Celebración de la I Olimpiada Matemática Aragonesa en 4.º de ESO y de la I Olimpiada Nacional Juvenil para alumnos de 2.º Ciclo de Secundaria

por
Carlos Ena Vinués y Juan Mayo San Adrián
(CPI Parque Goya, Zaragoza)

A finales de 2021 la SAPM «Pedro Sánchez Ciruelo» solicitaba colaboración para preparar por primera vez la Olimpiada de matemáticas para alumnos de 4.º ESO. Un grupo de profesores de matemáticas nos sumamos a este proyecto para poder darles a los alumnos una experiencia que por culpa de la pandemia del COVID 19 no pudieron disfrutar como alumnos de 2.º ESO y tampoco habían podido disfrutar como alumnos alevines.

Tal y como indicó el Barón Pierre de Coubertin (1896) «el factor esencial en la vida no es la victoria sino la lucha, lo importante no es ganar sino competir» y nuestros alumnos de 4.º ESO se merecían la oportunidad de competir y coincidir con otros alumnos de todos los centros de Aragón.

El primer paso que dimos fue aprovechar la experiencia en la gestión de eventos de los coordinadores de las otras olimpiadas (6.º Primaria y 2.º ESO) para hacer una estimación de los posibles participantes, de nuevo aprovechamos la predisposición de nuestros compañeros de los centros sede donde se celebraban ya las de 2.º ESO y con la colaboración de los profesores de matemáticas que trabajan en la Universidad de Zaragoza y los alumnos del máster del profesorado conseguimos arrancar la semifinal el día 20 abril con más de 300 alumnos de 3.º y 4.º ESO.

La sede, en la ciudad de Zaragoza fue única y ocupamos seis clases de la Universidad, con alumnos de muchos centros de Zaragoza acompañados por sus profesores, que finalmente se quedaron a echar una mano en la organización.

La semifinal tuvo un formato como viene siendo habitual en 2.º ESO, seis problemas en dos tandas de una hora. En el descanso se veía a los alumnos comentar soluciones y planteamientos de lo más creativo.

Fueron 27 participantes los seleccionados para la gran final aragonesa donde el 21 de mayo volvieron a enfrentarse a seis problemas para decidir los tres ganadores que representarían a la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas en la gran final del 4 de junio.

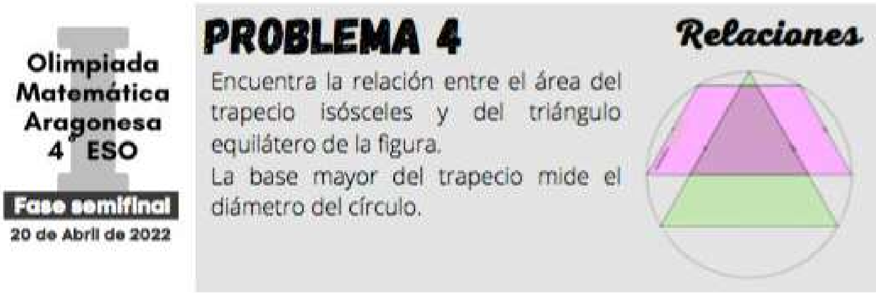
En la gran final disputada en la Facultad de Ciencias, de nuevo y demostrando un gran nivel, se dieron a conocer los tres ganadores que fueron: Lizer Blasco (IES Tiempos Modernos), Sara Velasco (IES Jerónimo Zurita) y Unai Rodríguez (IES Lucas Mallada Huesca).

Por cuestiones organizativas, la I Olimpiada Nacional se disputó el 4 de junio en modalidad *online*. Para ello nuestros alumnos aragoneses se dieron cita en el CPI Parque Goya de Zaragoza donde resolvieron 4 problemas y 4 cuestiones en un tiempo de dos horas y media.

Antes de la final los participantes escucharon un discurso de Onofre Monzó y Francisco Haro como miembros de la organización a nivel nacional y pudieron ver cómo en otros institutos de todos los lugares de España y los centros españoles en Marruecos se disponían a participar en la gran final olímpica.

Nuevamente los alumnos aragoneses estuvieron brillantes y estuvieron cerca de los premios.

Uno de los problemas de la Olimpiada



Existen diferentes maneras de resolver el problema. No las veremos todas, solo las más propicias para que un alumno de 4.º de la ESO pueda entender las soluciones sin dificultad. Estableceremos una serie de supuestos para que el problema pueda resolverse con cierta facilidad.

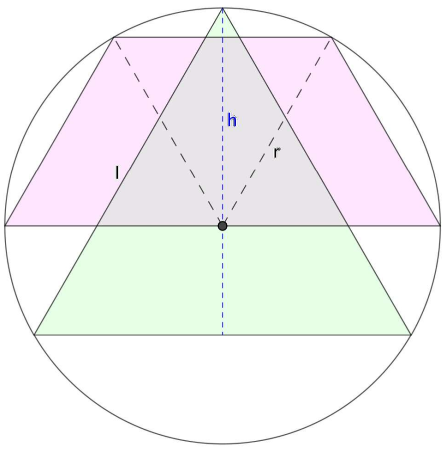
Debemos tener en cuenta que la base del triángulo equilátero es paralela al diámetro de la circunferencia, base mayor del trapecio, y que los otros dos lados del triángulo equilátero son paralelos, igualmente, a los lados inclinados del trapecio isósceles.

De esta forma, se demuestra fácilmente «comprobando los ángulos internos de las figuras», que el trapecio isósceles está formado por tres triángulos equiláteros cuyos lados son los radios de la circunferencia. De hecho, este trapecio es la mitad del hexágono regular inscrito en la circunferencia.

Es importante considerar que como se trata de un triángulo equilátero, el incentro y baricentro coinciden. Es decir, las medianas y las bisectrices del triángulo son las mismas.

A continuación, vamos a desarrollar varios métodos de resolución alternativos. El primero se sostiene sobre la idea de semejanza y las propiedades del baricentro, el segundo sobre las propiedades del incentro, el tercero es un método más directo de cálculo de las áreas de ambas figuras y por último, resolvemos gráficamente el problema partiendo de los supuestos indicados anteriormente.

Método 1. Semejanza



Es evidente que el triángulo equilátero grande, inscrito en la circunferencia, y cada uno de los tres triángulos, de lado igual al radio, que componen el trapecio isósceles son semejantes (sus ángulos interiores son los mismos). Recordemos, además, que el trapecio isósceles es la mitad de un hexágono regular y se puede descomponer en tres triángulos equiláteros semejantes al grande. Vamos a calcular la razón de semejanza:

- Denotaremos con l y h al lado y a la altura del triángulo isósceles respectivamente y con r al radio de la circunferencia.
- El centro de la circunferencia es el baricentro del triángulo inscrito (verde), por tanto, la distancia del centro de la figura al vértice opuesto es de dos tercios de la altura, de esta forma: $r = {}^{2h}\!/_{3} \quad \Rightarrow \quad h = {}^{3r}\!/_{2}$.

— Aplicando el teorema de Pitágoras a la mitad del triángulo equilátero (verde):

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}r\right)^2=l^2 \quad \Rightarrow \quad l=r\sqrt{3}.$$

— Por tanto, la razón de semejanza es: $k=\frac{r}{r\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

El área del triángulo equilátero es claramente:

$$A_{triángulo}=\frac{l^2\cdot \operatorname{sen}60°}{2}=\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}.$$

Y por lo tanto, el área de uno de los tres triángulos que componen el trapecio es:

$$A_{triángulo}\cdot k^2=\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}\,l^2}{12}.$$

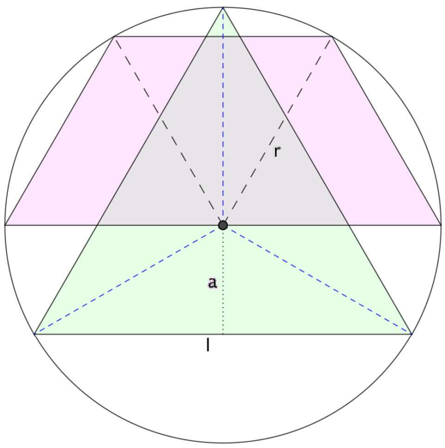
Como el trapecio está compuesto por tres triángulos iguales el área del trapecio es:

$$A_{trapecio}=3\cdot\frac{\sqrt{3}\,l^2}{12}=\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}.$$

En conclusión:

$$\text{Razón de áreas}=\frac{A_{trapecio}}{A_{triángulo}}=\frac{\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}}=1.$$

Método 2. Incentro



Ambas figuras son equivalentes. De hecho, cada uno de los tres triángulos equiláteros, de lado igual al radio, que componen el trapecio tienen la misma área que cada uno de los tres triángulos que se pueden formar dentro del triángulo equilátero verde que se obtiene si unimos el centro de la circunferencia con cada uno de sus vértices.

Tendremos en cuenta que el centro de la circunferencia es, también, el incentro del triángulo. Por tanto, el triángulo equilátero queda dividido en triángulos isósceles donde el radio, uno de los lados iguales, es la bisectriz que divide los ángulos interiores de 60º del triángulo equilátero verde.

De esta forma, el área de cada uno de los tres triángulos que forman el trapecio isósceles es:

$$A=\frac{r^2\cdot \operatorname{sen}60°}{2}=\frac{\sqrt{3}\,r^2}{4}.$$

Mientras el área de cada triángulo en la que se descompone el equilátero es fácil de calcular si tenemos en cuenta que el centro de la circunferencia es, también, el incentro del triángulo. Así el radio, que es uno de los lados de uno de esos triángulos isósceles, divide los ángulos interiores del triángulo equilátero grande en partes iguales, en 30 grados (se trata de la bisectriz). Teniendo en cuenta que $l=r\sqrt{3}$, el área de este triángulo es:

$$A'=\frac{l\cdot a}{2}=\frac{l\cdot r\cdot \operatorname{sen}30°}{2}=\frac{r\sqrt{3}\cdot r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt{3}\,r^2}{4}.$$

En conclusión, como los tres triángulos en los que se descompone el trapecio tienen la misma área que los tres triángulos en los que hemos hecho la división del equilátero concluimos que las áreas son iguales y la razón es 1.

Método 3. Tradicional

Expresamos las áreas de las figuras en función del radio, utilizando el teorema de Pitágoras:

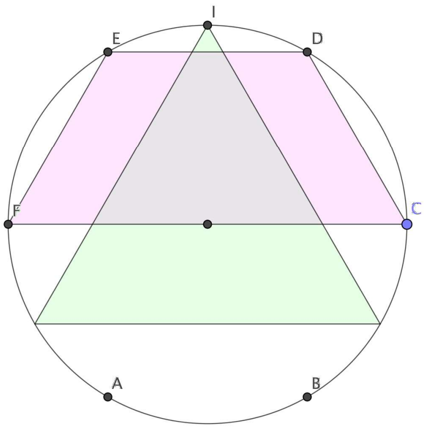
$$A_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3r}{2}\right)}{2} = \frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}.$$

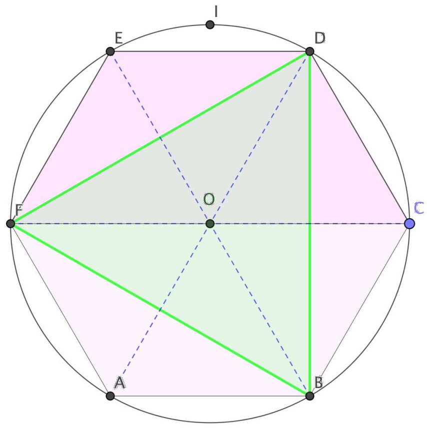
$$A_{trapecio} = 3 \cdot \frac{base \cdot altura}{2} = 3 \cdot \frac{r \cdot r\,\mathrm{sen}\,60°}{2} = \frac{3r^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}.$$

En conclusión, la razón es 1.

Método 4 . Representación gráfica de fracciones

Partiendo de las premisas iniciales de paralelismos y de que la base del trapecio es un diámetro, vamos a hacer otro trapecio simétrico para convertirlo en un hexágono regular.





Una vez que tenemos los dos polígonos regulares inscritos en la misma circunferencia vamos a girar el triángulo equilátero para que sus vértices sean *BFD*.

Ahora solo es cuestión de observar los tres rombos, *OFED*, *ODCB* y *OBAF* que forman el hexágono regular y comprobar que únicamente están coloreados de verde la mitad.

La conclusión es que al haber duplicado el área del trapecio para convertirlo en hexágono y estar coloreado de verde únicamente la mitad del hexágono, la relación entre el área del trapecio y del triángulo equilátero será 1.

A todos los profesores colaboradores, correctores y a todos los que han participado en que esta primera edición de la I Olimpiada Juvenil en Aragón haya sido un éxito y sobre todo a los alumnos que han acogido tan bien esta propuesta, ¡muchas gracias!

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Julio de 2022
ISSN: 2386-8821e