ICT-UNPA-134-2015
ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

Enseñando geometría utilizando el Software Dinámico Geogebra

Análisis didáctico de una propuesta de enseñanza.

SILVANA ROMINA MELO[1] (Becaria alumna UNPA-UARG)
rominamelounpa@hotmail.com
DRAGHI DANIEL (Docente investigador UNPA-UARG) danieldraghi@gmail.com
SALDIVIA FABIANA (Docente investigadora UNPA-UARG)
fabianalisaldivia@yahoo.com.ar

Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Río Gallegos
Av. Gdor. Gregores y Piloto Rivero - Río Gallegos - Santa Cruz - Argentina
Octubre 2015

Resumen: Tomando como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1993), proponemos una secuencia didáctica para enseñar los criterios de congruencia de triángulos, en una primera instancia mediante el uso de lápiz y papel, en donde se aborda el tema y otra, en la que se resolverán problemas utilizando el Geogebra. Mostramos el trabajo previo que existe al momento de crear y/o transformar actividades que requieran el uso del software para su resolución, el análisis didáctico de las actividades propuestas y diferentes cuestiones que hay que tener en cuenta para el desarrollo de la misma. En este trabajo, uno de los aspectos del trabajo matemático en el que hacemos hincapié está referido a la validación de la producción matemática a partir de la visualización de una imagen que deja ser estática y puede ser fácilmente manipulable por el alumno y propiciar la enunciación de conjeturas validas o no.

Palabras Claves: Geometría; Enseñanza; Demostración; Geogebra

[1] Recibió el título de Profesora en Matemática en noviembre de 2014. Comenzó a participar en el PI29/A308 como becaria alumna en marzo-diciembre de 2013 y marzo-diciembre 2014, y continúa como integrante externa.

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el marco del PI29/A308, denominado “La inclusión de las TIC para la enseñanza de la geometría en el nivel secundario” (2013-2015). Diseñamos una secuencia didáctica dirigida a alumnos de primer año de secundaria para enseñar los Criterios de Congruencia de Triángulos.

Expondremos las características del grupo de clase a la que va dirigida la propuesta y el análisis a priori de las actividades que conforman la secuencia, mostrando en particular las discusiones que tuvimos en el momento de seleccionar y enunciar las actividades que requerían ser realizadas usando el software de geometría dinámico.

Esta secuencia se comenzó a implementar en las dos primeras semanas de julio, y continuo luego del receso en las dos primeras semanas de agosto.

2. CONTEXTO EDUCATIVO DONDE SE REALIZÓ LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia se diseñó teniendo a quiénes iba dirigida, a un grupo de primer año de secundaria del colegio bilingüe Poplars School, donde S. Melo es la profesora de matemática. Este es un grupo constituido por 21 alumnos con una edad promedio de 13 años. Estos alumnos poseen conocimientos geométricos previos, tales como la propiedad de la desigualdad triangular, propiedades de triángulos y cuadriláteros, propiedad de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos, área y perímetro de figuras planas y un buen manejo de elementos de geometría para realizar cualquier construcción en lápiz y papel. Con respecto al uso del software, en el período de diagnóstico en el mes de marzo hicieron actividades que requería el uso del mismo, repasaron nociones de lugar geométrico que habían adquirido cuando cursaban 7mo., esto les permitió explorar y familiarizarse con el software. Igual ante esta nueva interacción con el Geogebra en el mes de agosto, se propició que hicieran dos actividades que, además de poner en juego propiedades geométricas, sirvan de exploración del programa nuevamente.

Las clases que requerían el uso del software se llevaron a cabo en el laboratorio de informática del colegio, ya que permite que cada alumno trabaje individualmente en una PC y posee acceso a internet. La institución cuenta con una plataforma virtual, en la que cada asignatura tiene un espacio virtual que complementa la clase presencial, por lo que se subió un archivo con las consignas para que cada alumno la tenga a su alcance y que una vez terminada la actividad empleando el Geogebra cada uno suba y guarde su producción mediante un archivo.

En las clases se propicia el trabajo grupal, por lo que el grupo está habituado a trabajar en grupo, presentar sus producciones en la puesta en común favoreciendo la participación y el debate.

3. MARCO TEÓRICO

El proyecto de enseñanza que se describe se enmarca en una concepción constructivista de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en particular se toma la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1993), es una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

mismos no se construyen de manera espontánea. La concepción constructivista lleva a Brousseau a proponer un modelo que llama **situación**, y que describe en términos de interacción entre un sujeto y un “medio” resistente, al que el sujeto se adapta, produciendo conocimiento. En sus palabras: *“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje”*.

En esta teoría se describe la enseñanza de la matemática a partir de dos tipos de interacciones básicas:

- entre alumno y con un cierto *medio* resistente cuyo núcleo es un problema matemático.

- entre docente y alumno a propósito de la interacción del alumno con el *medio*.

El concepto teórico que describe el primer tipo de interacción se llama “*situación a-didáctica*” y modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, que es independiente de la intención didáctica del docente. La noción de *“contrato didáctico”* describe y explica el segundo tipo de interacciones mencionado.

El docente tiene un rol fundamental en el momento que los alumnos realizan producciones a partir de la situación problemática dada, esta actividad se la llama *devolución*. *“No basta “comunicar” un problema a un alumno para que ese problema se convierta en* ***su*** *problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema “universal” libre de presupuestos didácticos. Se llama “devolución” a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados.” (Brousseau, 1993).*

Teniendo en cuenta la Teoría de Situaciones, elaboramos la secuencia didáctica y realizamos el análisis a priori, el cual nos permitió definir la propuesta didáctica a desarrollar en ese primer año.

El análisis a priori de una secuencia didáctica involucra varios análisis:

- El análisis epistemológico de los contenidos que se quieren enseñar,

- El análisis de las practicas docentes actuales con respecto a la enseñanza de la geometría y sus efectos,

- El análisis del software Geogebra

- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución,

- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, distinguiendo tres dimensiones:

    - la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego,

- la dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza,

- la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

El análisis a priori se enmarca en una metodología de investigación denominada Ingeniería didáctica, la cual se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias didácticas. Esta metodología de investigación se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995).

Con el objetivo de analizar el impacto que tiene el uso del software Geogebra en la enseñanza de la geometría en el ciclo básico del nivel secundario, abordamos el proceso por el cual se transforma el software desde su concepción de artefacto a su concepción como instrumento, denominado "génesis instrumental" por Rabardel, (citado por Iranzo y Fortuny, 2009). En dicho proceso se identifican a su vez dos subprocesos determinados por la dirección en la cual se producen las retroacciones entre el alumno y el software: el de instrumentación y el de instrumentalización. Esperamos encontrar indicio de estos subprocesos en las producciones que los alumnos realicen durante la implementación, enfocándonos en los modos en que el software influye en las estrategias de resolución propuestas por los alumnos, para el caso de la *instrumentación*; y en cómo el conocimiento de cada alumno, y su manera de trabajar, guía el uso que hace del software, para el caso del proceso de *instrumentalización.*

4. DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia didáctica elaborada consta de una primera parte para realizarse con lápiz y papel que posibilite al alumno construir los criterios de congruencia de triángulos y la segunda parte aborda el tema mediante problemas que se resuelven usando el software dinámico Geogebra.
En un principio se pensaba abordar el tema usando directamente el software pero al realizar el análisis a priori de lo que podrían hacer los alumnos, observábamos que al intentar hacer ciertas construcciones – por ejemplo cuando se quería construir un triángulo dado un lado y la medida de dos ángulos – resultaba difícil determinar el segundo ángulo con la medida dada, anticipábamos varias dificultades que tendrían los alumnos al manipular el software que haría que estos focalizaran su atención en aspectos propios del instrumento tecnológico. También, se pensó en construir triángulos y luego superponer pero aparecen ciertas limitaciones del software, además de necesitar otros conocimientos, como simetría axial, por parte de los alumnos que en esta instancia de formación en la que se encuentran no poseen.

Como consecuencia de lo anterior concluimos en que los alumnos realizarían una secuencia didáctica para que construyeran los criterios de congruencia haciendo las actividades en lápiz y papel. Una vez institucionalizados los criterios de congruencia y realizado varias actividades aplicando los criterios, se les presentaría tres actividades para realizar utilizando el software Geogebra, la resolución de las mismas requiere utilizar algún criterio de congruencia sin que esto estuviera manifestado en el enunciado.

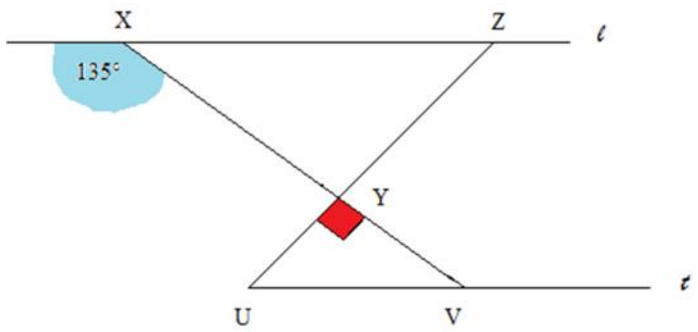
Cabe aclarar que, en el análisis didáctico se incluye las resoluciones correctas esperadas y las incorrectas con posibles intervenciones para que el alumno pueda superar la dificultad.

A continuación presentamos la secuencia didáctica llevada adelante en un 1er año de nivel secundario, la describiremos en dos partes:

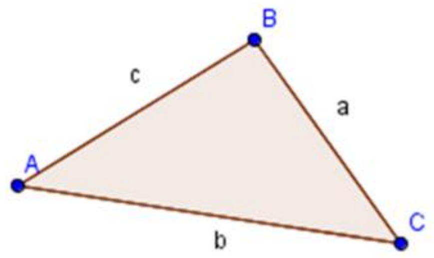
4.1 Primera parte

La primera actividad dada tuvo como propósito docente que los alumnos recordaran las relaciones que existen entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal, y los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

1) Sea ℓ // t, determina la medida de los ángulos interiores del triángulo XYZ y UVY.



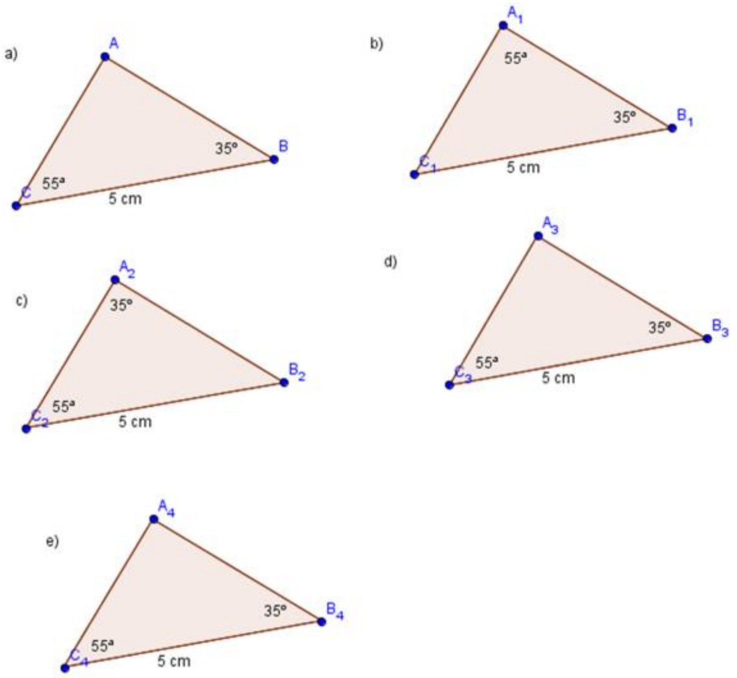
La actividad 2 permite a los alumnos evocar la clasificación de triángulos según sus lados y según sus ángulos, además de explorar condiciones necesarias para construir un triángulo conociendo una terna de medidas del mismo. El trabajo matemático que realizará el alumno requiere el uso de instrumentos de geometría. Siendo muy importante indicarle que antes de usar los instrumentos haga un bosquejo del triángulo que debe construir ubicando los datos dados, este dibujo no a escala se lo llama figura de análisis.

2) 	**Construye, si es posible, con las medidas indicadas un triángulo por cada uno de los ítems y en caso de ser posible, clasifícalos según sus lados y ángulos:** **a) c=5cm , <B=55° , <A=35°** **b) <C=40°,<B= 75 ° , <A=75°** **c) c=5cm, <B=40° , <A=100°** **d) c=8cm, b=8cm , <A=60°** **e) a=5cm, b=2cm, c=2cm** **f) a=6cm, b=4,5cm**

Breve análisis didáctico de la actividad 2

Es posible construir el triángulo con las medidas indicadas en el inciso a).

Al realizar la figura de análisis puede ser que ubique uno de los ángulos dados en el lado que mide 5 cm. A continuación se muestra posibles figuras de análisis de cómo podrían ubicar los datos dados.



Debe darse cuenta que es necesario trazar un segmento y allí ubicar los ángulos dados y observar dificultades para trazar el segmento de 5cm si traza primero los dos ángulos sobre un segmento de medida cualquiera. Y que otra cosa obtiene si marca el segmento de 5cm primero y uno de los ángulos.

Por ejemplo, trazar un segmento de medida cualquiera ubicar un ángulo prolongar el otro lado de 5cm y en el extremo de ese segmento marcar el otro ángulo, quedando como muestra la figura e), que es igual a la a), pero cuando puse esa opción pensaba que trazaba el segmento de longitud de 5 cm y en cada extremo del segmento marcaba cada ángulo indicado.
Si tenemos en cuenta los criterios:

CRITERIOS DE CONGRUENCIA
Dos triángulos son congruentes si tienen, respectivamente congruentes:
- ***los tres lados (primer criterio, que se indicará así: L-L-L)***
- ***un par de lados y el ángulo comprendido por ellos o el ángulo opuesto al lado mayor de los dados. (segundo criterio, que se indicará así: L-A-L)***
- ***un lado y par de ángulos (ambos adyacentes, o uno opuesto y otro adyacente al lado dado). (tercer criterio, que se indicará así: A-L-A)***

El inciso a) nos acerca al tercer criterio de congruencia según el orden dado en el recuadro de arriba, es posible construir dos grupos de triángulos congruentes conociendo la medida de un lado y dos medidas de ángulos si se ubican de alguna de las siguientes formas:

- Un lado y el par de ángulos adyacentes a ese lado, o

- Un lado y uno de los dos ángulos opuestos a ese lado y el otro adyacente a ese lado.

A continuación la actividad que se propondrá a los alumnos como nro. 3

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

3) **En el último encuentro del año de grupos scout, se les propone crear, para identificarse y sumar algunos puntos, unos banderines en forma triangular. El coordinador de los grupos propuso un banderín de muestra, y lo lleva para que lo vean. Cada grupo, para ahorrar trabajo, decidió tomar un conjunto de tres datos del banderín original, que tenía como medidas aproximadas para los lados las siguientes: 4 dm; 7,3 dm y 8 dm y para los ángulos: 30º, 85º y 65º, para luego construirlo y recortarlo. A continuación está el banderín original con las medidas de lados y ángulos indicadas en el mismo.**

Banderín original:

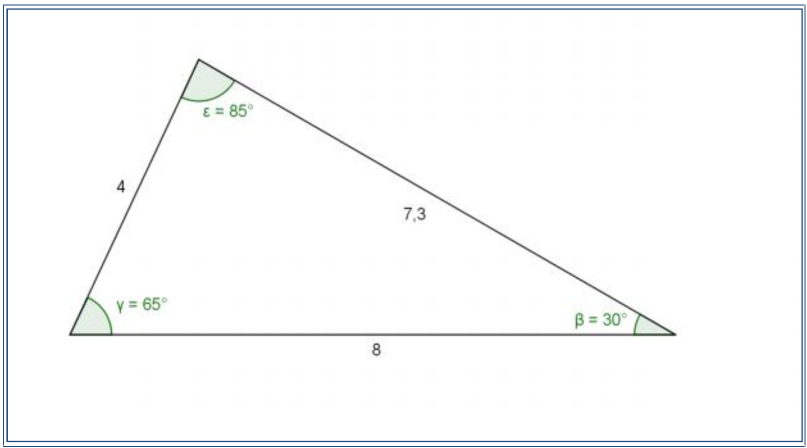
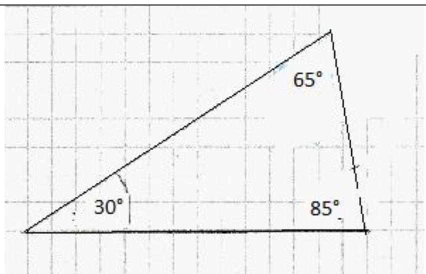


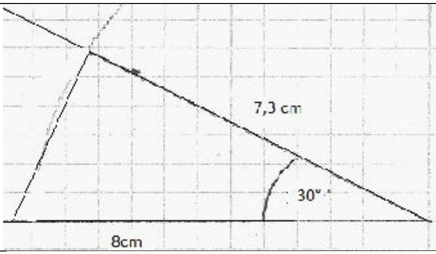
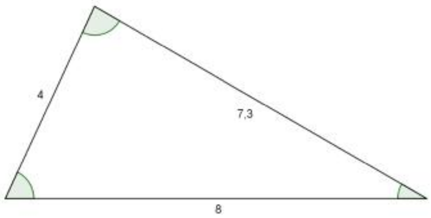
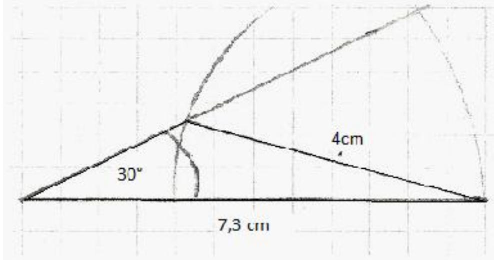
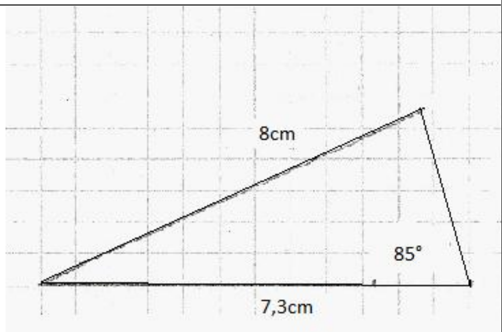
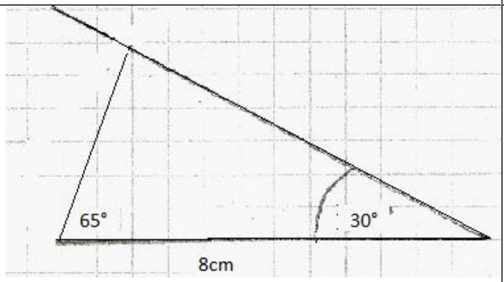
Figura 1

La tabla que se da a continuación[2] muestra el conjunto de tres datos que tomó cada grupo de Scout, construyan los banderines con las medidas escogidas en cada grupo, una vez construido lo tienen que recortar y superponerlo con el banderín original (figura 1). Esta actividad la pueden realizar en grupos de no más de cuatro integrantes. Indiquen si los triángulos construidos son congruentes al banderín en la cuarta columna de la tabla.

GRUPO SCOUT	DATOS	TRIANGULO OBTENIDO	***Es congruente al banderín Si o No***
1	*30° *85° *65°		

[2] Aclaración: Se les da una tabla con los distintos datos tomados por los grupos scout para que cada grupo de alumnos construyan los triángulos. Luego, se les da el triángulo original, para que ellos superpongan y puedan ir anotando con qué datos pueden construir uno congruente.

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

2	*7,3cm *8cm * Ángulo comprendido 30°.		
3	*8cm * 7,3cm * 4cm		
4	*4cm *7,3 cm *Ángulo opuesto al menor 30°		
5	*8cm *7,3 cm *Ángulo opuesto al mayor 85°		
6	*65° *30° *Lado adyacente 8cm		

Luego de completada la tabla contesten las siguientes preguntas:

a) **¿Qué grupos scout tomaron datos que no le permitieron ganar puntos? ¿Por qué?**

b) **¿Qué datos deberían de tener en cuenta los grupos scout para construir banderines congruentes al original?**

Análisis didáctico de la Actividad 3

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

a) **¿Qué grupos scout tomaron datos que no le permitieron ganar puntos? ¿Por qué?**

Rta: El grupo 1 y 4 obtuvieron triángulos diferentes, por lo que no obtuvieron puntos. El grupo 1 obtuvo un triángulo más chico(o más grande), es decir, tiene los mismos ángulos pero distintos los lados. El grupo 4, obtuvo un triángulo con distinto lado y ángulo.

Algunas conjeturas que podrían aparecer:
* Teniendo como datos los tres ángulos los triángulos no son congruentes
* Teniendo como datos dos lados y el ángulo opuesto al menor, los triángulos no son congruentes
Podría surgir alguna situación de que el alumno no crea que sea así, por lo que se lo podría invitar a construir nuevamente.

b) **¿Qué datos deberían de tener en cuenta los grupos scout para construir banderines congruentes al original?**

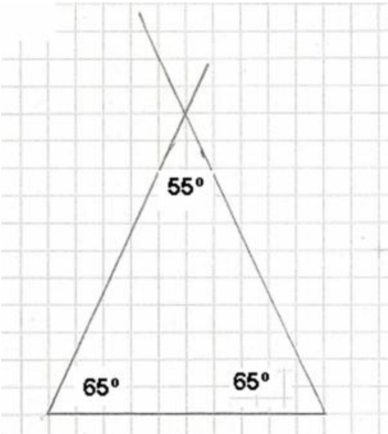
Rta: Guiándose por las construcciones que hicieron y comparando, podrían llegar a decir que obtuvieron triángulos congruentes, tomando como datos:
*Los tres lados.
*Dos lados y el ángulo comprendido.
*Dos ángulos y el lado adyacente.
*Dos lados y el ángulo opuesto al mayor.

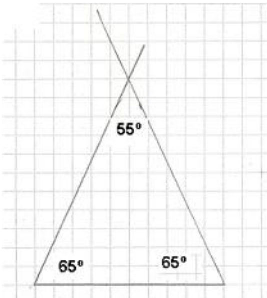
Entonces, remitiéndonos a la pregunta, los grupos scout deberían de tener en cuenta lo mencionado.
En este momento se debe hacer una puesta en común, para explicitar las conjeturas, ya sea en las que se obtuvieron triángulos congruentes y en las que no. Para ello, se hará uso de la tabla.

A continuación las actividades que siguen con una breve descripción de la misma.

4) **¿Podrías construir dos triángulos diferentes sabiendo que sus ángulos interiores miden 65°,65°, 50°? Si puedes constrúyalos.**

Tal vez, este ejercicio podría dejarse de tarea. La idea es volver a estos conocimientos provisorios que se vienen dando.

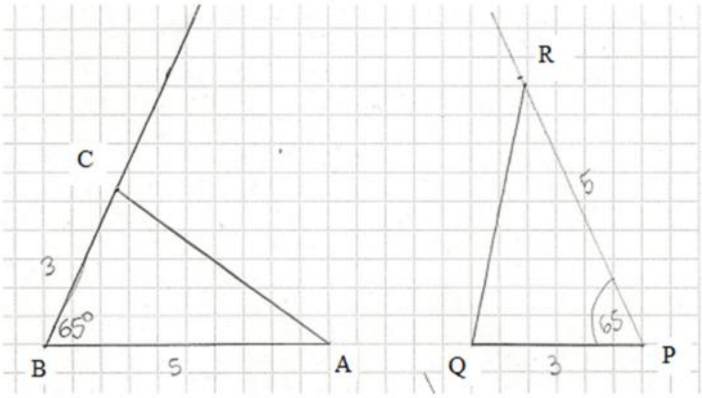




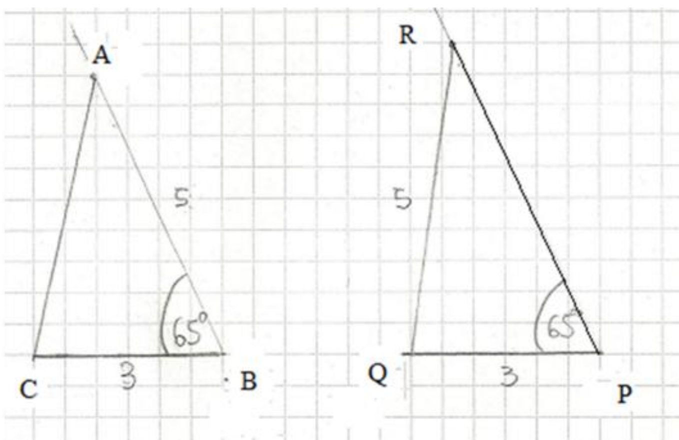
Otra vez, la conjetura será que teniendo como datos los tres ángulos, los triángulos no son congruentes, pues las medidas de los lados son distintas. Hasta ahora solo se puede decir que gráficamente, se puede ver, y si se superponen ambos triángulos no coinciden exactamente. (Argumentación débil).

5) **Dados dos triángulos, con los siguientes datos:**
AB= 5 cm; BC= 3cm y B=65°.
PQ=3 cm; QR= 5cm y P= 65°
¿Son siempre, a veces, nunca congruentes? En caso de ser a veces muestra un par de triángulos que lo sean y otro que no lo sean. Justifiquen su respuesta.

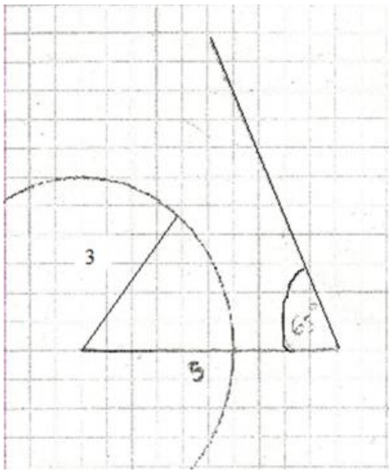
Rta:



Algunos alumnos se verán tentados a decir, que no son congruentes ya que de la construcción, visualmente parecen distintos. Uno como docente, podría intervenir, remitiéndolo a lo realizado anteriormente (ejercicio de los grupos scout) y apoyándose en las conjeturas que se sacaron, ver si se puede utilizar y decir si son congruentes o no. En concreto, el alumno podría decir que son congruentes basándose en la conjetura de dos lados y el ángulo comprendido.
Otros, podrán recortar y superponer, que es una manera de asegurar la congruencia, sin embargo uno podría pedir una justificación que no sea superponiendo, diciendo que capaz se recortó mal y justo dio congruente, esto no deja de ser una experiencia y puede existir la posibilidad de que el resultado se haya encontrado por casualidad ya que no se controla por el uso de propiedades geométricas.



Estos triángulos no son congruentes, algunos van a superponer, y de alguna manera se verá la no congruencia, y otros van a intentar utilizar las conjeturas del ejercicio anterior, pero se van a encontrar con que los datos así puestos no alcanza para asegurar la congruencia. Acá es donde uno debe pedir que escriban el porqué.



Podría surgir, esta construcción que no se puede realizar. El ángulo no puede estar opuesto al lado de 3.

Otra situación que puede ocurrir es que puedan ver solo una manera de construir, entonces habría que indicarle que pruebe construyendo cambiando los lados y el ángulo. Esta intervención está referida a la ubicación de los datos dados en el momento de construir.
Este ejercicio, suponemos, le mostrará al alumno: de que se pida el "ángulo comprendido" en el criterio no es un detalle menor para que se cumpla la congruencia, y si no, se deberá decirlo.

Terminada esta etapa se estaría en condiciones de propiciar la institucionalización de los criterios de congruencia a partir de lo producido por los alumnos.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA Dos triángulos son congruentes si tienen, respectivamente congruentes: ***- los tres lados (primer criterio, que se indicará así: L-L-L)*** ***- un par de lados y el ángulo comprendido por ellos o el ángulo opuesto al lado mayor de los dados. (segundo criterio, que se indicará así: L-A-L)*** ***- un lado y par de ángulos (ambos adyacentes, o uno opuesto y otro adyacente al lado dado). (tercer criterio, que se indicará así: A-L-A)***

Una vez establecidos los criterios se darán a los alumnos actividades con el objetivo de que utilicen algunos de los criterios para justificar las respuestas.

6) **De una recta *ℓ*, toma un segmento cualquiera $\overline{AB}$, traza la mediatriz y desde un punto C cualquiera de ella, une los extremos del segmento. ¿Cómo son entre si las figuras que se formaron? Fundamenta tu respuesta. ¿Qué podrías decir del triángulo ABC?**

Primero, tiene que quedar clara la consigna para que todos realicen la misma construcción, además de lo que se quiere demostrar, seguramente se tendrá que recordar el concepto de mediatriz.
Luego de haber realizado la figura de análisis (figura 2), será importante discriminar los datos que ofrece el problema ya que lo visual será muy fuerte, y de esta manera justificar con la aplicación de algún criterio.

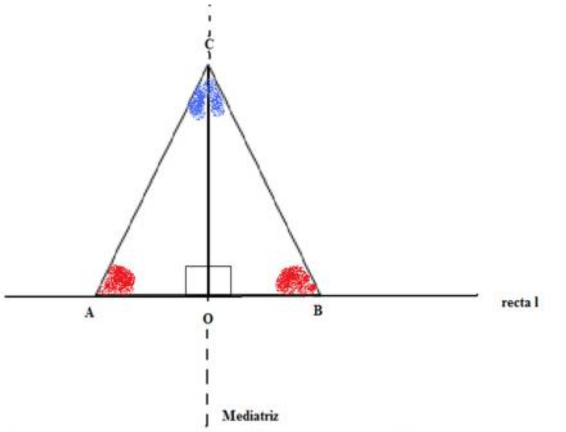


Figura 2

Solución 1:
$\overline{AC} \cong \overline{CB}$ por ser C punto de la mediatriz de $\overline{AB}$, por lo que ABC es isósceles.

Solución 2:
En caso que no recordaran que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento AB. Podrían hacer el siguiente razonamiento:
$\overline{AO} \cong \overline{OB}$ por ser O punto medio de $\overline{AB}$ pues la mediatriz divide por la mitad a $\overline{AB}$
$\overline{CO}$: Lado común
$C\hat{O}A = C\hat{O}B = 90°$ pues la mediatriz es perpendicular a $\overline{AB}$
Por el 2do. criterio (L-A-L) los triángulos CAO y COB son congruentes y ABC resulta ser un triángulo isósceles. Pues al ser los triángulos congruentes surge la congruencia de los lados CA ≅ CB por lo que tenemos un triángulo isósceles.

***Solución 3*:** En el intento de demostrar o validar su respuesta, es posible que algunos alumnos se vean tentados a utilizar lo que ven y usarlo como hipótesis, por ejemplo, $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. Entonces habría que intervenir y hacer hincapié en los datos que se tienen (hipótesis) y los elementos de los cuales no sabemos nada (lo que debemos demostrar).

En conclusión esperamos que en la carpeta quede escrito algo similar a lo siguiente**:**

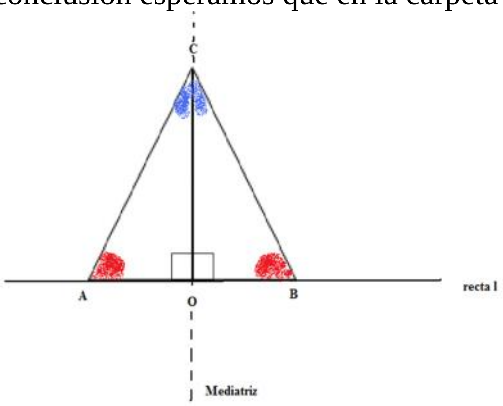
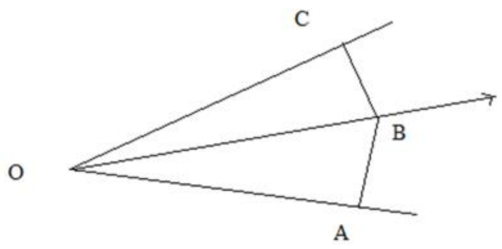


TABLA DE LADOS		TABLA DE ÁNGULOS	
$C\hat{O}A$	$C\hat{O}B$	$C\hat{O}A$	$C\hat{O}B$
AC	BC	A	B
AO	OB	O	O
CO	CO	C	C

La actividad que se propone a continuación tiene el mismo objetivo que la anterior en cuanto al trabajo matemático que se espera que despliegue el alumno.

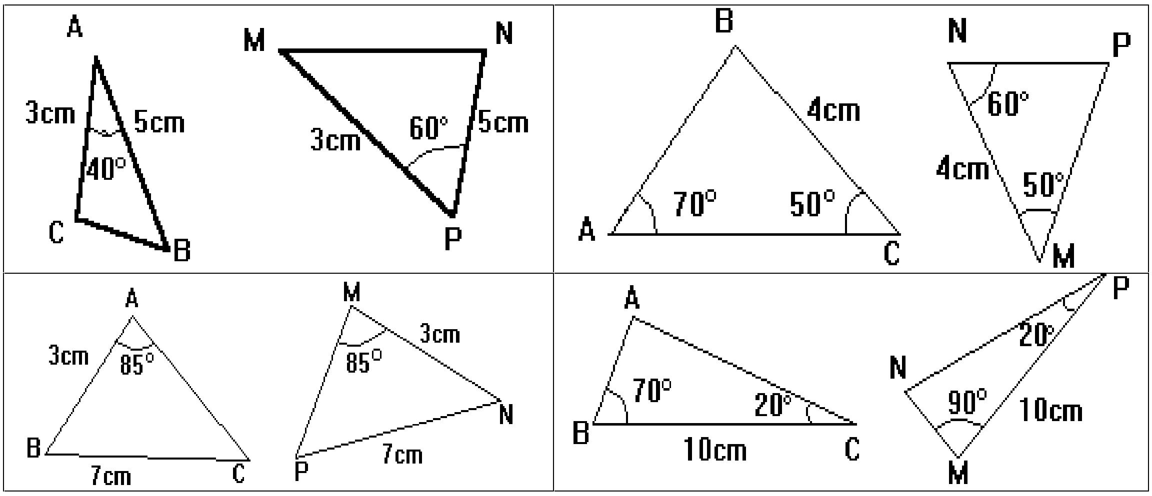
7) **Dados** $\overrightarrow{OB}$ **bisectriz de** $A\hat{B}C$, $\overline{AB} \perp \overline{OA}$ **y** $\overline{CB} \perp \overline{CO}$**. Probar que:** **CB** $\cong$ **AB**



En cambio la siguiente actividad propicia identificar si se cumple algunos de los criterios para determinar si son o no congruente los pares de triángulos indicados en cada inciso.

8) **De los siguientes pares de triángulos, según los datos de las figuras, decir si se puede asegurar su congruencia. En caso de poder asegurarse su congruencia, escribe el criterio que lo asegura y las tablas de lados y ángulos correspondientes.**

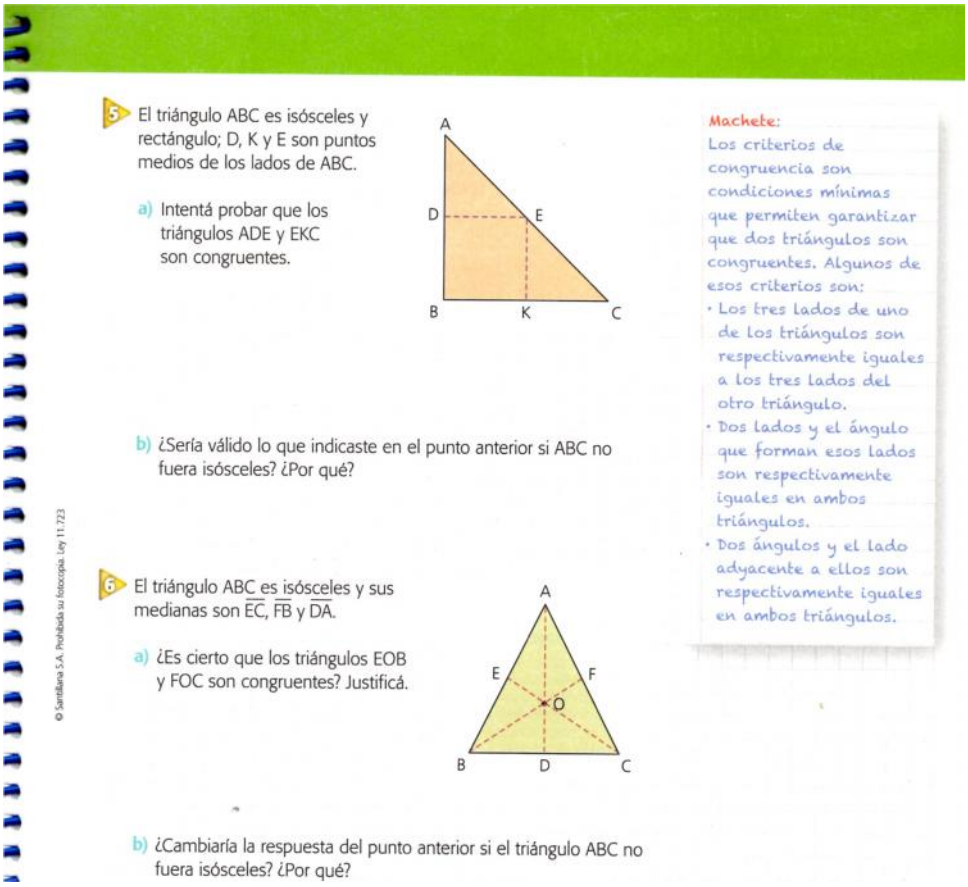
En estos casos será importante identificar los datos que brindan las figuras de análisis e ir analizando qué criterios se pueden o no llegar a aplicar.



4.2 Segunda Parte

Nos llevó un tiempo considerable, definir las actividades que se presentarían a los alumnos para que las resolvieran usando el software Geogebra, seleccionamos varios problemas y los resolvimos sin usar el software, luego hacíamos variantes de las variables de la consigna y los resolvíamos usándolo, cuando veíamos que la resolución mediada por el software simplificaba demasiado el problema propuesto este se descartaba. Haciendo este proceso quedaron tres problemas, de los cuales dos se extrajeron del Libro de la Matemática de 1er año de Broitman y otros, editorial Santillana, la consigna original de ambos se presentaba así en el texto y era para realizarlas con lápiz y papel:

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA



5 El triángulo ABC es isósceles y rectángulo; D, K y E son puntos medios de los lados de ABC.

a) Intentá probar que los triángulos ADE y EKC son congruentes.

b) ¿Sería válido lo que indicaste en el punto anterior si ABC no fuera isósceles? ¿Por qué?

6 El triángulo ABC es isósceles y sus medianas son $\overline{EC}$, $\overline{FB}$ y $\overline{DA}$.

a) ¿Es cierto que los triángulos EOB y FOC son congruentes? Justificá.

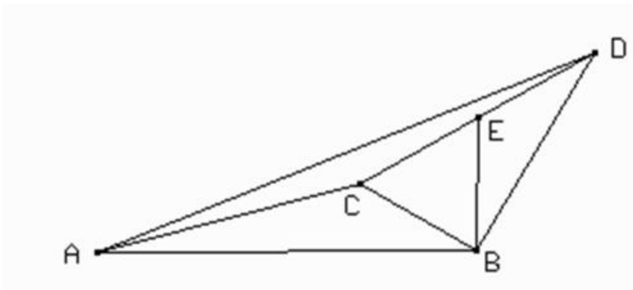
b) ¿Cambiaría la respuesta del punto anterior si el triángulo ABC no fuera isósceles? ¿Por qué?

Machete:
Los criterios de congruencia son condiciones mínimas que permiten garantizar que dos triángulos son congruentes. Algunos de esos criterios son:
- Los tres lados de uno de los triángulos son respectivamente iguales a los tres lados del otro triángulo.
- Dos lados y el ángulo que forman esos lados son respectivamente iguales en ambos triángulos.
- Dos ángulos y el lado adyacente a ellos son respectivamente iguales en ambos triángulos.

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En cuanto al tercer problema surge del análisis de problemas que la OMA promueve a través de los Clubes Cabri, uno de los integrantes se le ocurrió observando el gráfico del problema 3, nivel A, de 14ta Competencia de Clubes Cabri Ronda Final:

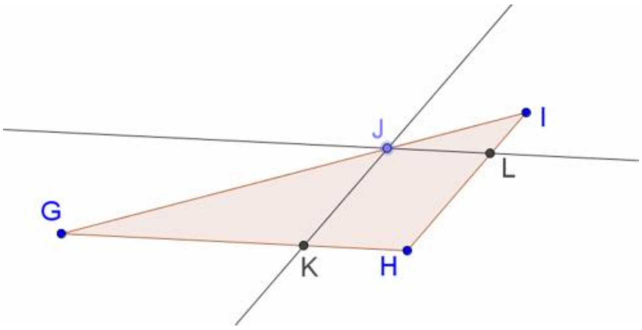
Construir la siguiente figura donde *ACB* = 135°, 2 *BC* = *AC* = 4, *BCD* = 60°, *AC* = *CD* y *E* es el punto medio de *CD*. Hallar la medida del ángulo *ADB*.



Enlace: http://www.oma.org.ar/enunciados/14ta3era.htm.

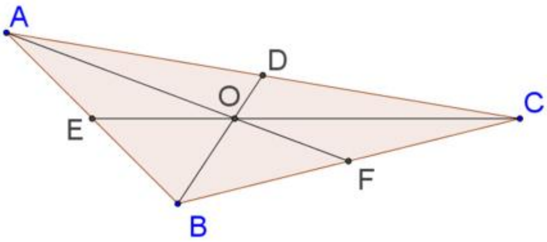
Dado que en el gráfico hay un punto C, él pensó que se podría desplazar para formar dos triángulos congruentes (y sin que exista el punto E que está en ese problema).
Nuestro análisis nos hacía preguntarnos más cómo se presentaría la consigna para que resultara un desafío para los alumnos y al mismo tiempo que ellos vislumbraran que era posible solucionarlo.
Las consignas quedaron finalmente formuladas así:

Primera actividad
A continuación verán en pantalla la siguiente animación[3].



a) **Reproduzcan en su pantalla lo que acaban de ver: construyan el triángulo con los puntos y nombres dados de modo tal que puedan hacer la misma animación que vieron.**
b) **¿Qué condición debe cumplir el punto J para que los triángulos GJK y JLI sean congruentes? Justificar.**
c) **Establecido el punto J como lo pide el punto anterior, ¿Cuál es la relación entre el área del paralelogramo JLKH y el triángulo GHI?**

Segunda actividad
Sea un triángulo ABC cualquiera y sean E, D y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Se trazan las medianas tal como se observa en la figura.

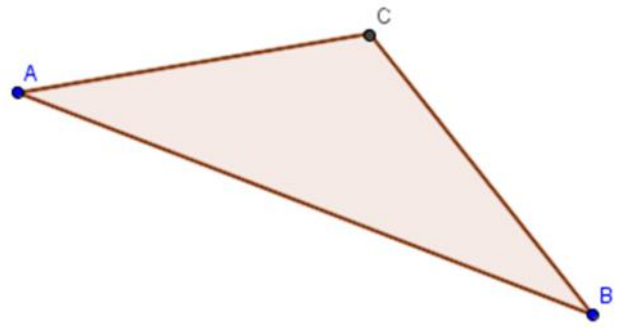


a) **¿Bajo qué condiciones los triángulos EBO y DOC son congruentes? Justificar.**
b) **Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Qué otros triángulos quedan determinados congruentes?**

Tercera actividad

a) **Construir un triángulo isósceles ABC, hallar un punto interior D a dicho triángulo, de modo tal que los triángulos ABD y BDC que quedan determinados sean congruentes entre sí.**

[3] Mediante un proyector se muestra la figura y se movía el punto J sobre lado GI, los alumnos observaban al punto J desplazarse como así también las rectas que pasaban por él, cada una de ellas paralela a uno de los otros dos lados del triángulo GHI.



4.2.1 *Discusiones y análisis didáctico de la primera actividad*

Al momento de explicitar la consigna a los alumnos surgen varias preguntas con respecto a la información que se les dará a los alumnos, por ejemplo si se les tiene que decir o no si son paralelas las rectas que cortan los lados del triángulo.

Al ver la animación los alumnos tendrán posibilidad de notar cómo se mueven las rectas, y observar algún tipo de relación para poder reproducirla en su pantalla. Esto nos hizo recordar lo que hacemos cuando trabajamos con lápiz y papel, se da la consigna y se les pide a los alumnos considerar el dibujo de referencia o hacerlo en caso que no haya un soporte grafico, generalmente se informa que se trata de determinado triángulo y si hay algún relación particular entre rectas y lados por ejemplo paralelismo o perpendicularidad.

Por lo que consideramos que luego de hacer la animación, Romina hiciera o no algunas preguntas. Suponemos que van a sospechar que la recta que contiene al segmento $\overline{KJ}$ y el lado $\overline{HI}$ son paralelas que no es una transversal cualquiera, se les podría preguntar ¿qué tipo de triángulo es GIH?, ¿esa recta que pasa por el segmento $\overline{JL}$ como es respecto al lado $\overline{HI}$? o ¿la recta que pasa por el segmento JL (KJ) como es respecto al lado GH (HI)? estas preguntas se harían para orientar que deben mirar en la animación para luego poder reproducirla. O no hacer ninguna pregunta y ver que se les ocurre hacer para lograr la misma animación. Si se realizan preguntas estas serían para ayudar al alumno en el mismo sentido o necesidad que tiene cuando se acompaña a una consigna con un dibujo de referencia e indica que es un triángulo rectángulo, o se explicita que "tal recta corta perpendicularmente a esta otra", etc.
J se mueve siempre sobre el segmento $\overline{GI}$. Puede ocurrir que debido a una construcción que no respete las propiedades de la figura, J no pertenezca a ese segmento, o bien que las rectas trazadas no sean paralelas a los lados, que sean ubicadas "a ojo" en la pantalla sin usar el comando adecuado del software. Durante la presentación de la figura debe quedar claro que el cuadrilátero JLHK es un paralelogramo, independientemente del tipo de triangulo GIH.

El problema que puede llegar a surgir es que cuando ellos construyan queden distintas letras, o en distinto orden. Hay que indicar que renombren los puntos para que sea más clara la puesta en común.

- Una posible solución inicial sería ir moviendo el punto J hasta que visualmente los triángulos se vean congruentes. En ese caso se les debe indicar que utilicen alguno de los criterios para justificar su respuesta.

- Otra posible solución es que se den cuenta, al mover el punto J que este tiene que ser el punto medio de $\overline{GI}$, con lo cual podrían utilizar la herramienta punto medio para determinar un punto sobre el cual ubicarían el punto J.

- Otra posibilidad sería que no lo ubiquen exactamente pero se den cuenta de la propiedad que debe cumplir J.

Posibles intervenciones:

Podrán deslizar el punto J de manera tal que los triángulos JLI y GKJ visualmente queden congruentes entonces uno podría preguntar si se podría dar la ubicación exacta de J y como aseguramos que los triángulos son congruentes. Suponemos que los alumnos dirán que hay que aplicar alguno de los criterios vistos.

Partiendo de que J se debe ubicar en el punto medio podremos decir que los segmentos GJ=JI y preguntarles qué otros datos se puede encontrar o necesitaríamos y aquí se podría sugerir que piensen en ángulos ya que se han trazado paralelas o en el paralelogramo que queda formado JKHL.

Una vez decidido que J debe ser el punto medio deben fundamentar utilizando alguno de los criterios.

Se cumple en ese caso lo siguiente:

- Segmentos congruentes: $\overline{JI}$ =$\overline{GJ}$ por construcción.
- Ángulos congruentes: I$\hat{J}$L=J$\hat{G}$K por ser correspondientes entre paralelas
- Ángulos congruentes: G$\hat{J}$K=J$\hat{I}$L por ser correspondientes entre paralelas

Los alumnos usarían, en este caso, el criterio "ALA" para asegurar que los triángulos sean congruentes.

Quedaría para ellos hacer la tabla de lados y de ángulos.

Otra posible justificación es que utilicen que los segmentos $\overline{GK}$ y $\overline{KJ}$ son congruentes por ser K punto medio pero por haberlo observado en el Geogebra sin justificarlo. E igualmente con la propiedad $\overline{LI}$=$\overline{KH}$ podrían asegurar que los segmentos $\overline{HL}$ y $\overline{LI}$ son congruentes por ser L punto medio de $\overline{HI}$.

Una primera aproximación a la respuesta c) por parte de los alumnos podría ser mediante la utilización de la herramienta Geogebra "polígono" para determinar el área del paralelogramo y compararla con la del triángulo.

Otra posible solución sería trazar el segmento JH, como se muestra en la figura 3, y mostrar que quedan determinados dos triángulos congruentes. A continuación utilizando el segmento JL se puede mostrar que los triángulos JLI y JLH tienen igual área, pues tienen igual base e igual altura. Por lo tanto el área del paralelogramo es dos veces el área del triángulo JLI, es decir, la mitad del área del triángulo GHI.

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 1173/15-R-UNPA

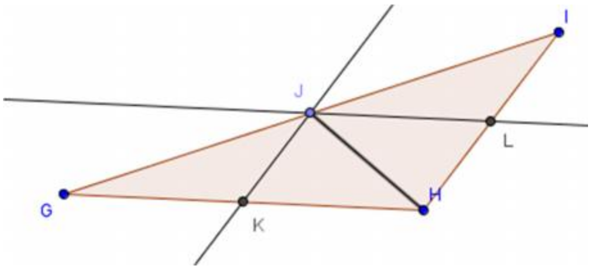


Figura 3

Trazando el segmento KL, se puede llegar a otra solución, ya que se puede mostrar que los cuatro triángulos obtenidos son congruentes (ver figura 4). Por lo tanto, como el paralelogramo ocupa dos de cuatro triángulos, equivale a la mitad del área total.

Intervenciones: *"¿Por qué los cuatro triángulos son congruentes? Ya anteriormente se demostró que los triángulos GKJ y JLI son congruentes, además es fácil también ver y demostrar que los triángulos JKL y HKL también lo son"*. Se podría sugerir demostrar la congruencia entre los triángulos JLI y KHL, o algún otro par que se les ocurra y ayude.

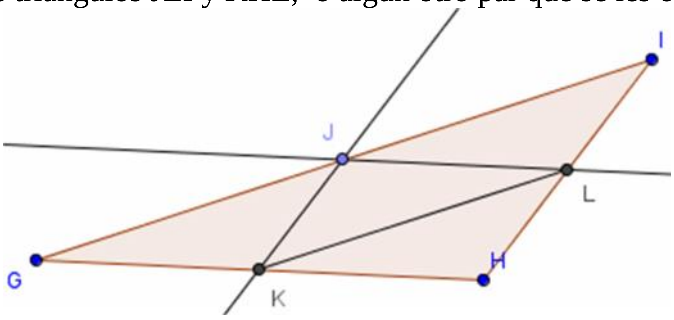


Figura 4

A partir del trazado de este segmento, también se puede apreciar, que al realizar una rotación con centro en J del triángulo GKJ obtenemos el paralelogramo KHIK' (ver figura 5), que posee la misma área que el triángulo original, y del cual el paralelogramo KHLJ corresponde a la mitad.

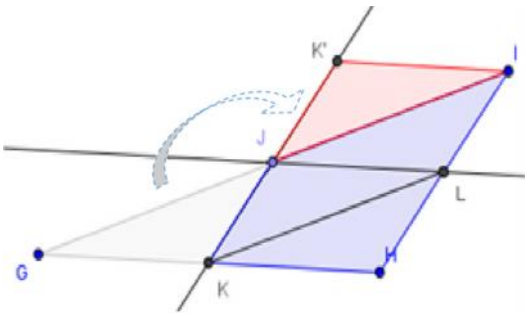
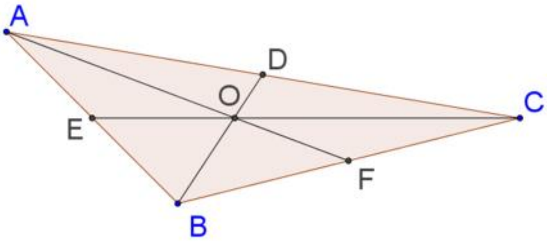


Figura 5

4.2.2 Discusiones y análisis didáctico de la segunda actividad

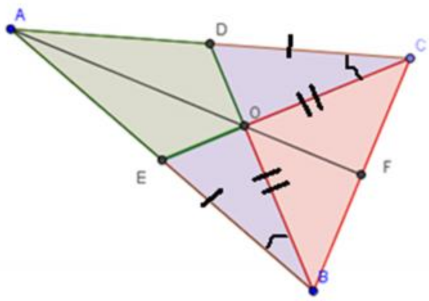
Sea un triángulo ABC cualquiera y sean E, D y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Se trazan las medianas tal como se observa en la figura.



a) **¿Bajo qué condiciones los triángulos EBO y DOC son congruentes? Justificar.**
b) **Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Qué otros triángulos quedan determinados congruentes?**

Una vez replicada[4] la figura en la pantalla (figura 6), para buscar la congruencia entre los triángulos EBO y DOC podrían mover uno de los vértices del triángulo ABC, puntos libres, dejando los otros dos fijos hasta poner "a ojo" dicha congruencia. Si utilizamos, por ejemplo, "C", al moverlo hacia la izquierda conseguiremos que ABC sea isósceles, también podría suceder que quede equilátero, habría que hacerles notar a los alumnos que es un caso particular de un triángulo isósceles.
De lo que se puede observar de la figura obtenida (figura 6), la condición que permite justificar que los triángulos EOB y DOC sean congruentes es que el triángulo ABC debe ser isósceles. Se deberá realizar la demostración usando los criterios de congruencia.

Figura 7



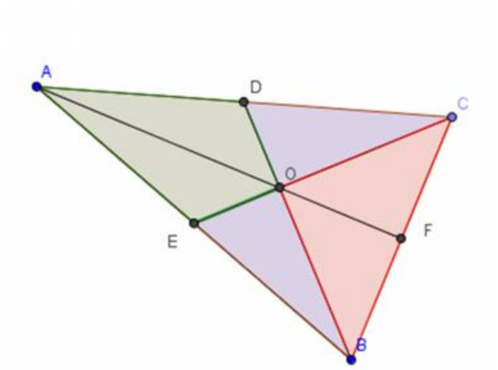


Figura 6

Posibles demostraciones:

I) En la figura 7 tenemos el triángulo ABC isósceles, donde $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$, $\overline{DB}$ y $\overline{CE}$ son medianas por lo que D y E son puntos medios de esos lados iguales, tenemos que $|\overline{DC}| = |\overline{AD}| = |\overline{EB}| = |\overline{AE}|$

- $E\hat{O}B = D\hat{O}C$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
- Se sabe que $\overline{AF}$ es mediana, por ser dato de la consigna, como ABC es un triángulo isósceles, resulta que por el criterio L-L-L los triángulos FAB y FAC son congruentes, por lo tanto $\overline{AF}$ también es bisectriz de $B\hat{A}C$
- $\overline{AF}$ es mediatriz del segmento $\overline{BC}$, por lo que $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|$, podemos afirmar que el triángulo BOC es isósceles.
- Al ser BOC un triángulo isósceles, los ángulos $F\hat{B}O$ y $F\hat{C}O$ son congruentes. Como $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ por ser el triángulo ABC isósceles; se concluye que $O\hat{C}D = O\hat{B}E$.
- Usando el criterio L-A-L, los triángulos EOB y DOC son congruentes.

[4] Recordar que los alumnos tenían la consigna en formato digital.

A partir de las anteriores premisas, puede surgir más de un criterio que permite justificar que los triángulos DOC y EOB son congruentes. Como lo narramos a continuación:

II) Partiendo de que ABC es un triángulo isósceles donde $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$ y por ser D y E punto medio, respectivamente, resulta que $|\overline{DC}| = |\overline{EB}|$.

También que $\overline{AF}$ es mediana y el triángulo BOC es isósceles resulta que también es mediana del segmento $\overline{BC}$, podemos afirmar que $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|$ y $|\overline{OD}| = |\overline{OE}|$. Como se señala en la figura 8.

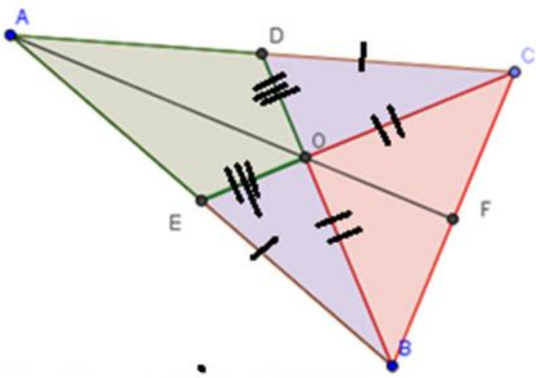


Figura 8

Por el criterio L-L-L, se concluye que los triángulos DOC y EOB son congruentes, que es lo que se quería probar.

III) También se podría demostrar que los triángulos DOC y EOB son congruentes por el criterio A-L-A, se tiene como premisas que $\overline{EB}=\overline{DC}$, $O\hat{C}D = O\hat{B}E$ (ver premisas de la demostración I) y se podría justificar que $C\hat{D}O = E\hat{O}B$ a partir de la congruencia de triángulos DCB y CEB. Esta posible solución puede resultar más compleja ya que, previamente, requiere de la congruencia de dos triángulos que pueden resultar difíciles de identificar visualmente.

Dando respuesta el ítem b) de la actividad, teniendo en cuenta el punto anterior, se puede afirmar que los triángulos FOB y FOC son congruentes ya que son dos mitades del triángulo isósceles BOC.

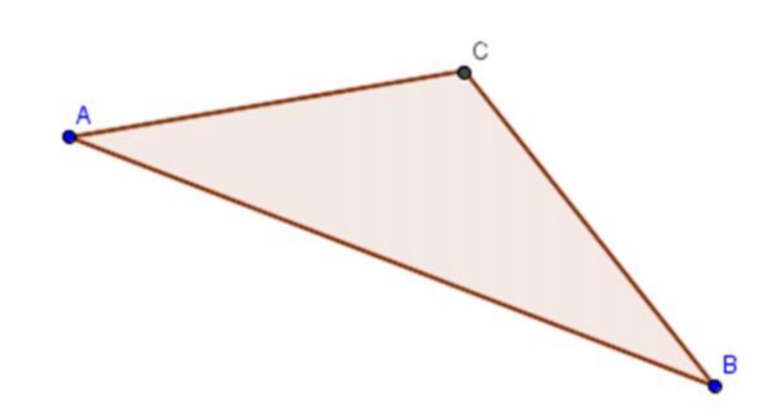
Por otro lado, analizando los triángulos AOD y AEO, tenemos que $\overline{AO}$ es lado común, los ángulos $E\hat{A}O$ y $O\hat{A}D$ son congruentes por ser el segmento $\overline{AF}$ la bisectriz de $B\hat{A}C$. Además, por construcción $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$, y dado que sus puntos medios son respectivamente D y E; podemos afirmar $|\overline{AD}| = |\overline{AE}|$. Por lo tanto, por el criterio L-A-L, podemos afirmar que los triángulos analizados son también congruentes.

También, se puede demostrar la congruencia de los triángulos DCB y CEB, por el criterio L-A-L, ya que $\overline{EB}=\overline{DC}$, pues ABC es un triángulo isósceles y D y E punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente; $\overline{BC}$ es lado común y $E\hat{B}C=D\hat{C}B$.

Se podría demostrar la congruencia de AEC y ADB mediante el criterio L-A-L, pues $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$ *por ser ABC isósceles*; $|\overline{AD}| = |\overline{AE}|$ por ser D y E puntos medios de dichos lados y $B\hat{A}C$ el ángulo común.

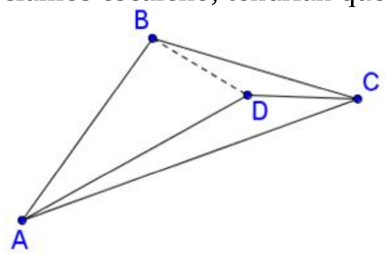
4.2.3 Discusiones y análisis didáctico de la tercera actividad

3) **Construir un triángulo isósceles ABC, hallar un punto interior D a dicho triángulo, de modo tal que los triángulos ABD y BDC que quedan determinados sean congruentes entre sí.**

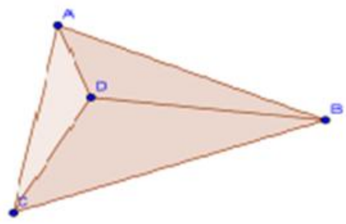


4) **En caso que el triángulo ABC del punto 3 no fuera isósceles, ¿es posible encontrar un punto D cualquiera, de modo tal que los triángulos ABD y BDC que quedan determinados sean congruentes entre sí?**

En la formulación de la actividad 3) estuvo en dilema si se decía: "Construir un triángulo escaleno ABC" o "Construir un triángulo isósceles ABC"
Si le decíamos escaleno, tendrían que darse cuenta, que $|\overline{\text{[illegible]}C}| = |\overline{\text{[illegible]}D}|$ y $|\overline{\text{[illegible]}B}| = |\overline{\text{[illegible]}C}|$

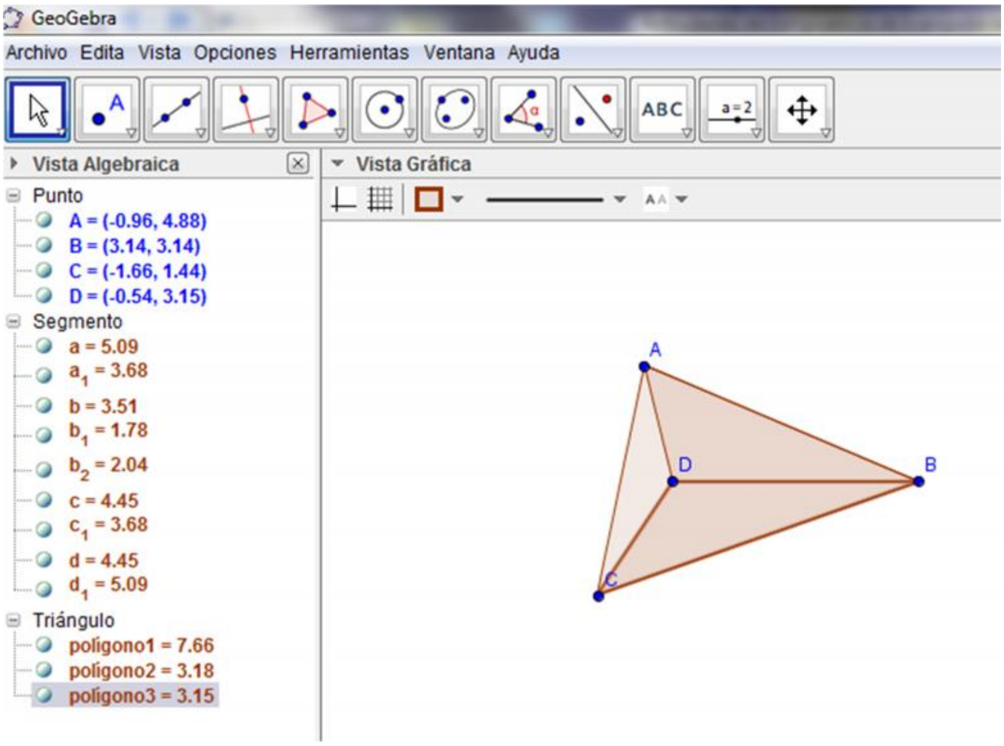


Si consideramos hacer el punto 3, sin aclarar qué tipo de triángulo deben construir, pueden hacer un isósceles o un escaleno acutángulo.
Supongamos que construye un triángulo escaleno acutángulo y ubica el punto D, como la siguiente imagen:



Al marcar el punto D y traza segmentos para definir los triángulos pedidos ADB y CDB. El alumno estará tentado en mover el punto D y "a ojo" establecer cuando ambos triángulos quedan supuestamente congruentes. ¿Cuál es la pregunta o preguntas que debe formular el docente para que los alumnos validen la respuesta?

Al mover el punto D, los alumnos pueden anticipar que $\overline{BD}$ debe ser bisectriz del $A\hat{B}C$.
Además de ser lado común de ambos triángulos. En la pantalla podría estar viendo esto:



Si esta activo la vista algebraica, pueden ver que las áreas[5] de ambos son prácticamente iguales, e infieran que son congruentes porque además visualmente se perciben iguales.

Puede ser que ante esto alguno infiera que para determinar que dos triángulos sean congruentes se debe verificar uno de los criterios de congruencia y solo tiene información de un ángulo y de un lado de ambos triángulos. Y podría este supuesto alumno tentarse a decir que el tercer dato son que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son de igual medida, puede que se les ocurra encontrar la medida, si lo hicieran el *software* informaría que $|\overline{AB}|$=4,45 y que $|\overline{AC}|$=5,09 esto les mostraría que son víctimas de una ilusión óptica.

Si lo anterior fuera expuesto por un grupo en la puesta en común será conveniente que:

- Observen que si dos triángulos tienen la misma área esto no es suficiente para decir que son congruentes. Mostrando un contraejemplo.
- Que el triángulo ABC lo construyeron arbitrariamente por lo que podrían construir otro triángulo ABC de modo tal que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sean congruentes.
- E instalar en el grupo en caso que se haya dado *lo anterior,* ¿es posible hacer otra modificación que no sea alterar al triángulo ABC construido originalmente? Y ahí estaríamos frente a la consigna de la actividad 4.

Con lo dicho anteriormente llegamos a la conclusión de que la consigna pidiera la construcción de un triángulo isósceles sin indicar cuáles eran los lados congruentes

[5] Polígono2 y Polígono3.

5. CONCLUSIONES

Los que participamos en la elaboración de esta secuencia didáctica, tenemos distintas experiencias con respecto a llevar adelante propuestas didácticas, por un lado profesores con más de 20 años de experiencia, profesores noveles que tienen a lo más tres años de actividad docente y una alumna avanzada del Profesorado. Por lo que las discusiones fueron interesantes para formular las consignas de actividades que se realizaban con el software Geogebra. Más de una vez las posturas conservadoras en cuanto a cómo desarrollar las clases vinieron de los jóvenes integrantes del grupo.

Las actividades a realizar con el software son diferentes a la que figuran en los libros de texto, al tener la posibilidad de manipular la construcción, las preguntas que se pueden formular tienen que permitir al alumno buscar relaciones que se visualizan cuando se mueve alguna parte de la construcción, y que están ocultas cuando la imagen con la que se trabaja es estática.

Podemos adelantar que el trabajo de los alumnos alrededor de la validación de sus conjeturas fue fructífero y alentador para futuras implementaciones. Lo que nos alienta a seguir diseñando secuencias mediadas por un software, como puede ser el Geogebra, sin abandonar el quehacer propio de la matemática.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a los directivos de Poplars School, al profesor de Informática y a los alumnos de primer año que nos permitieron llevar a cabo la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta G., M. (2004) La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. Comunicación presentada en el Primer Congreso de la TAD.

Acosta G., M., (2010) “Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio”. Revista Integración. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial e Santander. Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 173-189.

Arsac, G (1992) Initiation au raisonnment déductif au collège. Une suite de situations permettant l´appropriation des règles du dèbat mathèmatique. Presses Universitaires de Lyon I.R.E.M.

Arsac, G (1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. Petit x Nro. 37 pág. 5-33. I.R.E.M. de Grenoble.

Artigue, M (2011) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 6, Nro. 8, pág. 13-33. Costa Rica

Artigue M, Douady R, Moreno L (1995); Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá.

Balacheff, N (1987); Dévolution d´un problème et construction d´une conjecture. Le cas de “La somme des angles d´un triangle”. Les cahiers de didactique. Num.39. IREM de Paris7.

Brousseau G.(1993); Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana.

Ciccala, R y otros (2012); Geogebra entra al aula de matemática. Editorial Miños y Dávilas, Buenos Aires.

Fortuny J, Iranzo N. (2009); La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Revista Enseñanza de las Ciencias, 27(3), pág. 433–446.