Preprint del trabajo
Ramírez, R. y Hidalgo-Ruiz, J.F. (2022). Propiedades de triángulos: de lo visual a lo general. SUMA, 102, 73-79

Propiedades de triángulos: de lo visual a lo general.

Rafael Ramírez Uclés y Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Universidad de Granada.

En distintas sesiones de ESTALMAT se abordan aspectos relativos al razonamiento matemático como uno de los elementos de enriquecimiento curricular (Ramírez y Flores, 2016). En esta entrega, se describe una sesión que trata aspectos relativos a las representaciones utilizadas y los estilos de pensamiento cuando se presentan tareas que requieren argumentación.

La investigación en este ámbito destaca matices importantes para argumentar, justificar, probar, demostrar… La perspectiva que se adopta en estas tareas intenta profundizar, más que en la demostración formal, en la riqueza de la argumentación como un elemento de aprendizaje de nuevo conocimiento matemático y de comunicación de ideas. En este sentido será recurrente plantear estas dos cuestiones a lo largo de la sesión: ¿de qué nos quiere convencer este argumento? ¿Es válido para todos los casos?

Para responder a estas preguntas, uno de los elementos a discutir será la validez del argumento en cuanto a la generalización. Se discutirá la diferencia entre argumentos sobre casos particulares y la validez del caso general. En este punto, se contrastan distintos estilos de pensamiento, desde el más visual, el empírico, el genérico o el algebraico (Ramírez y Ruiz-Hidalgo, 2022). La finalidad es presentar el potencial de armonizar los diferentes estilos de pensamiento, para percibir propiedades particulares y extenderlas al caso general. Se facilitará la puesta en común de los contenidos nuevos aprendidos con el foco de atención en el papel de las representaciones utilizadas. Concretamente se presenta una original forma de representar los triángulos salvo clases de equivalencia por isometrías, que facilita la generalización de propiedades a partir de la experimentación con casos particulares, especialmente partiendo de representaciones dinámicas con GeoGebra.

Para tener una visión global de la sesión y antes de desarrollar las tareas, mostramos un esquema de la sesión en la tabla 1, señalando las fases de las tareas, los objetivos y una breve descripción de los focos de trabajo.

Tabla 1: Secuenciación de tareas en la sesión

Fases de la sesión	Objetivos	Focos
Tarea 1 (trabajo individual)	Plantear una demostración con representación gráfica y algebraica	Presentación de la sesión
Tarea 1 (puesta en común)	Comparar diferentes demostraciones	Demostración armónica y demostración visual

	Utilizar GeoGebra para visualizar elementos de las demostraciones	Teorema de Pitágoras en triángulos acutángulos y obtusángulos
	Conocer el uso de GeoGebra	Herramienta de arrastre
Tarea 2 (individual)	Plantear una demostración con representación verbal	Explicación de homotecia, traslación y definición de semejanza
Tarea 2 (puesta en común)	Ejemplificar propiedades que se conservan por isometrías Diferenciar demostración de comprobación.	Concepto de isometría Demostración algebraica en homotecias Ejemplos en ternas Pitagóricas Propiedades que se conservan por isometrías Semejanza en triángulos equiláteros Diferencia entre demostración y comprobación
Tarea 3 (individual)	Plantear una demostración con representación verbal y uso de GeoGebra	Concepto de mediatriz y sus propiedades Construcción de mediatriz con GeoGebra (comando y proceso)
Tarea 3 (puesta en común)	Comparar diferentes demostraciones	Puesta en común
Descanso		
Tarea 4 (individual)	Plantear una demostración con representación verbal y uso de GeoGebra	Propiedades que dependen de la forma Definición de circuncentro
Tarea 4 (puesta en común)	Comparar diferentes demostraciones	Puesta en común
Explicación de la clase conforme	Presentar la construcción de la clase conforme de los triángulos en el plano Utilizar modelo de la clase conforme con GeoGebra	Similitud con las fracciones equivalentes Proceso de construcción (utilizando ejemplo de papel y GeoGebra) Modelo con GeoGebra para manipular
Tarea 5 (individual)	Plantear una demostración utilizando la clase conforme	Construcción del circuncentro con GeoGebra
Tarea 5 (puesta en común)	Comparar diferentes demostraciones	Papel de los puntos como representantes en la clase conforme

TAREA 1: ¿Qué se está probando en estas imágenes?

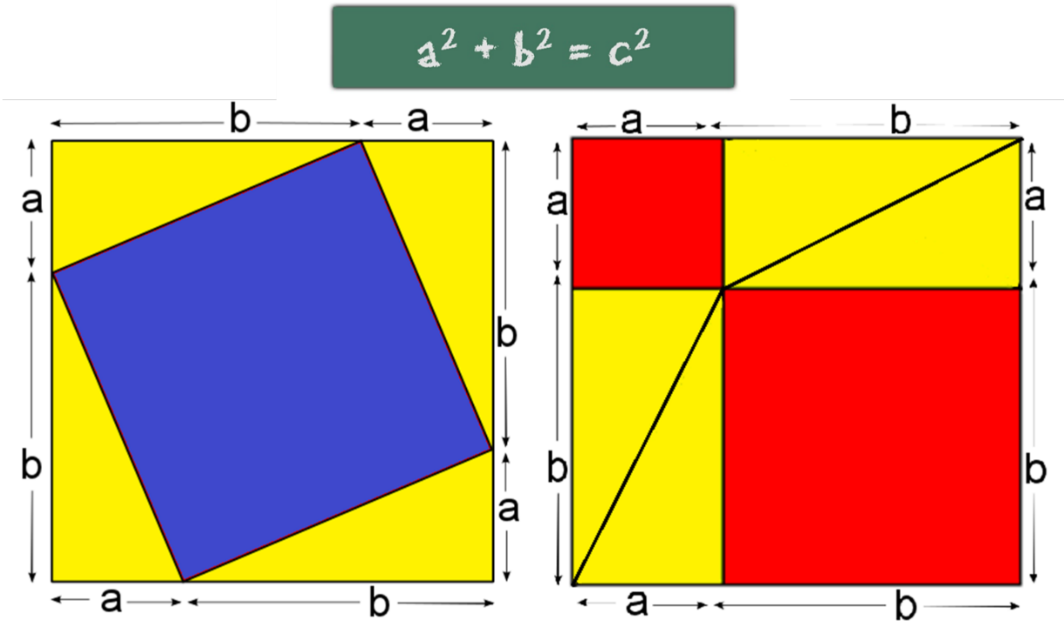


Figura 1: Información propuesta en la tarea 1

Tras recoger las distintas propuestas, se organiza la puesta en común para organizar las respuestas en visuales o algebraicas. Un estilo de pensamiento visual, puede argumentar identificando piezas en ambas imágenes para establecer la igualdad (figura 2). Es decir, en la imagen de la izquierda, hay cuatro triángulos rectángulos iguales amarillos y un cuadrado azul. En la imagen de la derecha, están los mismos cuatro triángulos rectángulos amarillos y dos cuadrados rojos. Por lo tanto, el área del cuadrado azul es la suma de las áreas de los cuadrados rojos. ¿Se demuestra así el Teorema de Pitágoras?

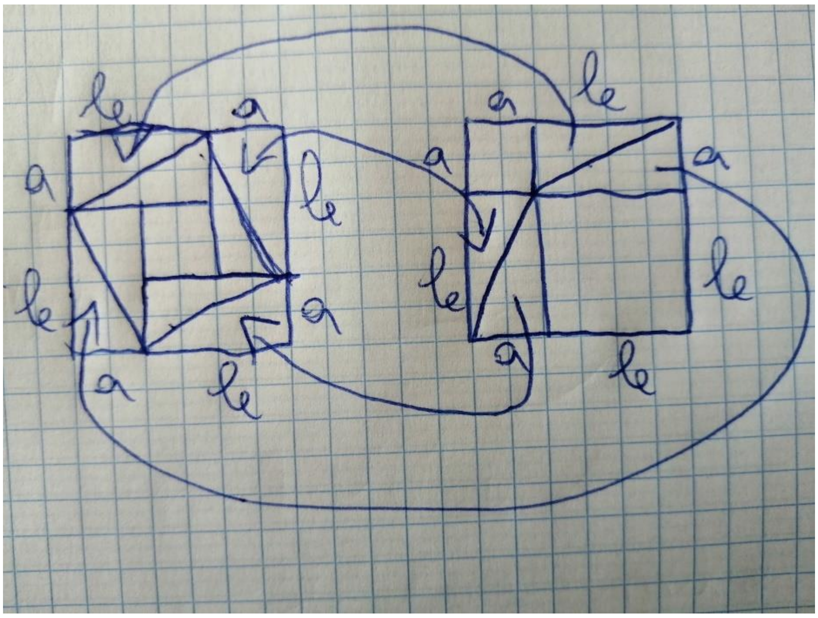


Figura 2. Ejemplo de respuesta de comparación de áreas de figuras

Un estilo más algebraico tenderá a utilizar igualdades y simplificaciones de las distintas expresiones implicadas $(a+b)^2$ como el área de cada figura, ab/2 como el área de cada triángulo rectángulo y a^2, b^2 y c^2 como las áreas de los cuadrados.

Es interesante plantear cuestiones sobre la validez de los argumentos visuales más allá de lo observado empíricamente. Por ejemplo, ¿por qué el cuadrilátero azul es un cuadrado? Si se utiliza la propiedad de que los ángulos A y B son complementarios (son los ángulos agudos del triángulo rectángulo amarillo), se deduce que los ángulos del cuadrilátero azul son rectos. ¿Ocurre eso en cualquier representación o depende del dibujo concreto que hagamos? Estas cuestiones permiten contrastar la relevancia de que los argumentos visuales vayan acompañados de razonamientos que le den validez para el caso general.

Tras la puesta en común, se presenta la formulación algebraica y la geométrica con igualdad de áreas. Utilizando GeoGebra, se construye un triángulo cualquiera y los cuadrados sobre la hipotenusa y los catetos. Utilizando la herramienta de arrastre en uno de los vértices, se les pide que conjeturen sobre la versión del Teorema de Pitágoras en los triángulos acutángulos y obtusángulos, sustituyendo la igualdad por la correspondiente desigualdad. Además de lo observado empíricamente, se les plantea: ¿Cómo podéis garantizar que esta desigualdad se cumple en "todos" los triángulos del "mismo tipo"? Se recogen las ideas intuitivas y se deja abierta para retomar esta cuestión en la tarea 5.

Tarea 2: Si el Teorema de Pitágoras se cumple en un triángulo rectángulo, ¿se cumple cuando se aplica un giro al triángulo? ¿Se cumple cuando se aplica una traslación? ¿Se cumple cuando se aplica una simetría? ¿Se cumple cuando se aplica una homotecia? ¿Se cumple en otro triángulo semejante?

Inicialmente se recogen las ideas intuitivas que expongan los estudiantes. Utilizando ejemplos de GeoGebra, se les recuerda la definición de cada isometría (giros, traslaciones, simetrías) y de la homotecia. Puede ser interesante plantear una definición de semejanza de triángulos a partir de las aplicaciones que "mantienen su forma" y relacionarla con la igualdad de ángulos y proporcionalidad de longitudes.

Para responder a las preguntas de la Tarea 2, pueden reproducir las ideas visuales de la demostración expuesta en la Tarea 1, reconociendo la igualdad de áreas pese a que se apliquen isometrías. Desde una perspectiva más algebraica, se plantea la validez del Teorema de Pitágoras cuando se aplica una homotecia a los lados del triángulo (ka, kb, kc) y se estudia el comportamiento de la fórmula al sacar factor común.

Tarea 3: ¿Es cierta la siguiente afirmación? Justifica tu respuesta: Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto interior del triángulo

Preprint del trabajo
Ramírez, R. y Hidalgo-Ruiz, J.F. (2022). Propiedades de triángulos: de lo visual a lo general. SUMA, 102, 73-79

Conviene enriquecer el concepto de mediatriz que posean los estudiantes. Desde un punto de vista más constructivo, es habitual que definan la mediatriz como la recta perpendicular por el punto medio. Aprovechando la tradicional construcción con regla y compás con distintas aperturas (ahora se puede reproducir con GeoGebra), se puede llegar a la definición de mediatriz del segmento AB como conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Con estas definiciones, se les deja un tiempo de indagación para que identifiquen los pasos de construcción del punto de corte de las tres mediatrices. Para probar la afirmación de la Tarea 3 se les ofrece la herramienta de arrastre para que muevan uno de los vértices del triángulo, obtengan distintos tipos de triángulos (acutángulos, rectángulos, escalenos…) y comprueben en qué casos se cumple la propiedad (figura 3). Es interesante que, además de observar los casos de triángulos acutángulos cuyo circuncentro está fuera del triángulo, vean el "caso límite" de los triángulos rectángulos, donde el circuncentro se sitúa en el punto medio de la hipotenusa. Aquí es importante destacar la validez de sus argumentos para el caso particular que están observando e intentar generalizarlo para "cualquier triángulo de la misma forma".

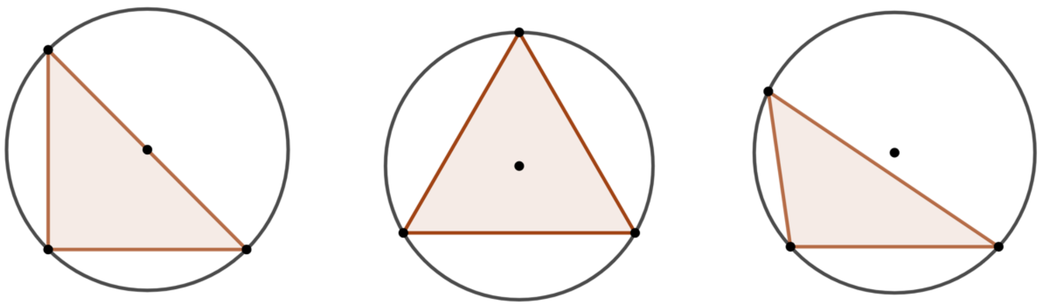


Figura 3: Circuncentro en triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Tarea 4: ¿Es cierta la siguiente afirmación? Justifica tu respuesta: Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que es el circuncentro

Probablemente ya apareció esta propiedad, al menos intuitivamente, en la tarea anterior. Ahora se enfatiza el hecho de que el punto de corte de dos mediatrices cualesquiera equidista de los tres vértices y, por tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita (circuncentro).

En este momento se introduce la explicación de la clase conforme de los triángulos a partir de dos ideas recogidas en las tareas anteriores. La validez de un caso particular para representar a un conjunto de triángulos y la "continuidad" de las propiedades observadas en el arrastre con GeoGebra.

CLASE CONFORME DE LOS TRIÁNGULOS EN EL PLANO

La intención es construir un espacio que represente a "todos los triángulos". Es decir, que cada punto de esa región represente a un triángulo y todos los que sean semejantes a él. Y, además, se pretende que ese espacio tenga una topología que permita reconocer como cercanos a aquellos "triángulos parecidos en forma".

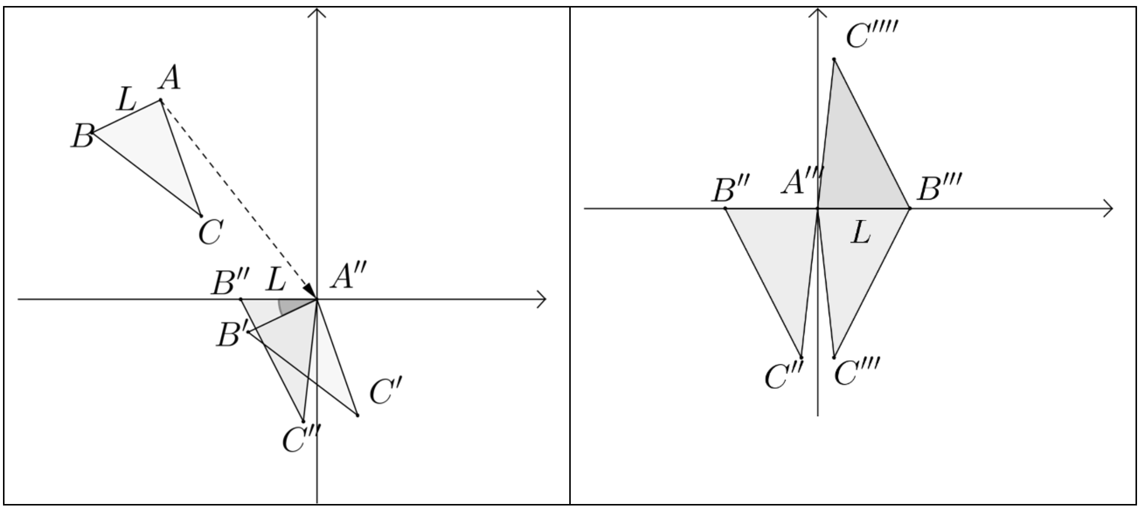
Para el concepto de clase de equivalencia se utiliza la analogía con el concepto de fracción. 1/2, 2/4,…30/40 son fracciones en la misma clase de equivalencia, definida como igualdad por representar el mismo número decimal, en este caso 0,5. Además, hay una manera "única" de elegir un representante en cada clase (canónico), a partir de la fracción irreducible, en este caso 1/2. Y, además, una vez que ubiquemos a estos representantes irreducibles en la recta real, "heredamos" la topología en los números reales y podemos hablar de proximidad para estudiar propiedades al acercarnos a dicho número.

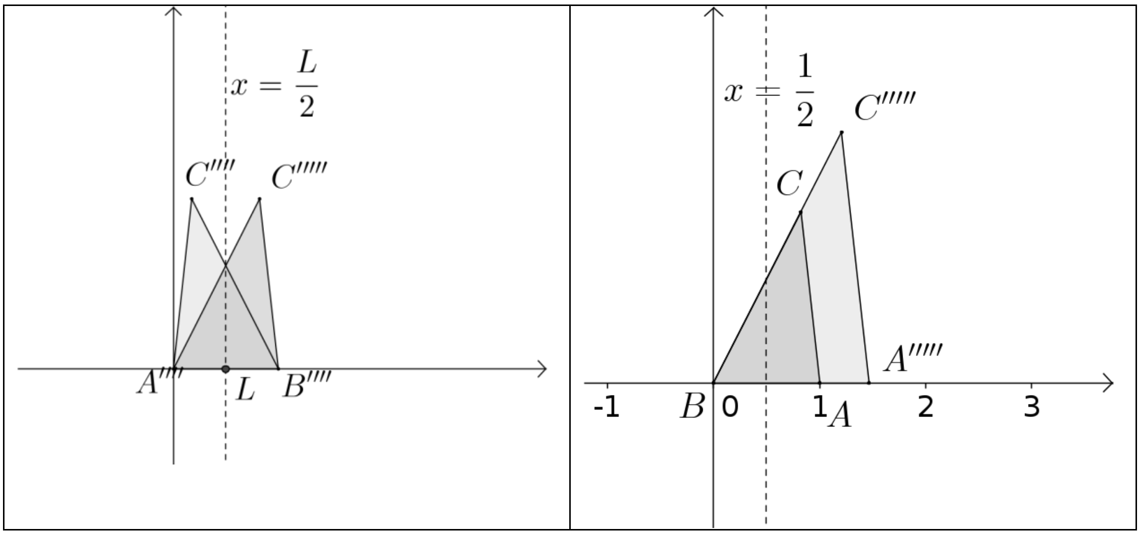
En el caso de la clase conforme de los triángulos, vamos a considerar que son equivalentes todos los triángulos que sean semejantes. Es decir, todos los triángulos que se obtengan por alguna homotecia y/o isometría, deben tener el mismo representante. Para ello, lo que vamos a buscar es esa manera "única" de elegir representante.

1.- Dado el triángulo ABC, con lado menor L, mediante traslaciones y giros, es posible situarlo en el punto A en el origen y con el lado L situado en el eje X (figura 4a). Si fuese necesario, mediante una simetría respecto al eje y, es posible situarlo con el punto B en el eje x positivo (figura 4b).

2.- Mediante una simetría respecto a la recta vertical x=L/2, es posible conseguir que el punto C tenga coordenada x mayor o igual que L/2 (figura 4c).

3.- Aplicando la homotecia de razón 1/L, obtenemos un representante con B en el origen, A en el punto (1,0), y C con coordenada x mayor o igual que 1/2 y segmentos AC y BC de longitud mayor o igual que 1 (figura 4d)





Figuras 4a,4b,4c y 4d: Procedimiento para elegir un representante único de cada clase de triángulos semejantes.

Este procedimiento permite obtener una región del plano en la que cada punto determina al representante único de la clase de todos los triángulos que son semejantes a él. Es decir, el punto C (al unirlo con los puntos A y B que son fijos siempre), determina de manera única a todos los triángulos semejantes a él (figura 5). Si llamamos a R a la región donde puede estar situado C, vendría dada por R={C=(c1,c2): c1≥1/2, c2>0, $(c1-1)^2+c2^2 \geq 1$}. Por lo tanto, cada punto de R determina un triángulo que representa a todos los triángulos semejantes a él.

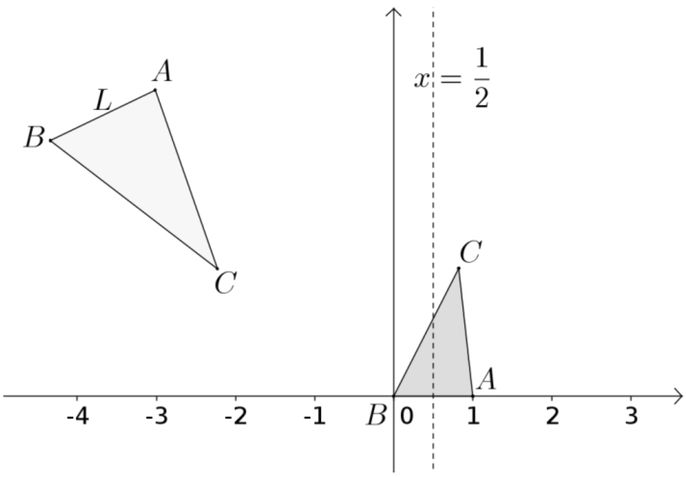


Figura 5: Dado un triángulo ABC cualquiera, se obtiene un triángulo semejante en la región R.

Se comprueba con los estudiantes que, en dicha región, dados dos puntos distintos, los triángulos que representan no son semejantes. Y además es interesante hablar de la topología de este espacio, donde triángulos “parecidos en forma” están próximos. Este hecho es importante para estudiar cómo las propiedades varían al modificar triángulos “cercanos”.

Para familiarizarnos con la clase conforme, vamos a identificar algunos triángulos conocidos. Los triángulos equiláteros vienen determinados por el punto C=(1/2, $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Los isósceles determinan dos de los bordes del conjunto, uno para los isósceles con lados iguales los mayores y otro para los menores (figura 6). Como era de esperar, la intersección de esos dos bordes es el triángulo equilátero. Esta propiedad es interesante para ilustrar como la herramienta de arrastre permite visualizar cómo van variando las propiedades de un modo continuo al desplazarnos por los puntos de la región que representa las clases. Todos los puntos interiores del conjunto representan a los triángulos escalenos. Podemos profundizar en comparar las dimensiones de estos tipos de triángulos: equiláteros de dimensión 0 (un punto), isósceles de dimensión 1 (una curva) y escalenos de dimensión 2 (una región en el plano). Al clasificar triángulos por la igualdad de sus lados, parece que no hay una distribución muy equitativa entre los distintos tipos, ¿por qué creéis que se usa esta clasificación de triángulos?

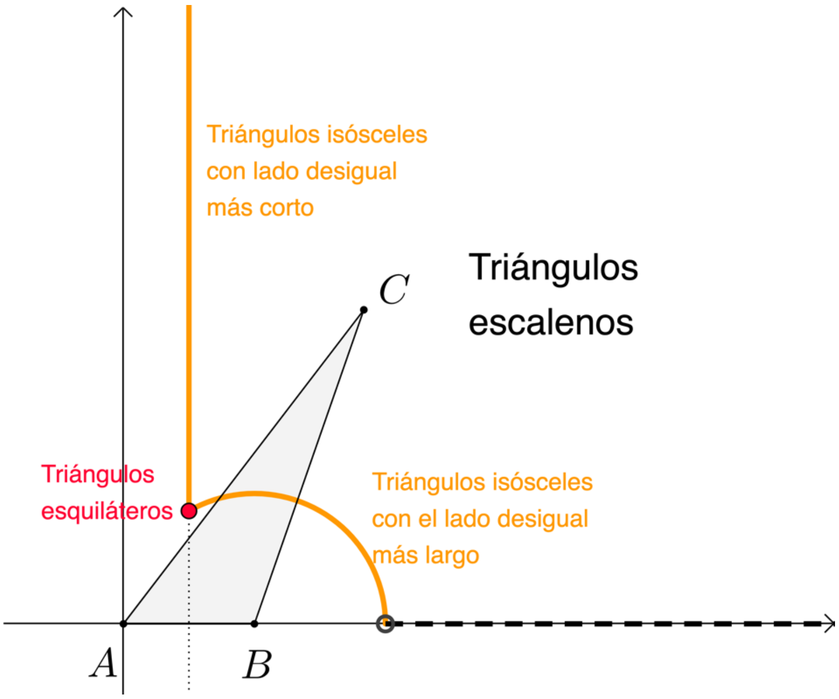


Figura 6: Tipos de triángulos según los lados en la región R

En relación a los tipos de ángulos, los triángulos rectángulos vienen determinados por la recta x=1 en dicha región. Por lo tanto, dividen la región en dos partes, una la de los triángulos acutángulos y otra la de los obtusángulos (figura 7). La clasificación de triángulos por el tipo de ángulos parece más equitativa (dimensión 1 en los rectángulos, dimensión 2 en los acutángulos y obtusángulos). Utilizando la herramienta de arrastre se puede “visualizar” el comportamiento del Teorema de Pitágoras. La expresión $AC^2 - BC^2 - AB^2$ vale 0 (se cumple por tanto el Teorema de Pitágoras) únicamente en la recta determinada por los triángulos rectángulos y toma valores positivos en los triángulos obtusángulos y negativos en los acutángulos.

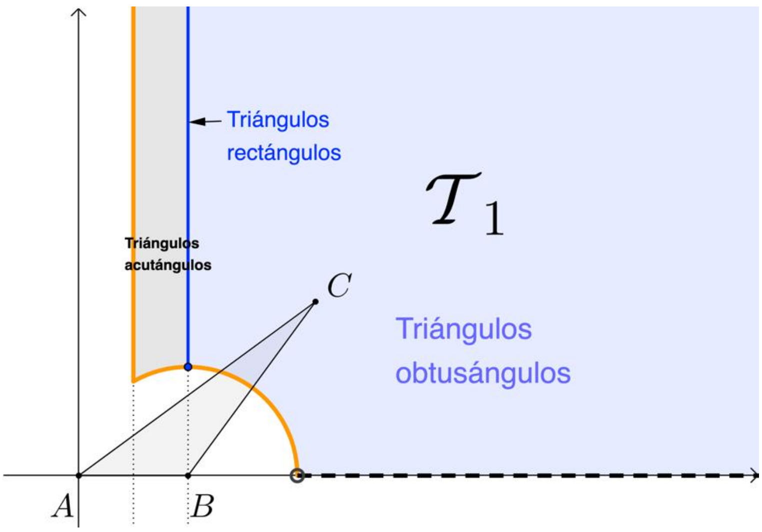


Figura 7: Tipos de triángulos según los ángulos en la región R.

Esta comprobación de propiedades utilizando el arrastre de “un modo continuo” le confiere a la región determinada por la clase conforme de un enorme potencial para estudiar cómo varían las propiedades al cambiar la forma de los triángulos y su comportamiento en triángulos muy, muy parecidos. Incluso se puede introducir intuitivamente el concepto de límite en sucesiones formadas por triángulos.

Tras esta explicación, se propone la última tarea para ver si aplican la clase conforme para probar resultados en los distintos tipos de triángulos.

Tarea 5: ¿Es cierta la siguiente afirmación? Justifica tu respuesta: Si el circuncentro está en un lado del triángulo, entonces el triángulo es rectángulo

Es importante que exploren esta propiedad en “toda la región”. Para ello, pueden hallar el circuncentro de un triángulo y mediante al arrastre ir variando el vértice C por toda la región para ver qué ocurre. Conviene resaltar un matiz importante al estudiar propiedades en la clase conforme. El hecho de que cada punto represente a “todos los triángulos de igual forma” le confiere a los argumentos una validez que va más allá del caso particular que se está visualizando (por ejemplo en la figura 8). Además, la topología que hereda del espacio euclídeo, permite visualizar variaciones en las propiedades que permiten estudiar el comportamiento al “arrastrar” puntos de manera continua en el espacio. En este sentido, esta forma de representar las clases de equivalencia permite establecer una conexión entre el caso particular que se está visualizando en la pantalla y el caso general que determinan “todos los triángulos con la misma forma”.

Preprint del trabajo
Ramírez, R. y Hidalgo-Ruiz, J.F. (2022). Propiedades de triángulos: de lo visual a lo general. SUMA, 102, 73-79

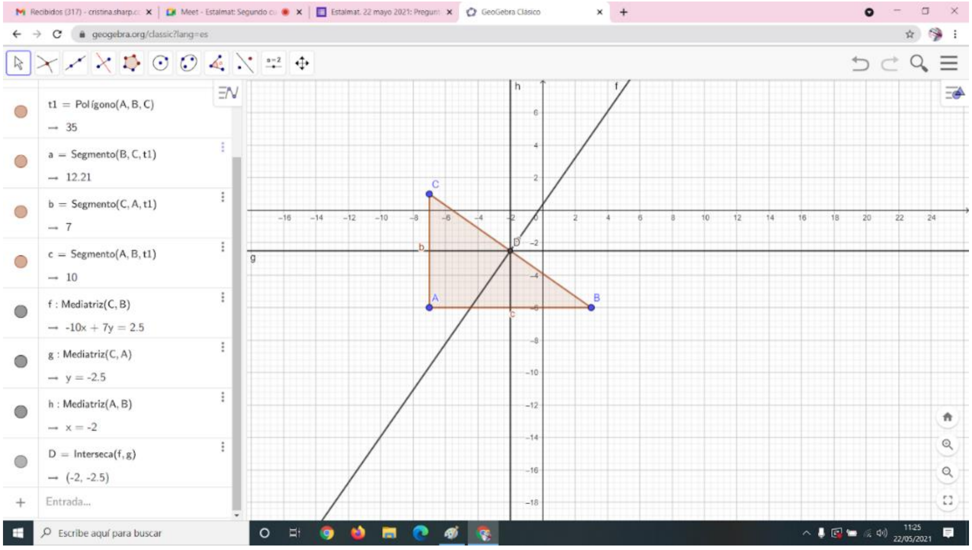


Figura 8: Ejemplo de construcción del circuncentro en un triángulo rectángulo

Agradecimientos:

Queremos agradecer a Miguel Sánchez Caja las ideas para la construcción de la clase conforme y aterrizar propiedades complejas de variedades diferenciables en una sesión de ESTALMAT.

Este trabajo forma parte de los proyectos PID2020-117395RB-I00, PID2020-113601GB-I00 y PID2021-128261NB-I100 financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación y del proyecto FCT-20-15651 de la Fundación Española para la Ciencia y Tecnología

Referencias

RAMÍREZ, R. Y FLORES, P. (2016). “Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular”. *SUMA*, *83*, 33-41

RAMÍREZ UCLÉS, R. Y RUIZ-HIDALGO, J.F. (2022). “Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students”. *Mathematics*, *10*, 789, 1-21. https://doi.org/10.3390/math10050789