NIVELES DE GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE CUARTO DE PRIMARIA DURANTE UNA SESIÓN DE CLASE

Generalizations in fourth grade students during a classroom session

Narváez, R.[a], Brizuela, B. M.[b], Torres, M. D.[a] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Tufts

Resumen

Este estudio forma parte de una investigación más amplia centrada en explorar el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria y aborda los niveles de generalización de 22 estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) cuando trabajan con una tarea que incluye una relación funcional (y=2x). Identificamos los distintos niveles de generalización evidenciados durante una sesión de clase. En esta sesión, los estudiantes participaron activamente, respondiendo a distintos casos con cantidades cercanas, lejanas e indeterminadas. Encontramos que los estudiantes utilizaron distintos niveles de generalización, desde el recursivo particular hasta el funcional particular emergente, según las categorías previamente establecidas. Además, identificamos que estos niveles de generalización estuvieron asociados al momento de la clase y al caso presentado.

Palabras clave: *generalización, niveles de generalización, pensamiento funcional.*

Abstract

This study is part of a broader research project focused on studying the functional thinking of elementary school students and addresses generalization among 22 fourth grade students (9-10 years old) when working on a task that includes a functional relationship (y=2x). We identified different levels of generalization among the students during a class session. In this session, students participated actively, responding to different cases with close, distant, and indeterminate quantities. We found that students used different levels of generalization, from particular recursive to particular emergent functional, according to previously established categories. In addition, we identified that these levels of generalization were associated with the moment of the class and the case presented.

Keywords: *functional thinking, generalization, levels of generalization.*

INTRODUCCIÓN

El interés por la investigación en torno al pensamiento algebraico sigue tomando terreno en la literatura actual (Pinnock, 2020; Ventura et al., 2021). Específicamente, la generalización, que es nuestro foco en este estudio, sigue abordándose y está presente en distintos estudios que forman parte de las actas de los últimos simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM) (p. ej., Anglada y Cañadas, 2021; Pinto y Cañadas, 2017; Polo-Blanco y Goni-Cervera, 2019; Torres et al., 2018).

En el ámbito del pensamiento algebraico, la generalización es un proceso clave en la investigación con los primeros cursos (Mason et al., 1985) siendo considerada como una práctica algebraica (p. ej., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas y Castro, 2007). Nos centramos aquí en un enfoque funcional al

Narváez, R., Brizuela, B. M., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2022). Niveles de generalización entre estudiantes de cuarto de primaria durante una sesión de clases. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 411-419). SEIEM.

pensamiento algebraico considerado como una opción para abordar la enseñanza del álgebra a través de la generalización y la representación de relaciones entre cantidades covariantes, así como el razonamiento con estas (Blanton y Kaput, 2011; Blanton et al., 2011).

Actualmente el currículo español de educación primaria incluye el sentido algebraico, destacando en los contextos funcionales los saberes conectados con las relaciones y las funciones (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Esto justifica desde el punto de vista curricular, la necesidad de trabajar nociones algebraicas, como la generalización, en este nivel educativo.

En este estudio nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo generalizan los estudiantes de cuarto de primaria la relación funcional implicada? ¿Qué asociaciones existen entre las formas de generalizar y momentos determinados de una sesión de clase y los tipos de casos (números cercanos, lejanos y cantidades indeterminadas) planteados? Nuestro problema de investigación gira en torno a caracterizar los niveles de generalización que utilizan estudiantes de cuarto de primaria al trabajar en tareas que involucran el reconocimiento de una relación funcional. Entendemos por niveles como estados mentales a través de los cuales los estudiantes se mueven bidireccionalmente a medida que avanzan en su aprendizaje (Clements y Sarama, 2014).

El objetivo que nos planteamos es identificar los niveles de generalización evidenciados por los estudiantes según el momento de la clase, según la sesión diseñada y según los casos presentados (casos cercanos, lejanos e indeterminados) durante el desarrollo de la sesión.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La generalización es una actividad en la que las personas en contextos sociomatemáticos específicos identifican lo que es común para todos los casos, extendiendo su razonamiento más allá del ámbito en el que se originó u obtienen resultados más amplios a partir de casos particulares (Ellis, 2011). La generalización, su representación, el sentido de variabilidad y la relación que se puede establecer entre variables destacan en la literatura de investigación como elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Kaput, 2008; Kieran et al., 2016; Radford, 2018). Este enfoque funcional es una vía curricular para el desarrollo de la capacidad de generalización en los estudiantes (Blanton y Kaput, 2011). En este enfoque, asumimos que la generalización hace referencia a las diferentes maneras que tienen los estudiantes de expresar una relación funcional que involucra dos cantidades que covarían (Pinto y Cañadas, 2017). En los primeros cursos, la generalización puede ser expresada de diferentes formas, transitando desde el uso del lenguaje verbal hasta llegar a emplear elementos más simbólicos (Radford, 2002). La generalización es considerada como una construcción cognitiva individual. Esto ha ayudado a distinguir diferentes tipos de generalización e identificar las competencias y dificultades que los estudiantes presentan para generalizar (Ellis, 2011). Específicamente en el estudio sobre generalización, son varios los autores que han profundizado en la sofisticación de la expresión de la generalidad con estudiantes en edades tempranas (Radford 2018; Ureña et al., 2019).

En concreto, en este estudio destacamos el trabajo de Blanton et al. (2015), por desarrollarse con estudiantes de los primeros cursos de primaria, y por referirse a tareas en contextos cercanos a los estudiantes, similares a los que empleamos aquí. Los autores identificaron y caracterizaron niveles de sofisticación de la generalización sobre las relaciones funcionales con niños de seis años. Estos niveles son: (a) preestructural, los estudiantes no describen ni utilizan implícitamente ningún tipo de relación matemática al hablar sobre los datos del problema; (b) recursivo particular, conceptualizan un patrón recursivo como una secuencia de instancias particulares; (c) recursivo general, conceptualizan un patrón recursivo como una regla generalizada entre valores sucesivos arbitrarios sin referencia a instancias particulares; (d) funcional particular, conceptualizan una relación funcional como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos; (e) funcional primitivo general, conceptualizan una relación general entre dos cantidades a través de un conjunto de casos, con representaciones primitivas; (f) funcional general emergente, reflejan la aparición de atributos clave de una relación funcional generalizada, aunque su representación de la relación es incompleta; (g) funcional general condensado, conceptualizan las funciones como una relación generalizada entre dos cantidades arbitrarias y señaladas explícitamente; y (h) función como objeto, el estudiante sabe que generalizar implica comprender lo que se conserva y lo que se pierde entre las estructuras específicas que tienen algún isomorfismo. Para este estudio utilizaremos las categorías de estos autores para describir los niveles de generalización evidenciados a lo largo de una sesión de clase por un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años).

METODOLOGÍA

Llevamos a cabo una investigación cualitativa de carácter explicativo cuyo objetivo era explicar cómo ocurre una situación (generalización) y en qué condiciones (Hernández et al., 2014).

La sesión que analizamos en este estudio forma parte de un experimento de enseñanza con un total de cinco sesiones, en las que planteamos tareas con diferentes contextos y funciones lineales. Nos centramos específicamente en la sesión que trabajaba la relación funcional $y=2x$. Esta fue precedida por sesiones donde implicamos las funciones $y= 2x+1$; $y= x+3$. Elegimos analizar la sesión $y=2x$ por representar solamente una estructura multiplicativa no trabajada previamente por ellos.

Participantes y centro escolar

Los participantes de este estudio fueron un grupo de 22 estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) de un colegio concertado de niveles socio-económico y cultural bajos en el sur de España. La selección del centro educativo y de los estudiantes fue intencional, según la disposición del centro y los docentes. Los estudiantes habían trabajado con numeración hasta el millón, además de las operaciones básicas (sumas, restas, multiplicación y división). Los estudiantes no habían recibido instrucción previa sobre generalización.

Un investigador del proyecto estuvo a cargo de la sesión de clase. Su rol fue de investigador- docente, quien introdujo la tarea planteada y guio el desarrollo de la sesión. Otros miembros del proyecto estaban presentes, tanto para grabar la sesión como para apoyar su desarrollo.

Sesión de trabajo

La sesión de trabajo tuvo una duración de una hora aproximadamente. La disposición habitual de los asientos en el aula era en grupos de 4-5 miembros, lo cual se mantuvo para esta sesión. Esto permitió que, al momento de grabar la sesión, se pudiera tener una visión completa de los participantes.

La sesión se desarrolló en tres momentos:

- Momento inicial de la clase: El docente investigador introdujo la tarea. “Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta algunas mesas formando una fila y coloca una caja a cada lado de la mesa” (ver figura 1).

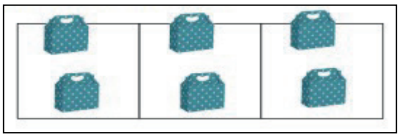

Figura 1. Representación pictórica de la tarea propuesta.

- Momento central de la clase: Se trabajó con casos particulares con cantidades cercanas (menores a 50), aquellas que se pueden encontrar por conteo (p. ej., Torres et al., 2021). En este momento de la clase los estudiantes resolvieron distintas situaciones sobre la cantidad de cajas o de mesas que había para cada caso. Durante la sesión la investigadora docente realizó preguntas como, por ejemplo: "¿Cuándo tengo dos mesas?" o "¿Cuántas cajas tendré?".
- Momento final de la clase: Se realizó una revisión de los casos trabajados durante los momentos anteriores de la sesión (casos cercanos), se trabajó con cantidades lejanas (hasta 500.000.000) y con cantidades indeterminadas ("cualquier número"), incrementando así el rango numérico de las situaciones. Un ejemplo de esta situación lo presentamos: "qué me decías cuando calculábamos este número 500.000.000 o cualquiera de los que está aquí, ¿qué teníamos que hacer para llegar al número de cajas? ¿alguien me podría explicar eso? ¿yo les puedo decir cualquiera de estos números?".

Análisis de datos

Para la obtención de datos, la sesión fue videograbada y transcrita. Para este trabajo analizamos las expresiones orales de los estudiantes que tuvieron lugar durante el desarrollo de la sesión de trabajo, cuando respondían a los distintos casos presentados durante la sesión. Con esa información identificamos las generalizaciones evidenciadas por los estudiantes. Utilizamos las categorías de análisis de Blanton et al. (2015) para analizar en qué niveles se encontraba cada generalización observada. Estos niveles de sofisticación son graduales, que van desde no generalizar (preestructural) hasta hacerlo de forma funcional. Las categorías aparecen en la figura 2.

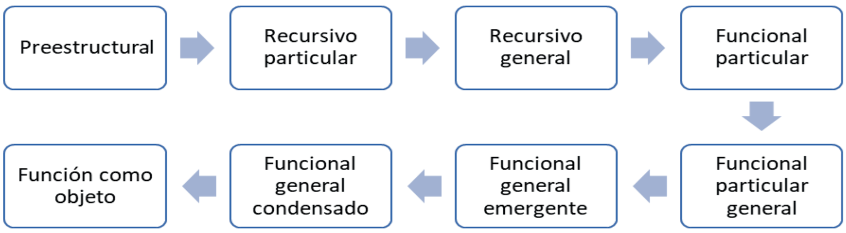

Figura 2. Categorías de generalización.

RESULTADOS

Niveles de generalización

En la figura 3 mostramos los distintos niveles de generalización durante el desarrollo de la sesión.

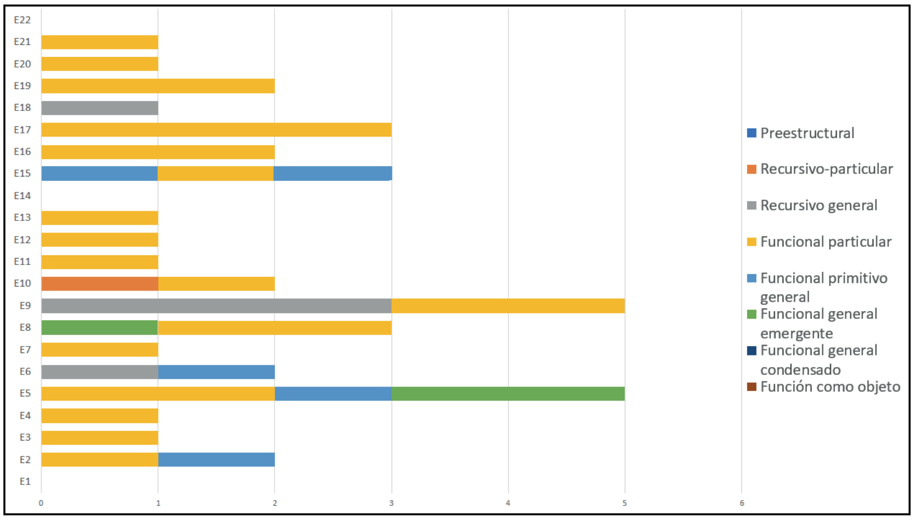

Figura 3. Número y tipo de generalizaciones por estudiantes en orden de uso durante el desarrollo de la sesión.

En la figura 3 observamos que de los 22 estudiantes generalizaron 19 y tres no lo hicieron (E1, E14 y E22). Los que generalizaron lo hicieron en los niveles recursivo particular, recursivo general, funcional particular, funcional primitivo general y funcional general emergente. Los otros tres niveles de generalización no se evidenciaron durante esta sesión (preestructural, funcional general condensado y función como objeto). La cantidad total de generalizaciones evidenciadas por los estudiantes durante la sesión fueron 38. El nivel de generalización que más se evidenció fue funcional particular. Al expresarla, los estudiantes utilizaron frases como "porque he multiplicado las dos mesas por 6"; "Es que hay seis y le sumé otros seis y me salió 12", etc.

En la figura 3 también observamos que 12 estudiantes utilizaron el mismo nivel de generalización durante toda la sesión (E3, E4, E7, E11, E12, E13, E16, E17, E18, E19, E20 y E21). En el caso de E18 utilizó el nivel recursivo general y los otros once estudiantes utilizaron el nivel funcional particular.

En cuanto a los cambios en el nivel de generalización, siete estudiantes (E2, E5, E6, E8, E9, E10 y E15) avanzaron en el nivel de generalización, desde funcional particular hasta el funcional primitivo general. E6, E9 y E10 comenzaron generalizando en un nivel recursivo y avanzaron hacia los niveles funcional particular y funcional primitivo emergente. E2 y E5 empezaron generalizando dentro del nivel funcional particular y avanzaron hacia el funcional primitivo general. Además, E5 avanzó hacia el nivel funcional general emergente.

En el caso de E8 comenzó en un nivel más alto (funcional general emergente) y luego utilizó un tipo de generalización menos sofisticado, el funcional particular. Así también es el caso de E15 que comenzó generalizando en el nivel funcional primitivo general, después utilizó el funcional particular y por último nuevamente generalizó en el nivel funcional primitivo general.

Por último destacamos que solo dos estudiantes (E5 y E8) generalizaron en el nivel de funcional general emergente, nivel de sofisticación más alto identificado dentro de esta sesión.

Generalizaciones realizadas en los distintos momentos de la clase

Durante la realización de la sesión se observaron distintos tipos de generalización. En la figura 4 se observan los niveles de generalizaciones según el momento de la clase en el que se identifican.

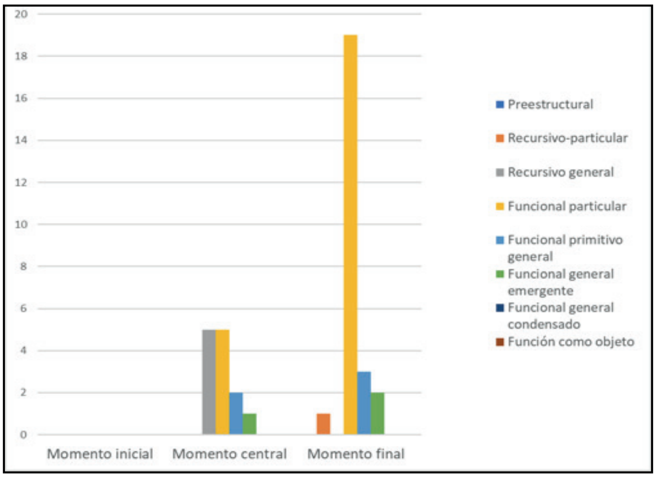

Figura 4. Generalizaciones evidenciadas en los distintos momentos de la clase.

En el momento inicial de la sesión no se evidenciaron generalizaciones; a diferencia del momento central y final de la sesión. En el momento central de la sesión, se dieron un total de 13 generalizaciones de las cuales cinco fueron recursivo general, cinco sobre funcional particular, dos funcional primitivo general y una de función general emergente. En el momento final de la sesión, momento donde más generalizaciones se realizaron, se dieron un total de 25, de las cuales una fue recursivo particular, 19 funcional particular, tres funcional primitivo general y dos funcional general emergente.

Generalizaciones evidenciadas según los casos presentados

Aquí nos referimos a los diferentes casos involucrados en las preguntas (cantidades cercanas, lejanas e indeterminadas). Destacamos que, en la mayor parte de esta sesión, se trabajó con cantidades cercanas. En el momento final, se trabajó con cantidades lejanas y cantidades indeterminadas. En la figura 5 detallamos la información obtenida, indicando los tipos y cantidad de generalizaciones por caso presentado durante la sesión.

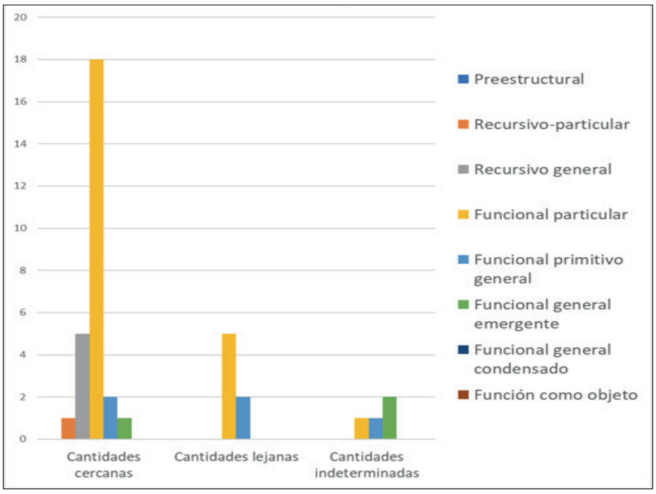

Figura 5. Generalizaciones evidenciadas según los casos presentados.

Evidenciamos que cuando se trabajó con cantidades cercanas hubo una mayor variedad de niveles de generalización, siendo el más evidenciado el nivel funcional particular. Respecto al uso de casos lejanos y casos indeterminados, permitió que los estudiantes generalizaran en niveles funcionales.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En primer lugar, destacamos que esto es una primera aproximación al problema de investigación planteado, sin pretensión de generalizar los resultados.

Hemos encontrado que los niveles de generalización no se presentan en un orden fijo: hay casos en los que los estudiantes avanzaron y otros donde retrocedieron una vez que habían expresado la generalización de una determinada forma. Con esto coincidimos con uno de los resultados obtenidos en el trabajo de Blanton et al. (2015), quienes describieron el caso de una estudiante cuyo pensamiento cambió bidireccionalmente entre niveles (a veces regresando a un nivel "anterior"). Esta situación se repitió con otros estudiantes. Los niveles de generalización se dieron en distintos momentos, respondiendo a diferentes preguntas sobre los casos presentados, como el nivel de participación que tuvo el estudiante durante el desarrollo de la sesión.

La mayoría de los estudiantes generalizaron de forma funcional particular. Esto puede deberse a que en la mayor parte de la sesión se trabajó con casos particulares. Este es un hallazgo destacable pues los niveles de sofisticación estudiados prevén dos formas de generalizar más simples (recursivo general y recursivo particular), los cuales fueron poco evidenciados durante toda la sesión. Con esto expresamos que este grupo de estudiantes tuvieron un nivel de generalización más funcional que uno recursivo. Con esto concordamos con lo expuesto en el trabajo de Blanton et al. (2015), quienes señalaron en sus resultados que los niños podían eludir el pensamiento recursivo y razonar sobre las relaciones funcionales.

Los dos niveles de generalización superiores (funcional general condensado y función como objeto) no se evidenciaron. Esto puede ser debido a que los estudiantes no habían recibido instrucción sobre generalización y simbolismo algebraico y, por tanto, tenían recursos limitados para expresar la generalización de forma más sofisticada.

En cuanto a la relación entre estos hallazgos y los momentos de la sesión y casos implicados, durante el momento inicial no se evidenciaron generalizaciones. En el momento central y final de la sesión sí se evidenciaron generalizaciones. En el momento central de la sesión se produjeron menos cantidad de generalizaciones en relación al momento final de la sesión. Esto puede deberse a que los estudiantes estuvieron familiarizándose con los casos particulares. En el momento final hay más cantidad de generalizaciones debido que en este momento de la clase revisaron los casos particulares trabajados y además discutieron sobre los casos lejanos e indeterminados.

Finalmente, encontramos que a los estudiantes parece resultarles más fácil generalizar a partir de preguntas con casos cercanos, donde identificamos una mayor cantidad de niveles de generalización. También, trabajar con casos lejanos e indeterminados permitió que los niveles de generalizaciones de los estudiantes fueran más sofisticados. En este sentido proponemos fomentar más el trabajo con casos lejanos e indeterminados como motor para llegar a esos niveles de generalización. Por lo mismo, consideramos relevante planificar las actividades planteadas para la clase, desde casos con cantidades que permitan familiarizarse con el problema y casos que los desafíe para llevar más allá ese conocimiento. Estas actividades deben ser graduales, teniendo en cuenta que deben ser facilitadoras para el aprendizaje. Como lo expresó Da Ponte et al. (2017), el desafío planteado debe ser armonioso (ni fácil ni difícil). Aquí observamos que comenzar con casos más cercanos desde el inicio ayudó a que los estudiantes adquirieran seguridad en la realización de la tarea y así continuarán con nuevos desafíos.

Finalizamos planteando algunas líneas abiertas a partir de este trabajo: (a) estudiar la interacción del docente con los estudiantes, ya que el investigador-docente motivó la participación de los estudiantes, actuando de mediador y guía en la generación de la generalización en diferentes niveles. ¿Qué ayudas o apoyos son necesarios para fomentar la generalización? y (b) estudiar en profundidad las diferentes justificaciones que dan los estudiantes en el proceso de generalización.

Agradecimientos

Proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de educación infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for research in mathematics education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). Learning trajectories: Foundations for effective, research-based education. En A. P. Maloney, J. Confrey y K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1-30). Information Age Publishing

Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). LEA. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258- 2

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Pinnock, E. (2021). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: the global evolution of and emerging field of research and practice. *Research in mathematics education, 23*(2), 226-230. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1725613

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Polo-Blanco, I. y Goni-Cervera, J. (2019). Estrategias de generalización cercana y lejana en niños de 6 y 7 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p.642). SEIEM.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *BOE, 52* (24.386- 24.504). https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-3296-consolidado.pdf

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*(10), 1109.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y aprendizaje, 42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62,* 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866