ponto da curva (desde que o limite exista) e trata desta nova função *y' = f'(x).* Conclui informando o leitor que, estando bem definida a derivada de forma analítica, a inclinação da

---

[8] A norma de um intervalo [*x, y*] é definida como a medida *y-x*.

[9] Ao mencionar integral definida como limite das somas inferiores e/ou superiores fazemos referência a definição que estabelece: $\int_a^b f(x)dx = inf\{S(f,P), P\ partição\} = sup\{s(f,P), P\ partição\}$, onde *S(f,P)* representa as somas superiores da função *f* sobre uma partição *P* do intervalo [*a, b*] e *s(f,P)* representa as somas inferiores da função *f* sobre uma partição *P*.

reta tangente a curva no ponto P é dada pela relação $tan\ \alpha = f'(x)$.

Observamos que o autor extrapolou a questão geométrica, estabelecendo a precisão analítica do limite para, depois, retomar a geometria que, a priori, impulsionou o desenvolvimento de tal conceito. Além disso, pouca ênfase é dada na resolução de exemplos, ou mesmo de exercícios, pois ele apresenta unicamente a derivada de $f(x) = x^2$ realizando o cálculo do limite por simplificação.

Ainda, enuncia e demonstra algumas regras operacionais, tudo de forma muito direta, dentre elas, a derivada de uma potência de x, para potência racional, deixando o caso irracional para o apêndice, onde faz uso da definição de número irracional como limite de sequência racional para obter esta generalização.

Outro aspecto que nos chamou a atenção se refere as explicações a respeito do caráter das diferenças e das diferenciais $\Delta x, \Delta y$ e dx, dy, sendo que o autor enfatiza que, por mais que as diferenças $\Delta x, \Delta y$ são tomadas em um processo que converge para zero, a "formação do quociente" é tomada com valores não nulos, ou seja, o limite só tem significado se realizarmos as simplificações necessárias com as diferenças não nulas. Informa, também, que na gênese do cálculo diferencial "Leibniz misturou essas idéias místicas e vagas, com a compreensão clara do limite" (p. 101).

Uma informação muito interessante, que o autor coloca, e que não encontramos nas referências mais atuais dos livros de cálculo, como Leithold (1994), Swokowski (1994), Thomas (2002), Guidorizzi (2008), Stewart (2015), ou mesmo em livros de análise como Figueiredo (1996), Ávila (1999, 2006) e Lima (2017), é a motivação para a notação utilizada por Leibniz. Ele informa que

> [...] a notação de Leibnitz, entretanto, não é apenas atraente em si mesma, porém de grande flexibilidade e da maior utilidade. A razão é que, em muitos cálculos e transformações podemos lidar com os símbolos *dy* e *dx* da mesma maneira com que números comuns (COURANT, 1951, p. 101).

Courant amplia a discussão apresentando a motivação de Leibniz para o uso de uma notação "tão sugestiva e de grande utilidade prática". Para isto, calculou a derivada segunda como o limite do quociente das segundas derivadas. Na Figura 1 apresentaremos os cálculos pormenorizados desta ideia.

Assumindo as variáveis $x, x_1 = x + h, x_2 = x_1 + h$ e lembrando que a derivada de uma função é dada pelo quociente

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para a estimativa da derivada segunda, Courant informa que Leibniz não utiliza o processo de limite, mas só toma seus quocientes.

Figura 1: Aproximação para derivada segunda.

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_1) - f'(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} - \frac{f(x_1) - f(x)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y}{h}\right), \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 \text{ e } \Delta y = y_1 - y \\
&= \frac{1}{h^2}(\Delta y_1 - \Delta y) \\
&= \frac{1}{(\Delta x)^2}(\Delta(\Delta y)) \\
&= \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelos Autores, a partir de Courant (1951, p. 102).

Vale observar quão sugestiva é a notação de Leibniz ao colocar $\Delta^2 = \Delta.\Delta$ em que a potência representa "a diferença de segunda ordem" e não o quadrado do valor em questão, enquanto $(\Delta x)^2$ representa o valor do elemento ao quadrado. Logo, surge a notação $\frac{dy}{dx}$ que vem caracterizar tal situação.

Acreditamos que esta observação é importante, porque além de explicitar o que motivou a notação utilizada por Leibniz, ela pode auxiliar os alunos a compreenderem o seu significado e evitar o acometimento de erros.

Salientamos, entretanto, que a aproximação acima não é o quociente da derivada segunda, visto que não se tomou a diferença sobre o limite de *f'(x)*. Ainda em relação a notação, Katz (2010) informa que "o método de Leibniz, de manipulação com diferenciais de segunda ordem, explica a nossa localização aparentemente estranha dos *2s* na notação moderna para derivada segunda" (p. 673).

Para concluir este capítulo, Courant estipula a integral indefinida de uma função e depois apresenta e demonstra o TFC utilizando argumentos análogos aos atuais, informando que a prova é "extremamente simples". A demonstração se fundamenta no fato de que toda função contínua *f(x)* admite, pelo menos, um máximo e mínimo num intervalo fechado, argumento este já explorado pelo autor. Como os fundamentos da análise real estão presentes em seu livro, é possível oferecer a demonstração do TFC de forma completa, diferentemente do que ocorre nos cursos de cálculo I, os quais assumem a validade do teorema do valor extremo para dele deduzir outros resultados, tais como: Stewart (2015), Leithold (1994), Guidorizzi [10] (2008). Diferentemente, Thomas (2002) assume o teorema do valor intermediário para dele tirar outras afirmações. Já os livros de análise real, aqui apreciados, fazem uso de diferentes técnicas para demonstrar o TFC, as quais são apresentadas na Tabela 1.

Nos demais capítulos, Courant amplia as técnicas de derivação e integração e utiliza esta ferramenta nas mais diversas aplicações. Entretanto, estes conceitos extrapolam as aplicações à análise real e, por conta disto, não serão aqui mencionados.

DISCUSSÕES E ANÁLISE

De um modo geral, o estudo que realizamos no livro "Cálculo Diferencial e Integral", de Richard Courant (1951), nos levou a concluir que sua abordagem não nos parece introdutória para uma disciplina de cálculo I, tal como fazemos em nossos atuais cursos de Licenciatura em Matemática. Acreditamos que sua apresentação, em muitos casos, está mais ligada a disciplina de análise real do que ao próprio cálculo. Ademais, os poucos exemplos, o elevado nível dos exercícios, a linguagem empregada ou mesmo a sua apresentação estética, muito densa e com letra da maioria dos exercícios e exemplos em fonte muito pequena, seriam hoje elementos dificultadores da aprendizagem. Obviamente o livro está estruturado para um público e um contexto histórico e cultural que difere do atual.

Por outro lado, trata-se de uma obra muito completa, que aborda várias questões, vários resultados que extrapolam as ementas dos atuais cursos de cálculo diferencial e integral I, como sugere o título. Porém, assim como é característico de uma disciplina de análise real, procura demonstrar todos os resultados apontados em suas páginas, no corpo do texto ou nos apêndices.

Em relação à caracterização dos números reais, acreditamos que a forma intuitiva

[10] Este livro apresenta em seus apêndices algumas considerações que hoje são trabalhas nos cursos de análise. Um apêndice define a propriedade do supremo dos reais, informando que por *IR* ter esta propriedade ele será chamado de corpo ordenado completo. Também coloca que "os teoremas centrais do cálculo dependem desta propriedade" (p. 507). Como consequência, demonstra a propriedade Arquimediana e o teorema dos intervalos encaixantes. Nos demais apêndices prova outros importantes resultados como o teorema do valor intermediário e o teorema do valor extremo. Para finalizar seus apêndices, ele faz a construção do corpo ordenado dos números reais através da ideia de corte (p. 538).

expressa na obra seria adequada a uma primeira discussão para os cursos de formação de professores, onde, tratar deste conjunto apenas de forma axiomática não é desejável, pois perde-se a oportunidade de discutir questões importantes vinculadas à prática docente (MOREIRA; DAVID, 2005). Porém, o autor compromete sua apresentação ao não mencionar a propriedade da completeza do conjunto dos números reais, necessária para que resultados sejam explicados e compreendidos, como exemplo: a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais. Explorar todos os aspectos dos números racionais e dos números reais é fundamental para se obter uma completa compreensão sobre a numeração, tópico primordial na educação básica. Outrossim, a questão de distribuição dos valores sobre a reta real, associada a propriedade arquimediana[11] e ao *princípio do ponto de acumulação*, são fundamentais para expandir as interpretações sobre *IR*.

Ademais, a falta de precisão de certos termos técnicos induz o aluno a uma suposta construção do conjunto dos reais sob bases frágeis, apesar de tentar consertar esta questão postulando a validade destes resultados, conforme citado acima.

O autor em nenhum momento associa o conjunto dos números reais a um corpo ordenado completo, na verdade ele até menciona as propriedades de corpo, sem se referir a estrutura, mas em nenhum momento fala sobre a propriedade da completeza, propriedade esta que garante, por exemplo, a distinção do corpo ordenado dos racionais para o corpo ordenado do conjunto dos números reais, crucial nesta abordagem. As definições de cota superior, supremo de conjuntos e limitações – fundamentais para se definir completeza - só aparecem quando se aborda o máximo e o mínimo de funções contínuas em intervalos fechados. Esta diferença na formalização dos números da obra de Richard Courant com as atuais é bem significativa, principalmente na forma como ele trabalha com a questão da densidade do conjunto dos números racionais em *IR*.

Nos atuais livros didáticos de análise real encontra-se postulada a existência de um corpo ordenado completo, conforme, por exemplo, Lima (2017) “Adotaremos, a partir e agora, o axioma fundamental da Análise Matemática. AXIOMA: Existe um corpo ordenado completo, *IR*, chamado o corpo dos números reais” (p. 80). Esta abordagem busca identificar a validade dos resultados de análise real sobre uma estrutura numérica, que respeita certas regras. Credita-se na generalização das ideias, enquanto na obra de Courant, preza-se pela

[11] Veja (LÜBECK, LÜBECK, JUNIOR, 2020).

questão intuitiva ligada ao *eixo real*, usando-se a ideia do contínuo da reta para estabelecer suas propriedades sobre a completeza dos reais.

Neste ponto, por apoiar seus resultados nos fatos já conhecidos sobre os números reais, ele apenas relembra, sem quaisquer demonstrações ou comentários, o resultado de que todo número racional está associado a uma dízima finita ou periódica e, inversamente toda dízima finita ou periódica está associada a um racional. Na sequência busca estabelecer relação para as dízimas infinitas com os pontos (irracionais) do eixo numérico.

Pensamos que este é um assunto que merece ser mais bem explorado nas aulas de análise real, visto que, como a experiência nos mostra, os acadêmicos apresentam dificuldades nesta formalização. Além do mais, está inteiramente ligado a assuntos da prática docente dos futuros professores. Poucos livros trazem comentários sobre este assunto. Um exemplar que se destaca dos demais é o livro *Análise para Licenciatura* do Geraldo Ávila (2006), que aborda de forma esclarecedora estas questões.

Com relação a apresentação antecipada do Critério de Cauchy, em detrimento das bibliografias contemporâneas, cremos que a discussão seja viável e pertinente, pois antecipa as reflexões a respeito da construção do completamento da reta real, permitindo ampliar a própria noção de número ao trazer à tona modos distintos de realizar tal feito.

Outro tópico que gostaríamos de destacar refere-se a ordem de apresentação dos conteúdos dos livros de cálculo modernos, ou mesmo de análise real. Em sua maioria, eles trazem os conteúdos divididos em grandes eixos: o de funções, o de limites, o de derivadas e o de integrais. Para os livros de cálculo, talvez tal ordem se justifique, já que realmente os processos de derivação são mais naturais dos que os de integração, no sentido de que a derivada de uma função conhecida cai num domínio conhecido. Porém, para análise real, aspectos da sequência de conteúdos de Courant são interessantes.

O modo como o autor apresenta primeiramente a integral e depois a derivada reforça a importância do TFC como instrumento para operacionalizar os longos cálculos dos limites das somas de Riemann, valorizando um resultado de relevada importância nesta teoria. Neste sentido, reforça-se a visão da integral como um limite da soma dos retângulos aproximantes, identificação que por vezes é negligenciada, e que é fundamental para o estabelecimento de diversos problemas físicos – motivados pelos somatórios. Ademais, trabalhar com a integral intercaladamente com a derivada permite-nos obter certas regras operacionais gerais que não são possíveis de se estabelecer nas atuais sequências, a saber a derivada de uma função potência com expoente irracional $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, para todo α irracional. Aqui, as fórmulas gerais para derivadas de algumas funções são obtidas articulando-se o TFC com os limites estabelecidos primeiramente pela integral destas funções.

Abaixo apresentamos um quadro comparativo entre as obras de Courant (1951), Ávila (1999, 2006), Figueiredo (1996) e Lima (2017), com os principais conceitos abordados neste artigo. Assim, procuramos explicitar as formas que tais autores exploram determinados conteúdos e as concepções assumidas por estes.

Tabela 1: Tópicos de análise real em livros didáticos.

Tópicos	**Courant (1951)**	**Figueiredo (1996)**	**Ávila (1999)**	**Ávila (2006)**	**Lima (2017)**
Números Reais	Apresenta *IR* como uma extensão de *Q* pela bijeção obtida entre pontos do eixo real e o conjunto dos números decimais.	Assume os conjs. dos naturais, inteiros e racionais conhecidos e retoma suas propriedades, identificando a estrutura do corpo *Q*. Verifica que *Q* não 'cobre' uma reta e amplia o conjunto para *IR*.	"Constitui-se de todos os números *racionais*, juntamente com os *irracionais*" (p. 1). Comenta aspectos históricos da formalização de *IR* e apresenta a estrutura de corpo ordenado.	Recorda os conjs. numéricos *IN, Z, Q* e *IR* sem mencionar as operações algébricas. Associa um irracional a sua dízima não periódica. Enuncia a def. de corpo ordenado completo e apresenta a ideia da construção dos cortes de Dedekind.	Assume *IR* como corpo ordenado completo através de um axioma.
Completude	Descreve irracionais como limites de sequências racionais.	Assumida por axioma. "Postulado de Dedekind: Todo subconjunto não vazio de *IR*, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo". (p. 9)	Apresenta a completude como uma propriedade, justificando que ela pode ser axioma ou teorema, a depender da forma com que se introduz os números reais.	Por 'construir' os reais pelos cortes de Dedekind, demonstra o teor.: "Todo conj. não vazio de números reais, limitado sup., possui supremo" (p. 63)	Assumida por axioma. "Axioma: Existe um corpo ordenado completo, *IR*, chamado o corpo dos números reais" (p. 8).
Densidade de *Q* em *IR*	Justifica de forma intuitiva, através do limite de $1/2^n$. Não menciona a propriedade arquimediana.	Defini intuitiv. densidade e justifica que *Q* é denso sobre a reta. Retoma como exercício através da prop. arquimediana.	Defini de forma geral o conceito de densidade e não comenta o caso dos racionais em *IR*.	Define o termo e exemplifica que *Q* é denso em *IR*, sem comentários sobre a demonstração.	Utiliza a propriedade arquimediana na demonstração, a qual tem por base o axioma da completude.
Raiz quadrada de dois	Comenta a descoberta Pitagórica e demonstra que é um número irracional, justificando a necessidade de ampliação de *Q*.	Demonstra que não é racional. Utiliza sequências para $\sqrt{2}$ para mostrar que existem conjs. racionais que não possuem ínfimo.	Deixa como exercício mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Mostra que aproximações por falta de $\sqrt{2}$ não tem máximo.	Prova que $\sqrt{2}$ não é racional. Amplia a discussão mostrando que a diagonal de um quadrado não é comensurável com seu lado.	Demonstra que $\sqrt{2}$ não é racional. Utiliza sequências para raiz quadrada de 2 para mostrar que existem conjs. racionais que não possuem supremo.
Teorema de Bolzano-Weierstrass	Justifica através de aproximações por subdivisões decimais de um	Se apoia no axioma da completude.	Se apoia no axioma da completude.	Usa o teorema dos intervalos encaixantes na demonstração.	Apresenta como corolário e de forma independente utilizando o

	intervalo, mas que não garantem a existência do limite.				supremo na demonstração.
Critério de Cauchy	Apresenta como um de seus primeiros resultados e o demonstra no apêndice utilizando o Teorema de BolzanoWeierstrass.	Apresenta como teorema e usa BolzanoWeierstrass para prová-lo.	Apresenta como teorema e usa BolzanoWeierstrass para prová-lo.	Apresenta como teorema e utiliza BolzanoWeierstrass para prová-lo.	Apresenta como teorema e usa BolzanoWeierstrass para prová-lo.
Definição de função.	"Se, a cada valor de *x* neste intervalo, corresponder um único valor definido para *y*, e se *x* e *y* forem ligados por uma lei qualquer, diremos que *y* é uma função de *x* e escrevemos, simbòlicamente, *y=f(x), y=F(x), y=g(x)"* (p. 15)	"Uma função *f* de um conj. *A* em um conj. *B* é uma regra que a cada elemento $x \in A$ associa um elemento *f(x)* em *B*". (p. 2)	Mostra imprecisões em sua definição. "Uma função $f: D \rightarrow Y$ é uma lei que associa elementos do conjunto *D*, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto *Y*, chamado o contradomínio da função" (p. 78).	Apresenta um breve contexto histórico. Mostra imprecisões em sua definição. "Uma função $f: D \rightarrow Y$ é uma lei que associa elementos de um conjunto *D*, chamado domínio da função, e elementos de um outro conjunto *Y*, chamado o contradomínio da função" (p. 136).	"Uma função $f: A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto *A*, o *domínio* da função [...], um conjunto *B*, o *contradomínio* da função [...], e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$." (p. 13)
Domínio de uma função	Apresenta funções com variáveis contínuas (sobre *IR*) ou variáveis inteiras (sobre os naturais).	Apresenta somente domínios numéricos e não comenta sobre outras possibilidades.	Permite assumir, por def., qualquer conj., mas notifica que o interesse está sob subconjs. dos números reais.	Informa interesse só por subconjuntos dos reais, não discutindo outras possibilidades.	Exemplifica funções com domínios quaisquer, como o conjunto dos polígonos do plano.
Função contínua em um ponto *c*.	Emprega a definição atual.	Usa a igualdade dos limites laterais à esquerda e à direita de *f* com o valor de *f(c)*.	Numa mesma def. expõe a ideia de limite de uma função e de continuidade.	Emprega a definição atual.	Emprega a definição atual.
Derivada e Integral	Integral precede a def. de derivada. Apresenta exemplos de forma integrada.	Derivada precede o conceito de integral.	Derivada precede o conceito de integral.	Derivada precede o conceito de integral.	Derivada precede o conceito de integral.
Apresentação da integral	Introduz com a noção de área.	Apresenta algumas sutilezas de se trabalhar com áreas como sobreposições e decomposições. Fala do método de exaustão de Eudoxo e expõe exemplos históricos que utilizavam este método.	Expõe aspectos históricos, comenta que o problema original se inverteu, antes o cálculo de áreas levava à integral, agora definimos primeiro a integral, em termos numéricos, para depois definir área em termos da integral.	Apresenta, como motivação, a integral associada ao problema da área.	Discute à questão de área como motivação para o conceito da integral. Investiga as questões de soma inferior e superior.
Definição de integral	Usa soma superiores e inferiores em paralelo a integral de Riemann.	Define através de somas superiores e inferiores (partições e seus refinamentos).	Define através de somas superiores e inferiores (partições e seus refinamentos).	Define através do limite das somas de Riemann.	Define através de somas superiores e inferiores (partições e seus refinamentos).
Apresentação da derivada	Através das ideias de reta tangente e o problema da	Introduz o conceito formalmente para depois apresentar,	Sem considerações à interpretação geométrica (tang.)	Introduz o conceito formalmente para depois apresentar a	Fala da importância da interpretação geom. como tang.

	velocidade.	brevemente, as interpretações cinemática e geométrica (tang.).	ou física (veloc.).	relação da reta tangente e da diferencial com a derivada. Não fala do probl. da veloc.	para compreensão de exemplos e resultados, mas coloca que isto não interfere no texto.
Definição de derivada	Idêntica a atual.	Define as derivadas laterais à esq. e à dir. da razão incremental para posteriormente falar da derivada em um ponto.	Idêntica a atual.	Defini a derivada como limite da razão incremental, desde que ele existe.	Idêntica a atual.
TFC - demonstração	Baseia-se no teorema do valor extremo em um intervalo fechado.	Utiliza o teorema do valor médio para demonstrar o resultado.	Baseia-se no teorema do valor extremo em um intervalo fechado.	Utiliza o teor. do valor médio para integrais, o qual se apoia no teor. do valor extremo e no teor. do valor intermediário.	Utiliza o teorema do valor médio, com a ideia de inf. e sup. de F em um intervalo.

Fonte: Autores, 2021.

CONCLUSÃO

A disciplina análise real é alvo de diversas pesquisas e tem provocado inúmeras investigações de naturezas distintas no campo da Educação Matemática. Refletir sobre tais questões é uma necessidade em vista da pertinência deste assunto em cursos de formação de professores.

Um possível caminho, e que fora percorrido, é a investigação histórica acerca do desenvolvimento dos conceitos e ideias da análise real, que embora não tenha sido pormenorizado, tornou possível repensá-la, destacando o potencial de conhecermos na história da matemática aspectos relacionados ao conteúdo que desejamos abordar, a fim de compreendermos o aspecto epistemológico de um determinado conhecimento.

Ademais, acreditamos que incorporar a própria investigação histórica nas aulas de análise real deveria ser uma prática constante, visto que, conforme explicitado no texto, os saberes da análise real se pautam na boa estruturação dos números reais, os quais permitem inúmeras incursões históricas, das questões de incomensurabilidade, da solução de Eudoxo para o ‘problema dos irracionais’ aos cortes de Dedekind e/ou a utilização das sequências de Cauchy para extensão do conjunto dos racionais nos reais. Um exemplo deste tipo de trabalho pode ser consultado em Lübeck (2021).

Outros aspectos poderiam ser investigados, inclusive partindo dos resultados apresentados por Richard Courant sobre o princípio do ponto de acumulação e as noções de proximidade impelidas por este critério, ou seja, pela convergência das sequências de Cauchy.

Ainda, assumir um número irracional como limite de uma sequência racional (cf. Courant) permite um tratamento mais natural para estes entes matemáticos.

Estes procedimentos, além de proporcionarem esclarecimentos a respeito da estrutura do conjunto dos números reais, que está na base das discussões da educação básica, pois é a referência numérica utilizada, ainda permitem levar o processo de investigação para a sala de aula, tornando esta, uma estratégia presente na vida acadêmica dos estudantes de licenciatura, ou seja, legitimando o processo de investigação presente na formação de professores.

Ademais, conforme explicitado acima, trabalhar de forma intercalada com as noções de integral e de derivada, inspirados no trabalho de Richard Courant, apresenta-se como uma alternativa para um curso de análise real, pois esta exposição traz maiores esclarecimentos sobre tais assuntos. Uma vez que o conceito de integral antecede o de derivada, esta abordagem conduz o acadêmico a valorizar e compreender a necessidade do TFC e, também, a perceber ligações que revelem a gênese deste resultado de tamanha relevância para o ferramental de estudo das ciências de modo geral.

Ainda, há de se observar, por exemplo, que problemas de descontinuidade de certas funções conduzem a pontos delicados da teoria que, para contorná-los, acaba por 'refinar' seus procedimentos e/ou definições na busca por respostas mais adequadas e precisas e, por vezes, bem pontuais. Este é o caso da integral definida através das somas superior e inferior. Courant pouco menciona sobre os pormenores desta definição mais refinada e acreditamos que esta seja uma postura que poderia ser adotada nos cursos de licenciatura. Ávila (2006) já assume esta posição ao trabalhar somente com a integral de Riemann.

Por fim, o quadro comparativo permite fazer alusões sobre distintos caminhos que o professor de análise real pode traçar, de perspectivas mais técnicas a mais intuitivas, porém, todas consolidando uma ideia que revolucionou o mundo científico: a de limite, que em última instância se refere ao número. Cabe, ao final, a palavra do professor, tendo em mãos diferentes abordagens e concepções, adotar aquela que ele considera mais direcionada aos objetivos da formação do futuro professor de Matemática para atuar na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Blücher, 1999.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**, São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Análise Matemática no século XIX**. Campinas, SP: SBHMAT, 2013.

BARUFI, M.C.B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BRASIL, CNE/CES, Parecer nº 1.302/2001 CNE/CSE. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática:** Bacharelado e Licenciatura. Brasília. 06/11/2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

BOYER, C. B. **History of Geometry Analytical**. Nova York: Dover Publication, 2004.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I. Tradução de Alberto Nunes Serrão e Ruy Honorio Bacellar. Porto Alegre: Editora Globo, 1951.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**, Rio de Janeiro: L.T.C., 1996.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Lisboa: Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KLEIN, F. **Matemática elementar de um ponto de vista superior** - Aritmética. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3. Ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Análise Real**, Volume 1, 14.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

LÜBECK, K. R. M. Estudo dos Números Reais em um Curso de Análise sob a Perspectiva Investigativa da História da Matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 9, n. esp, p. 59-73, mar. 2021.

LÜBECK, K. R. M.; LÜBECK, M.; JUNIOR, A. R. De uma discussão para uma investigação (histórica) a partir das aulas de análise real. **Cadernos do IME** - Série Matemática, Rio de Janeiro, n. 14, 2020.

LÜTZEN, J. The Foundations of Analysis in the 19th Century. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). **A History of Analysis**. Translate from the Germany by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. P. 155-195. Geschichte der Analysis.

MARIN, D. **Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior**. Dissertação de Mestrado – UNESP - Rio Claro: [s.n.], 2009.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escola**r. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P. C.; CURRY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? **ZETETIKÉ,** v.13, n. 23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

PARÓDIA, D. P.; PEREIRA, P. A.; OTERO-GARCIA, S. C. Conhecimentos de Análise Matemática presentes no Exame Nacional de desempenho dos estudantes. In: **Hipátia**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 325-347, dez. 2020.

ROQUE, T. **História da Matemática, uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. **Curso de Análise de Cauchy**: uma edição comentada. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Vol. 1. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

Submetido em 01 de outubro de 2021.
Aprovado em 29 de agosto de 2022.