

 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación | 

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>
@uedUniandes

1

 Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación | 

La modelización matemática en el aula multigrado rural, el caso del levantamiento con cinta

Autores. Miguel Ángel Rodríguez Mejía, Avenilde Romo Vázquez

Instituto Politécnico Nacional (IPN)-Unidad CICATA-Legaria

11 de abril de 2023

2

PLAN DE LA PRESENTACIÓN

- Problemática.
- Preguntas de investigación.
- Marco teórico: elementos de la TAD
- Metodología: la ingeniería didáctica
- Análisis praxeológico del levantamiento con cinta.
- Diseño del REI: estimar el área del Llanito.
- Análisis de la implementación del REI.
- Reflexiones finales.

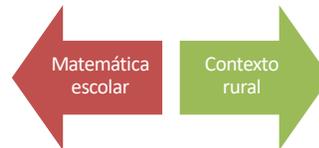
3

3

PROBLEMÁTICA QUE DIO ORIGEN A LA INVESTIGACIÓN

Modelo posprimaria.

Condiciones de enseñanza (referentes nacionales).



Comunidad campesina.

Siembra de fique y café.

Ausencia de la modelización matemática en la escuela rural multigrado, carencia de actividades integradoras.



4

4

ALGUNAS EXPERIENCIAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA RURAL

- Solares-Pineda, Solares y Padilla (2016).
 - De la Hoz (2020).
 - Ruiz-Rojas, Romo-Vázquez y Solares-Rojas, (2020).

➔

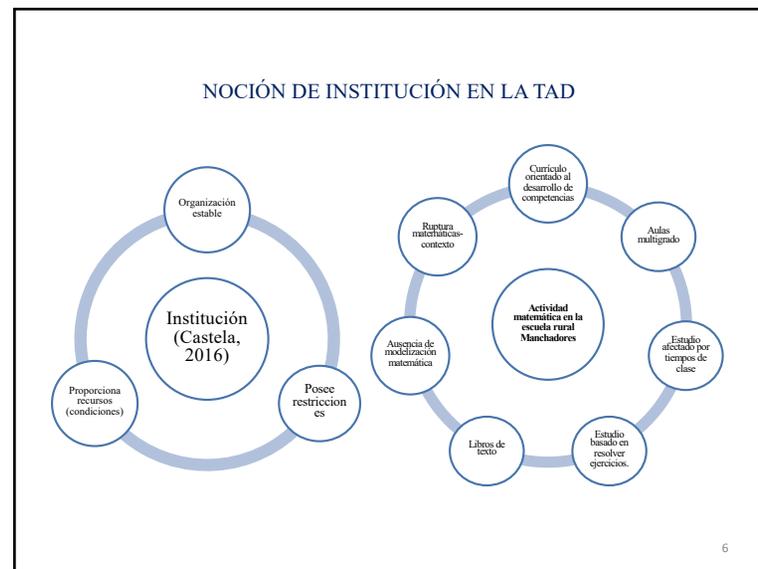
Estas experiencias comparten la propuesta de modelización matemática planteada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

⤵

Recorridos de estudio e investigación REI para posibilitar la modelización matemática.

5

5



6

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA TAD

Praxeología u organización matemática (OM) (Chevallard, 1999; Barquero, Bosch y Gascón, 2011):

Praxeologías mixtas (Castela y Romo, 2011; Diego-Mantecón et al., 2021):

MODELO

- Bloque práctico-Técnico [T, t]
- Bloque tecnológico-teórico [Θ, θ]

PRAXEOLÓGICO

- Tarea (T)
- Técnica (t)
- Tecnología (Θ)
- Teoría (θ)

$$\begin{bmatrix} T^u & t^m & \theta^m & \theta^m \\ T^u & t^u & \theta^u & \theta^u \end{bmatrix} \leftarrow E(M)$$

$$\leftarrow U$$

La modelización se entiende como “reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente” (Sala, Barquero, Font, 2020, p. 550).

7

7

LOS REI COMO DISPOSITIVOS PARA INTEGRAR LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA

Surge de una cuestión generatriz Q0 poderosa, capaz de provocar un estudio profundo de diversas praxeologías y de nuevas cuestiones con la finalidad de construir una respuesta R♥ que satisfaga a la comunidad de estudio.

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow M = \{C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, R_1^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}] \text{ R } \heartsuit$$

Llevar la investigación al aula implica ciertas condiciones en la organización didáctica (OD) reflejadas en las funciones mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. Se manifiestan mediante dialécticas: cuestiones y respuestas, media-medio.



8

8

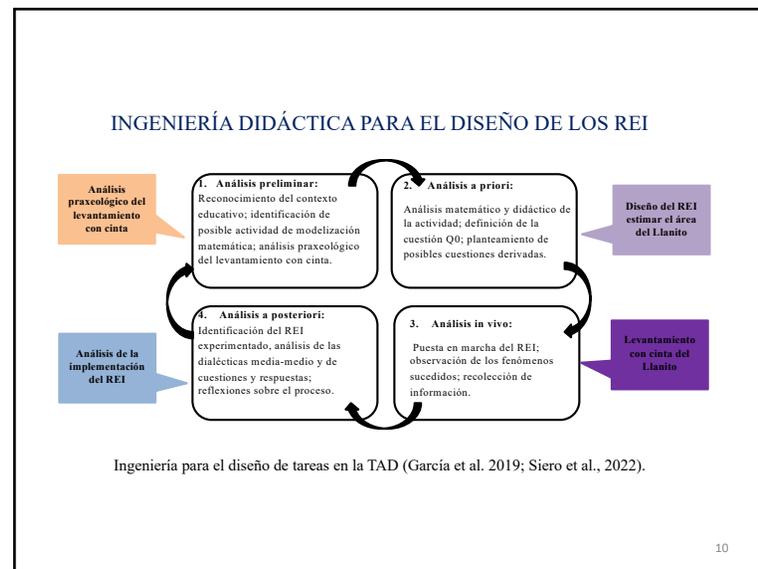
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo la modelización matemática a través de los REI permite establecer vínculos entre el entorno sociocultural, las matemáticas y el aula multigrado rural?
- ¿Qué condiciones y restricciones surgen durante la implementación de un REI en la secundaria rural multigrado?
- ¿Cuáles condiciones y adaptaciones son necesarias para que pueda darse la modelización matemática a través de la enseñanza basada en REI en la secundaria rural multigrado?

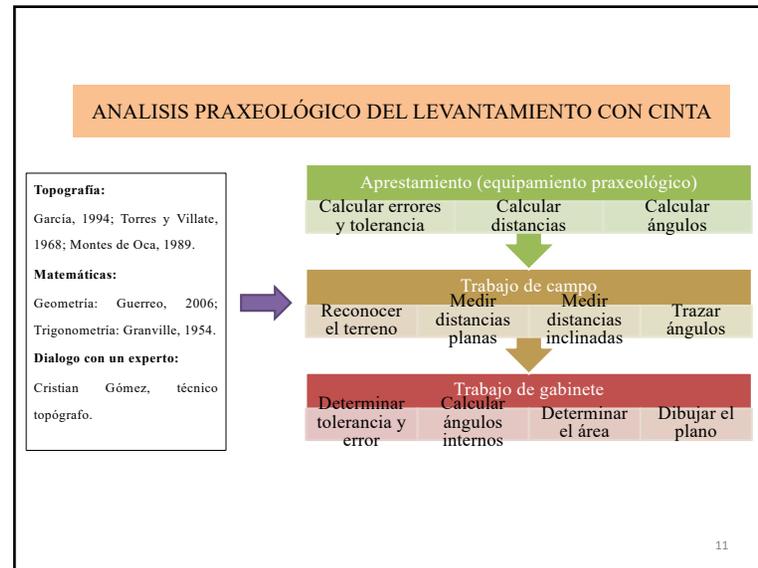


9

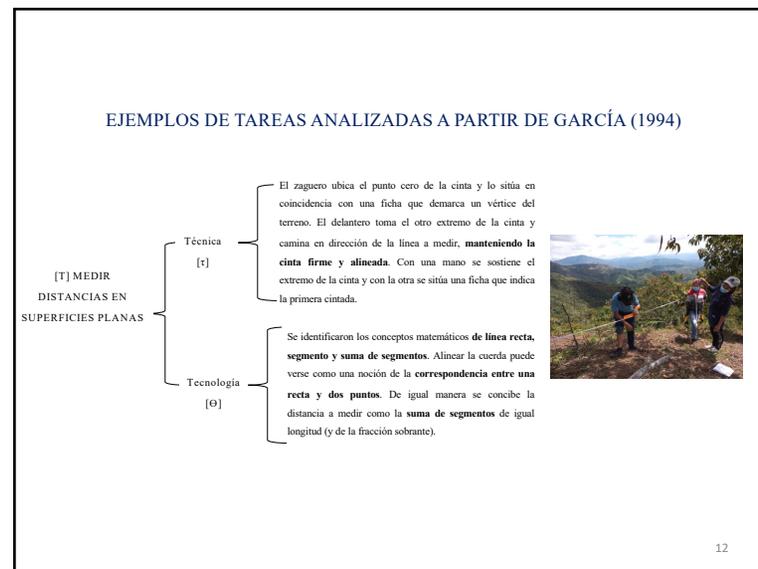
9



10



11



12

EJEMPLOS DE TAREAS ANALIZADAS A PARTIR DE GARCÍA (1994)

[T] MEDIR DISTANCIAS EN SUPERFICIES INCLINADAS

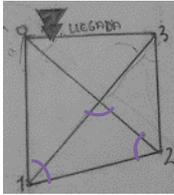
Técnica [τ]	<p>En la medida descendente, a partir del punto más alto el zaguero ubica la cinta en el suelo y a su vez el delantero mantiene la cinta totalmente horizontal y tensionada.</p> <p>En terreno ascendente el zaguero levanta la cinta y la mantiene a lo largo de la plomada mientras el delantero avanza hasta hacer contacto con el suelo.</p>	
Tecnología [θ]	<p>Se encontraron ideas asociadas a las rectas perpendiculares y al ángulo recto. Se realiza una proyección plana de la medida basándose en la noción del segmento como la suma de sub-segmentos. La noción de horizontalidad se fundamenta en la perpendicularidad entre la plomada y la cinta métrica, asumiendo que estas son perpendiculares si el ángulo entre ellas es lo más cercano a los 90°.</p>	

13

13

EJEMPLOS DE TAREAS ANALIZADAS A PARTIR DE GRANVILLE (1954)

[T] CALCULAR ÁNGULOS INTERNOS

Técnica [τ]	$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$ $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$	
Tecnología [θ]	<p>Se identifica un caso de resolución de triángulos oblicuángulos a partir de la medida de sus lados mediante el empleo de la tangente del ángulo medio del triángulo como en Granville (1954).</p>	

14

14

EJEMPLOS DE TAREAS ANALIZADAS EN GARCIA (1994) Y TORRES Y VILLATE (1968)

[T] DIBUJAR EL PLANO DEL TERRENO

- Técnica [t]
 - Definición de la escala y trazo del dibujo. Puede emplearse una escala numérica o gráfica, una vez se establezca la relación a utilizar se procede a proyectar el terreno.
- Tecnología [o]
 - Está en uso una idea intuitiva de la proporcionalidad entre cantidades y segmentos, así como la semejanza de polígonos. Debe existir una razón de semejanza entre el terreno y el plano, para que este último sea una representación válida del predio.

15

15

IDENTIFICACIÓN DEL PREDIO A LEVANTAR

Lote propiedad de don Nilson Muñoz.

Destinado a la siembra de café.

Predio ubicado cerca a la escuela rural Manchadores.

Terreno de poca extensión, con todos sus vértices visibles.

La familia requería el área del lote.

16

16

DISEÑO DEL REI ESTIMAR EL ÁREA DEL LLANITO

Q0: ¿Cuál es la mayor superficie de área cultivable de un terreno ubicado en la finca "El Llanito" propiedad de don Nilson Muñoz?

APRESTAMIENTO

Q _{1.1} ¿Cómo medir las distancias los lados del terreno?	Q _{1.1.1} ¿Qué hacer si la distancia está sobre una superficie en pendiente?
Q _{1.2} ¿Cómo medir ángulos en el terreno?	Q _{1.2.1} ¿Qué se necesita para medir los ángulos?
Q _{1.3} ¿Cómo medir los lados que son curvas o irregulares?	Q _{1.3.1} ¿Cómo trazar perpendiculares en el terreno?

17

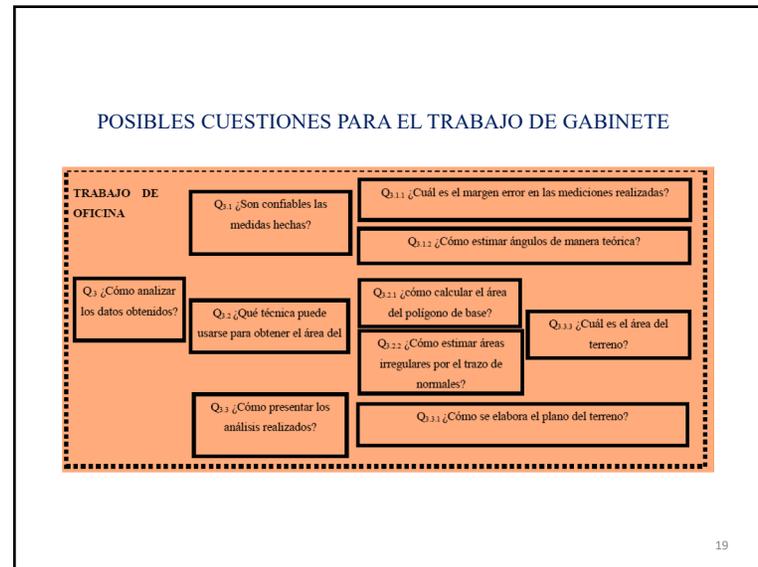
17

POSIBLES CUESTIONES PARA EL TRABAJO DE CAMPO

TRABAJO DE CAMPO	Q _{2.1} ¿Qué datos deben recolectarse si el terreno tiene forma regular?	Q _{2.1.1} ¿Cómo estimar el perímetro del polígono base?
Q ₂ ¿Qué forma tiene el terreno y cuáles son sus características?	Q _{2.2} ¿Qué datos deben recolectarse si el terreno no parece un polígono?	Q _{2.2.1} ¿Cómo emplear el trazo de detalles por normales?
	Q _{2.3} ¿Cómo diligenciar la cartera de campo?	

18

18



19

CONDICIONES DE IMPLEMENTACIÓN DEL REI ESTIMAR EL ÁREA DEL LLANITO

Recursos materiales	Recursos organizativos	Recursos humanos
<ul style="list-style-type: none"> Acceso al Llanito (4 visitas). Folder con obras de consulta (topografía y matemáticas). Disposición de materiales para la toma de medidas: metro, plomada, nivel. Uso del software Geogebra para la construcción del plano. Construcción de libreta de campo para recolectar información sobre medidas. 	<ul style="list-style-type: none"> 16 participantes: 4 de grado octavo y 12 de grado noveno. Acuerdo con otros docentes para el uso de sus clases. Dedicación de 60 horas: 10 jornadas completas de 6 horas. 3 jornadas de aprestamiento, 3 jornadas de trabajo de campo y 4 jornadas de trabajo de gabinete (1 de socialización). Ajuste del plan de estudios. Trabajo en equipos de a 3 integrantes. Distribución de roles para realizar las medidas. Desarrollo en 3 momentos: aprestamiento, trabajo de campo y trabajo de gabinete. 	<ul style="list-style-type: none"> Equipamiento de problemas técnicos de Uso de software para calcular el área Tiempo de selección de media de Espacios de ideas. Construcción de

20

20

Solución presentada en García (1994, p.14):

- Datos:
- L1= 150.04 m; L2= 150.08 m
- Terreno quebrado
- l= 50 m
- L= valor más probable de la distancia medida = ?
- E= error = ?; T= tolerancia = ?

Solución:

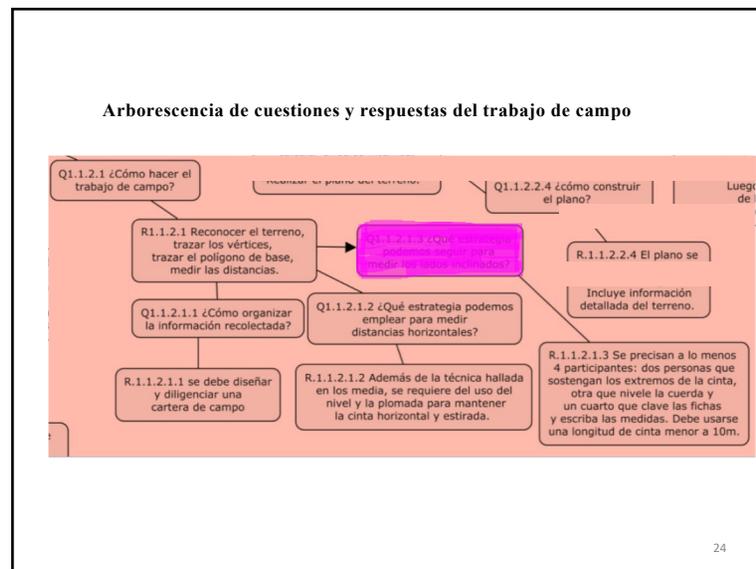
- Designemos por L el valor más probable
- $L = (L_1 + L_2) / 2 = 150.06$ m
- $E = L_1 - L = 150.04 - 150.06 = -0.02$
- $E = L_2 - L = 150.08 - 150.06 = +0.02$
- $E = \pm 0.02$ m
- $T = 2e \cdot \sqrt{(2L/l)} = 2(0.02) \cdot \sqrt{(2(150.06)/50)} = \pm 0.06$
- $T = \pm 0.15$ m

Solución planteada por el equipo 2.

Los equipos no tuvieron acceso a las soluciones del libro. El problema permitió ver que de la relación entre T y E podría determinar si una medida era o no aceptable.

23

23



24

Q.1.1.2.1.3 ¿Qué estrategia podemos seguir para medir los lados inclinados?

Se requirieron al menos 4 personas encargadas de los siguientes roles: un alumno sostenía el extremo de la cinta en la parte alta de la inclinación e indicaba si la cuerda estaba alineada, otro estiraba la cinta en la parte baja y la nivelaba, un tercer estudiante usaba el nivel para indicar cuándo la cinta estaba horizontal y el cuarto alumno enterraba las fichas e iba anotando las medidas.



En el extremo derecho se ve al alumno que desde la parte baja de la inclinación trata de mantener la cuerda tensa y nivelada, en la mitad está la alumna que registra los datos y enterraba las fichas, y en el extremo izquierdo se ven los alumnos encargados de nivelar la cuerda en la parte alta de la inclinación y de manipular el nivel y la plomada.

25

25

FUNCIONAMIENTO DE LA DIALÉCTICA MEDIA-MEDIO EN EL TRABAJO DE CAMPO

Levantamiento por diagonales (García, 1994)

Uso de fique para demarcar línea de base.

Redefinición de roles en terreno inclinado

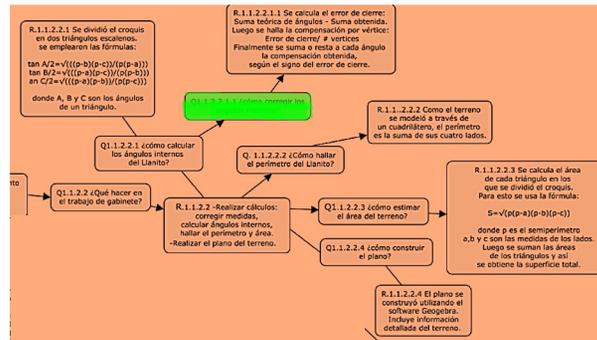
Uso de nivel y plomada en distancias planas.

Diseño de la libreta de campo.

26

26

Arborescencia de cuestiones y respuestas del trabajo de gabinete



27

27

Q1.1.2.2.1.1 ¿Cómo corregir los ángulos medidos?

Zamarripa (2010, p.38).

Condición geométrica = $180^\circ (n-2) = 180^\circ (2) = 360^\circ$

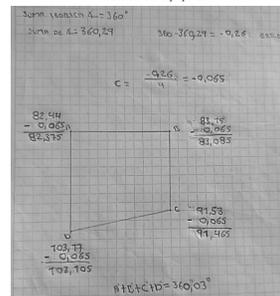
Error angular "EA":

$EA = \Sigma \text{ Ang. internos} - \text{Cond. Geom.}$

Compensación angular $CA = EA / n$

Este resultado se sumaría o restaría a cada ángulo según el signo obtenido en el error.

Solución del equipo 2.



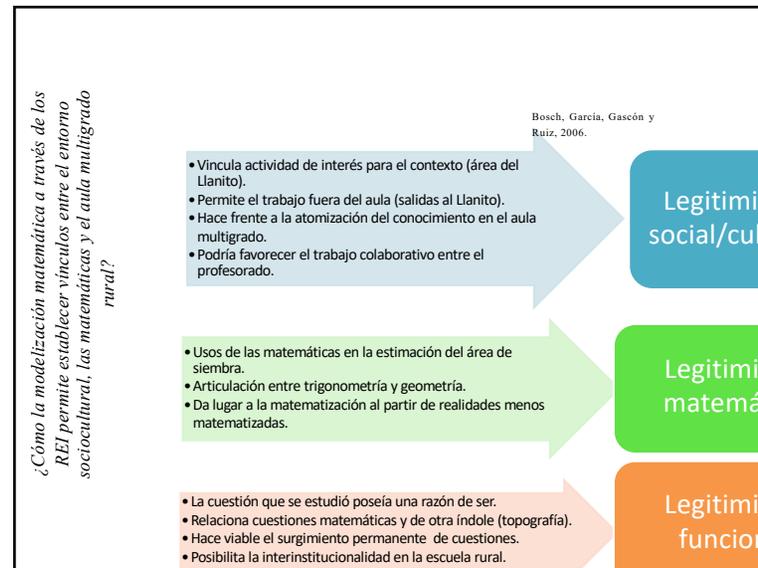
permitted that it reduced the difference between the data of the groups, although it maintained a certain discrepancy in the deductions.

28

28



29



30

¿Qué condiciones y restricciones surgen durante la implementación del REI en la secundaria rural multigrado?

Mesogénesis	Topogénesis	Cronogénesis
<ul style="list-style-type: none"> •Limitado acceso a obras. •Obras propuestas por el maestro. •Visitas al Llanito. •Manipulación de herramientas sencillas (calculadora, cinta, plomada, etc.). •Uso de software Geogebra. •Búsqueda de respuestas a nuevas cuestiones. 	<ul style="list-style-type: none"> •El maestro como figura de autoridad. •Búsqueda permanente de la aprobación del profesor. •Espacios de plenaria. •Trabajo en equipo y colaborativo. •El maestro como líder de la investigación. •El estudiantado como aprendices de topografía. •Participantes como asesores de sus compañeros. 	<ul style="list-style-type: none"> •Tiempos de estudio preestablecidos. •Currículo diseñado por periodos escolares y por grados. •Uso de horas de clase de otros docentes. •Mayor inversión de tiempo de lo esperado (10 sesiones de 6 horas c/u).

31

31

¿Cuáles condiciones y adaptaciones son necesarias para que pueda darse la modelización matemática a través de la enseñanza basada en REI en la secundaria rural multigrado?

Se requiere una mirada del contexto y un análisis praxeológico.	Gran inversión de tiempo y esfuerzo docente para el análisis preliminar.	Posibilitar el vínculo con problemáticas variadas (lo ambiental, lo social, lo agrícola, etc.)	Abordar cuestiones que permitan un estudio amplio de las matemáticas.	Dinamismo y liderazgo del maestro para gestionar el REI.
Variación en las fuentes de información y en quién las propone.	Trabajo colectivo entre estudiantes, mediar con la división de grados.	Estrategias para organizar el trabajo de estudiantes: bitácoras, arborescencias.	Abordar REI terminados, previamente diseñados.	Buscar el trabajo mancomunado entre maestros.

32

32

REFERENCIAS

- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educación Matemática Pesquisa, 15*(1), 1-28.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J., y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-54.
- Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29.
- Castela, C., & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(1), 79-130.
- Chevallard, Y. (1989). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.
- Diego-Mantecón, J., Haron, H., Blanco, T., & Romo-Vázquez, A. (2021). The chimera of the competency-based approach 6 to teaching mathematics: a study of carpentry 7 purchases for home projects. *Educational Studies in Mathematics, 10*(72), 339-357. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10032-5>
- De la Hoz, E. (2020). La siembra tradicional del café de la comunidad indígena Arhuaco en la enseñanza de las matemáticas escolares en los grados de 9º educación básica secundaria, 10º y 11º educación media I (Tesis de maestría no publicada). CECATA-IPN. https://www.cicatta.ipn.mx/usuarios/Files/cicatta/ProME/docs/tesis/tesis_mae2021/DelaHoz_2021.pdf
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2020). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática [AIEM], 15*, 75-94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- García, F. (1994). *Curso Básico de Planimetría*. Arbol Editorial.
- Grauville, W. (1954). *Trigonometría plana y esférica* (3ª ed.). Ginn and Company.
- Guerrero, A. (2006). *Geometría desarrollo axiomático*. Ecoe ediciones Ltda.
- Montes de Oca, M. (1989). *Topografía* (4ª ed.). Ediciones Alfa-omega.
- Ruiz-Rojas, A., Romo-Vázquez, A., & Solares-Rojas, A. (2020). Proyecto de construcción de una randa escolar: Un dispositivo didáctico interinstitucional para Telesecundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática [AIEM], 16*, 119-135. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.280>
- Sala, G., Barquero, B., y Font, V. (2020). Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Educación Matemática Pesquisa, 22*(4), 546-562. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p546-562>
- Siero, L., Echavarría, L., Romo-Vázquez, A., & Navarro, J. (2022). Diseño de un dispositivo de rehabilitación para la transición: una actividad de modelización matemática en la formación de ingenieros. *Avances de investigación en educación matemática [AIEM], 21*, 107-1234. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4258>
- Solares Pineda, D., Solares, A., & Padilla, E. (2011). La enseñanza de las matemáticas más allá de los salones de clase. Análisis de actividades laborales urbanas y rurales. *Educación Matemática, 28*(1), 69-98. <https://doi.org/10.24844/EM2801.03>
- Torres, A. & Villate E. (1968). *Topografía*. Editorial Norma.

33

33

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes

34

Trabajo de campo:

Medición de distancias planas.



Se empleó cuerda de fique para delimitar el polígono de base. Se utilizaron el nivel y la plomada para garantizar la horizontalidad de la cinta.

Medición de distancias inclinadas.



Colaboración entre equipos. Implicó 4 participantes: el zagüero, el delantero, quien nivelara la cuerda y quien tomara los datos.

35

35

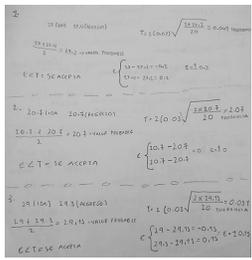
Trabajo de Gabinete:

Datos recolectados por los participantes:

EST.	D.N	Distancia	Proceder
0	1	23.41	25.2
1	2	30.4	33.4
2	3	29.8	30.15
3	0	24.3	25.7
0	4	31.02	33.75
3	1	26.3	30.2

Los equipos diligenciaron sus libretas a partir de las medidas tomadas en campo. La libreta con los datos se empleó para los cálculos que constituyeron el trabajo de gabinete.

Corrección de errores en las mediciones:

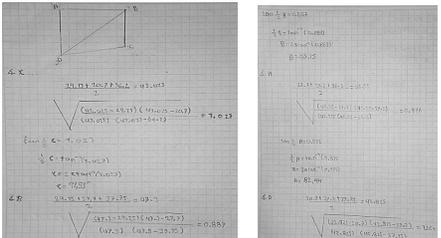
$$T = 2e \sqrt{\frac{2L}{L}} \quad D = (DI+DR)/2 ; E = DI-D ; DR-D$$


Se debía cumplir la condición $E < T$

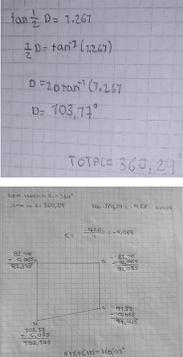
36

36

Estimación y corrección de ángulos internos del polígono de base:



El equipo dividió el polígono en 4 triángulos, teniendo en cuenta las diagonales.



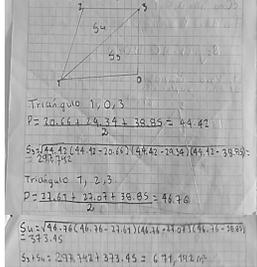
Se verificó la suma de ángulos internos para un cuadrado.

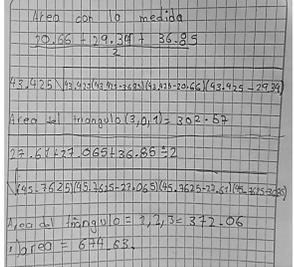
Estimación del error de cierre para corregir ángulos.

37

37

Estimación del área del terreno:



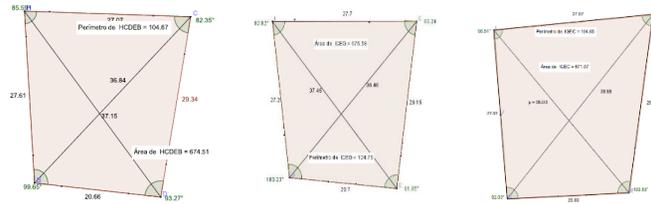


Se dividió el terreno en dos triángulos tomando en cuenta una de sus diagonales. Uso del ostensivo $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

38

38

Elaboración del plano usando Geogebra:



Croquis diseñado empleando el software Geogebra. Los equipos pudieron comparar el cálculo de área y perímetro con los valores arrojados por el programa.

39