

Principios básicos de divisibilidad a través de la resolución de problemas

Luis Fernando Ramírez Oviedo

Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

lramirez@uned.ac.cr

Eric Padilla Mora

Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

epadilla@uned.ac.cr

Resumen. Este taller pretende fortalecer la formación profesional de la persona docentes de I y de II ciclo de la educación costarricense respecto al tema divisibilidad. Para ello se trabajará a través de la estrategia de resolución de problemas los principios básicos de divisibilidad aplicados en diversos contextos. Se espera que los participantes además del fortalecimiento del conocimiento en el área de la Matemática también puedan apropiarse de diversas estrategias didácticas que puedan implementar en las aulas.

Palabras clave. Didáctica, divisibilidad, resolución de problemas, formación continua, teoría de números.

1. Introducción

Se parte de la idea que el conocimiento no es acabado ni estático, para afirmar que ninguna formación profesional es completa, sino más bien que está en continuo perfeccionamiento y especialización; por lo que la actualización y profundización del conocimiento tiene un rol fundamental para la mejora de la calidad, especialmente en el ámbito educativo.

El docente como uno de los actores del proceso de enseñanza y en su rol de gestor de las actividades de mediación tiene una tarea trascendental, la cual debe estar amparada en una formación académica de calidad. Si bien, la posición de los investigadores es muy variada respecto a cuánto contenido debe conocer un docente del área específica, para Ball et al. (2008, citado por Torres, E., 2015) el enseñar disciplinas como la Matemática requiere que el profesor cuente con los conocimientos sólidos del tema que está enseñando, esto le permitirá ayudar a los estudiantes a comprender el tema más allá del soporte didáctico que disponga. Si los profesores no disponen de un conocimiento de la materia que enseñan tendrán menos posibilidades de poder ayudar a los estudiantes a aprender un determinado concepto. Además, señalan que

Sin embargo, conocer solo los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar. Aunque los puros conocimientos matemáticos favorecen la ayuda que pueda dar el profesor a los alumnos para comprender las Matemáticas, no son suficientes, puesto que no garantizan que el profesor pueda dar sentido matemático al trabajo de los estudiantes o disponer de diversas representaciones que le permitan representar el concepto de forma que los estudiantes lo puedan entender. (p. 16)

Por su parte, en los trabajos desarrollados por Shulman se proponen siete categorías de conocimiento que posibilitan la enseñanza, la cuales son:

- conocimiento del contenido;

- conocimiento didáctico general: teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- conocimiento del currículo: con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente.
- conocimiento didáctico de contenido: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- conocimiento de los estudiantes y sus características;
- conocimiento de los contextos educativos: que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. (Shulman, 2005, p. 11).

Ante el objetivo de fortalecer la formación profesional en docentes de I y de II ciclo de la educación costarricense, respecto al tema divisibilidad y la resolución de problemas, en este taller el enfoque estará centrado en dos de las categorías propuestas por Shulman: el conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico de contenido, específicamente en el tema relacionado con divisibilidad, el cual se presenta de forma explícita en los Programas de Estudio de Matemática, desde el segundo ciclo de la educación general básica del Ministerio de Educación Pública (MEP) costarricense, al plantearse el desarrollo de las siguientes habilidades.

Para quinto año.

- Identificar divisores de un número natural.
- Deducir las reglas de divisibilidad del 2, 3, 5 y 10.
- Establecer si un número natural es divisible por 2, 3, 5 o 10, aplicando las reglas de divisibilidad. (MEP, 2012, p. 182)

Para sexto año.

- Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas.
- Identificar números primos y compuestos.
- Representar productos con factores iguales como potencia y viceversa.
- Calcular potencias cuya base y exponente sean números naturales no iguales a cero simultáneamente.
- Identificar cuadrados y cubos perfectos de números naturales. (MEP, 2012, p. 187-188)

Además, de acuerdo con dichos programas, el desarrollo de estas habilidades deberá tener como estrategia metodológica principal la resolución de problemas, donde la contextualización activa será un componente pedagógico especial. Además, se indica

Se debe buscar el desarrollo de actitudes y creencias positivas hacia la disciplina de la Matemática, y el desarrollo del gusto por las matemáticas, para ellos se plantean cinco actitudes

a desarrollar: perseverancia, confianza en la utilidad de las Matemáticas, participación activa y colaborativa, autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas y respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. (MEP, 2012, pp. 11-12)

Del mismo modo, se plantea que todo debe trabajarse a partir de cinco procesos centrales, los cuales son: *razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar*. De ellos, y para efectos del trabajo en este taller, se orientará en los siguientes procesos:

- *Razonar y argumentar*

Esto porque en el desarrollo de las actividades se busca el desarrollo del pensamiento matemático, a partir de acciones que propicien la deducción, inducción, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos.

Asimismo, el proceso se orientará de manera tal que se permita

la comprensión de lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes. (MEP, 2012, p. 24)

- *Plantear y resolver problemas*

Esto a partir de estrategias que refieren al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos, los cuales considerarán contextos de cotidianidad, así como los propios del área de la Matemática, considerando que el usar problemas extraídos de la realidad, o que se puedan imaginar como reales, promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas, tal como se propone al señalar que

Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas.

El énfasis que se desea dar a los contextos reales también impulsa una asociación con el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa (MEP, 2012, p. 25).

- *Comunicar*

Esto a partir de procesos de discusión entre los participantes, con el objetivo de fortalecer aspectos relacionados con la expresión y comunicación oral y escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos. Esto dado que, a veces, la presencia de simbolizaciones en las Matemáticas hace pensar que no es relevante la comunicación verbal y escrita. Sin embargo, es todo lo contrario, dado que es un proceso central para la generación de la competencia matemática, pues permite esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil activa.

Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados, así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas. (MEP, 2012, p. 25)

2. Forma de trabajo y estrategias metodológicas

El trabajo que se ha propuesto para este taller tendrá como referente lo establecido anteriormente, por lo que será necesaria la disposición, la participación y la colaboración de cada uno de los asistentes para el logro de los objetivos en las actividades planteadas.

Se brindará tiempo para aportar soluciones o estrategias y luego se solicitará que las comuniquen. Lo anterior contribuirá en diversificar las destrezas que podrían emplearse ante la resolución de una situación problema. Al hacer esto, se realiza el proceso de comunicar y en esa contrastación, se ponen en juego otras actividades asociadas a procesos (razonar y argumentar), tal y como lo propone en el MEP en los programas de estudio.

3. Actividades del taller

I Parte

Los participantes de forma individual deberán resolver los siguientes tres problemas, estos les servirán a los expositores como diagnóstico, así como para realizar la introducción al taller.

Tiempo estimado: 15 minutos

Situación problema 1. En cierta actividad de clase, en la cual hay 30 estudiantes, estos deben organizarse en grupos de manera que cada uno de los grupos tenga la misma cantidad de miembros, sin que sobren ni falten. Con base en dicha información determine: ¿cuántos grupos se pueden hacer?, ¿cuántos estudiantes podrían estar en cada grupo?

Situación problema 2. Considere el número 4 620.

- Determine todos los factores primos de dicho número.
- Determine la descomposición prima de dicho número.
- Establezca una estrategia que permita determinar todos los divisores positivos de dicho número.

Situación problema 3. Si el número 1 234 48k es divisible por tres, y se sabe que “k” es el dígito de las unidades. Determine el o los posibles valores para “k”.

Finalizado el proceso de resolución, se realizará un repaso de las reglas de divisibilidad, de algunas de sus propiedades y de los conceptos matemáticos presentes en cada uno de los problemas iniciales.

Además, los participantes podrán comentar las estrategias de solución empleadas en cada uno de los ejercicios. Así como los aciertos y los desaciertos en el proceso

También, se realizará la demostración formal de las reglas de divisibilidad por 2 y por 5.

Tiempo estimado: 20 minutos

II Parte

Los participantes realizarán grupos de máximo 3 personas con el fin de resolver las siguientes situaciones problemas. Los expositores guiarán el proceso y al final cada grupo deberá elegir uno de los problemas para exponer y compartir su estrategia de solución.

Tiempo estimado: 50 minutos

Situación problema 4. Empaque de botellas.

Si se tienen 48 botellas que han sido llenadas con agua y se deben empaquetar en cajas, pero en cada una deberá haber más de dos unidades y todas las cajas deberán tener la misma cantidad sin que sobren ni falten botellas. Con base en dicha información



- Determine cuáles serían las posibles formas de empaquetar dichas botellas y cuántas cajas se necesitarían para cada caso.
- Determine cuál es la menor cantidad de cajas que se podrían requerir para empaquetar las botellas y cuántas botellas se colocarían en cada una de ellas.

Además, determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Situación problema 5. Colocación de matas de china.

En un vivero se compraron 149 matas de chinas de diversos colores y se desean colocar en un solo grupo por medio de filas o hileras. Si se requiere que por fila o hilera no sobren ni falten plantas, ¿de cuántas formas se podrían colocar dichas plantas?



Determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Y si fueran 148 plantas de china, ¿de cuántas formas distintas se podrán colocar?, ¿en qué aspecto cambia el razonamiento?

Situación problema 6. Los chocolates.

Tengo cierta cantidad de chocolates. Si los coloco en cajas de 10 no sobra ninguno y si los coloco en cajas de 8, tampoco sobra ninguno. ¿Cuántos chocolates podré tener?



Además, determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Situación problema 7. Un número divisible por tres.

Un número de la forma $aa682$, con “a” dígito, es divisible por tres. Determine el o los posibles valores para “a”.

Determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Situación problema 8. Un número divisible por seis.

¿Cuántos posibles números de la forma $72a3b$ son divisibles por 6? Si se sabe que “a” y “b” los dígitos de las centenas y de las unidades, respectivamente.

De igual modo, determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Situación problema 9. El menor número.

¿Cuál es el menor número de 4 cifras que es divisible por 2, por 3 y por 5, simultáneamente?

También, determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

Situación problema 10. Cantidad de múltiplo menores que cierto número.

- Determine cuántos números son menores o iguales que 20 y son múltiplos de 3.
- Determine cuántos números son menores o iguales que 80 y son múltiplos de 5.
- Diseñe una estrategia que permita determinar la cantidad de múltiplos de “a” que son menores o iguales que cierto número “n” siendo $a \leq n$.

Situación problema 11. Error en fotocopiadora.⁷

Por un error en una fotocopiadora, en un libro de 1 000 páginas se dejaron en blanco todas las que sus números de página eran múltiplos de 5 o de 7, determine cuántas páginas se fotocopiaron correctamente.

De la misma manera, determine cuántas páginas se fotocopiaron correctamente, si el libro tiene diez mil páginas.

⁷ Este ejercicio fue modificado con base en el presentado en el ítem 18 de I Eliminatoria, I nivel 2014 de Olimpiada Costarricense de Matemática y que se plantea en el documento material de apoyo Teoría de Números, I nivel, I eliminatoria.

Situación problema 12. Divisores de un número y su suma.

Determine todos los divisores positivos de 496. Además, calcule la suma de todos estos divisores, exceptuando el 496. ¿Qué resultado obtiene?, ¿sabe cómo se le llama a este tipo de números?

Además, determine cuáles conceptos matemáticos están presentes en la solución de esta situación problema.

También, determine el resultado de: $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$.

Situación problema 13. Cuadrados perfectos.

Considere lo siguiente:

Un número cuadrado perfecto es el que se obtiene al multiplicar un número natural por sí mismo. Por ejemplo, 36 es un cuadrado perfecto porque $6 \cdot 6 = 36$.

Según lo anterior, ¿cuál es el número cuadrado perfecto de 4 dígitos que es divisible por 2, 5 y 7?, ¿existirá alguno de tres dígitos que sea divisible por 2, 5 y 7? Justifique su respuesta.

Situación problema 14. Números primos.⁸

Si se sabe que la suma de tres números primos menores que 100 es 100. Determine dichos números.

Situación problema 15. ¿Por qué número multiplicaría?

Dada la expresión $2^2 \cdot 5^4$ ¿Por cuál habría que multiplicarla para obtener la cantidad de un millón?

Referencias bibliográficas

Artacho, A. (2019). *Criterios de divisibilidad*. <https://matematicascercanas.com/2019/07/29/criterios-de-divisibilidad/>

Ibáñez, R. (2020). *Las curiosas reglas de divisibilidad*. <https://culturacientifica.com/2020/07/15/las-curiosas-reglas-de-divisibilidad/>

Junta de Extremadura. Consejería de Educación y empleo, (2011). *Divisibilidad*. https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/Divisibilidad_ProblemasCotidianos.pdf

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. <http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2019). *Cuadernillos de apoyo Olimpiada de Matemática Primaria*. <https://www.drea.co.cr/matematica/cuadernillos-de-apoyo-olimpiada-de-matem%C3%A1tica-primaria>

⁸ Este ejercicio fue modificado con base en el presentado en el ítem 16. I Eliminatoria, I nivel 2015 Olimpiada Costarricense de Matemática y que se plantea en el documento material de apoyo Teoría de Números, I nivel, I eliminatoria.

- Olimpiada Costarricense de Matemática. (2016). *Teoría de números, I nivel, I eliminatoria*.
<https://olcoma.ac.cr/media/attachments/2021/09/29/n1teo.pdf>
- Padilla, E. (2016). *Material complementario para séptimo año. Proyecto: fortalecimiento del Aprendizaje de la Matemática y su aplicación en la resolución de problemas y actividades de la vida cotidiana* [Material no publicado]. UNED.
- Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona].
<https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/290741/etm1de1.pdf?sequence=1>
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2). 1-30.
<https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>